

# Invasion spatiale en dynamique des populations

Matthieu Alfaro

Université de Montpellier

LAMSIN, ENIT, Tunis, avril 2017

[1] M. Alfaro, *Fujita blow up phenomena and hair trigger effect : the role of dispersal tails*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (2017).

[2] M. Alfaro, *Slowing Allee effect vs. accelerating heavy tails in monostable reaction diffusion equations*, Nonlinearity (2017).

[3] D.G. Aronson and H.F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. in Math. (1978).

[4] R.A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. of Eugenics (1937).

[5] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. (1966).

[6] F. Hamel and L. Roques, *Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions*, J. Differential Equations, (2010).

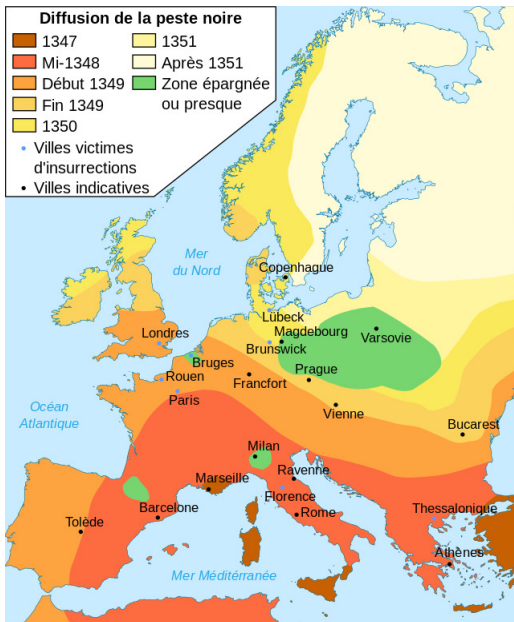
[7] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky and N.S. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bulletin Université d'Etat Moscou, Bjul. Moskowskogo Gos. Univ., 1937.

## Livres plus généraux

- [8] J.D. Murray, *Mathematical biology. I. A introduction.*
- [9] J.D. Murray, *Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications.*
- [10] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations.*

# Fronts d'invasion

- ▶ Chimie : réaction de Belousov-Zhabotinsky 1950 [Movie](#)...
- ▶ Physique : propagation de flamme [Movie](#)...
- ▶ Biologie : population dans un gradient environnemental translaté par le réchauffement climatique [Movie](#), **écologie, dynamique des populations, épidémiologie...**



# Chapitre 1 : PRELIMINAIRES

- I. EDO classiques en dynamique des populations
- II. Equation de la chaleur
- III. Equations de réaction diffusion
  - 1. Diffusion et croissance linéaire
  - 2. Diffusion et croissance non linéaire

# I. EDO classiques en dynamique des populations

$n = n(t) =$  nbre d'individus au temps  $t > 0$ .

Pb de Cauchy :

$$\frac{dn}{dt} = f(n), \quad n(0) = n_0 > 0.$$

Question : quid de  $n(t)$  qd  $t \rightarrow \infty$  ?

Différentes formes de fonctions de croissance  $f$  :



1.  $f(n) = f_{lin}(n) = rn$ ,  $r > 0$

Equilibre : 0 linéairement instable.

Ressources illimitées.

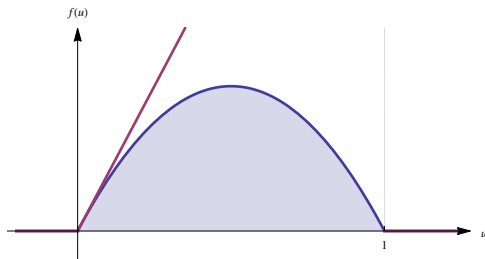
Tx de croissance par individu =  $r = cste.$

2.  $f(n) = f_{\text{monostable-KPP}}(n) = rn(1 - n)$ ,  $r > 0$

Equilibres : 0 linéairement instable, 1 linéairement stable.

Ressources limitées : il y a compétition.

Tx de croissance par individu =  $r(1 - n)$  positif avant 1, négatif ensuite, maximum en 0 (=hypothèse KPP).

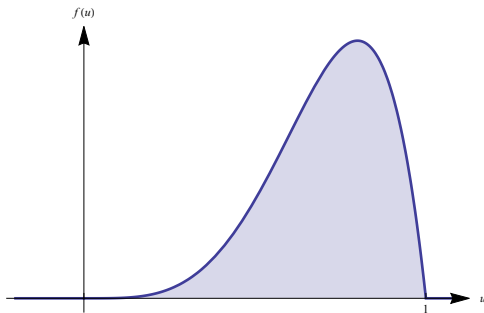


3.  $f(n) = f_{\text{monostable-degeneree}}(n) = rn^{1+p}(1-n)$ ,  $r > 0$ ,  $p > 0$

Equilibres : 0 instable (mais pas linéairement), 1 linéairement stable.

Ressources limitées : il y a compétition.

Tx de croissance par individu =  $rn^p(1-n)$  positif avant 1, négatif ensuite, pas maximum en 0 (=effet Allee faible).

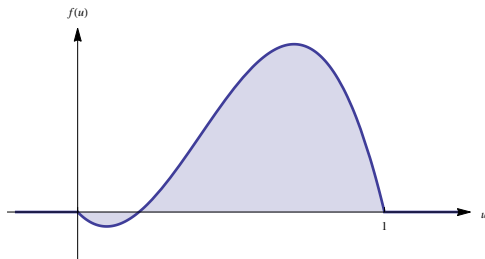


4.  $f(n) = f_{bistable}(n) = rn(n - \theta)(1 - n)$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 1$

Equilibres : 0 et 1 linéairement stables,  $\theta$  linéairement instable.

Ressources limitées : il y a compétition.

Tx de croissance par individu =  $r(n - \theta)(1 - n)$ , positif entre  $\theta$  et 1, négatif avant  $\theta$  (=effet Allee fort) et après 1.



# Comportement en temps grand

1. Cas linéaire :  $n(t) = n_0 e^{rt} \rightarrow \infty$ , explosion.
2. ► Cas KPP :  $n(t) \rightarrow 1$ , survie avec saturation (capacité biotique).<sup>1</sup>
3. ► Cas effet Allee faible :  $n(t) \rightarrow 1$ , survie avec saturation.
4. Cas effet Allee fort :  
si  $0 < n_0 < \theta$ ,  $n(t) \rightarrow 0$ , extinction.  
si  $n_0 > \theta$ ,  $n(t) \rightarrow 1$ , survie avec saturation.  
 $\theta$ =soeuil.

---

1. Rq : on peut calculer  $n(t)$  par séparation de variables. 

## II. Equation de la chaleur

$u = u(t, x)$  densité de population, temps  $t > 0$ , position  $x \in \mathbb{R}$ .

Pb de Cauchy :

$$u_t = u_{xx}, \quad u(t = 0, \cdot) = u_0,$$

avec donnée initiale  $u_0 \geq 0$  dans  $L^\infty$ .

## Rappels Fourier

- Pour  $f \in L^1$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi.$$

-Si  $f$  et  $\widehat{f}$  sont dans  $L^1$  alors

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)).$$

-Si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1$  alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

-La transformée d'une Gaussienne est une Gaussienne :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\xi^2}.$$



# Résolution de la chaleur par Fourier

On aboutit à

$$u(t, x) = G(t, \cdot) * u_0(x)$$

où

$$G(t, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

est le noyau de la chaleur.

# Le noyau de la chaleur

$G \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$  est une **unité approchée** :

-  $G \geq 0$

-  $\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}} G(t, x) dx = 1$

-  $\forall \delta > 0, \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \delta} G(t, x) dx = 0.$

# Conséquences

De

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy,$$

on tire que :

-  $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ . **Effet régularisant.**

- et même  $u \in C_b([0, \infty) \times \mathbb{R})$  si  $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$ . **Effet régularisant.**

-  $0 \leq u(t, x) \leq \min\left(\|u_0\|_\infty, \frac{\|u_0\|_1}{\sqrt{4\pi t}}\right)$ . **Extinction uniforme en espace.**

# Principe de comparaison

Notons  $u$ ,  $v$  les solutions de la chaleur avec donnée initiale  $u_0$ ,  $v_0$  respectivement. Alors

$$u_0 \leq v_0 \Rightarrow u(t, \cdot) \leq v(t, \cdot) \quad \forall t > 0.$$

De plus si  $u_0$  et  $v_0$  sont dans  $C_b(\mathbb{R})$  alors

$$u_0 \leq v_0 \text{ et } u_0 \not\equiv v_0 \Rightarrow u(t, \cdot) < v(t, \cdot) \quad \forall t > 0,$$

cad séparation stricte.

En particulier si  $u_0 \geq 0$ ,  $u_0 \not\equiv 0$  alors  $u(t, x) > 0$  pour tout  $t > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  (**propagation de la chaleur à vitesse infinie**).

### III. Equations de réaction-diffusion

#### 1. Diffusion et croissance linéaire

Pb de Cauchy dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$u_t = \Delta u + ru, \quad u(t = 0, \cdot) = u_0.$$

# C'est facile !

Posant  $u(t, x) = e^{rt}v(t, x)$  on se ramène à la chaleur sur  $v$  et donc

$$u(t, x) = e^{rt} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

# Donnée Dirac

Formellement si  $u_0 = \delta_0$  on obtient la solution fondamentale :

$$u(t, x) = e^{rt} G(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{rt - \frac{x^2}{4t}} \rightarrow \infty$$

qd  $t \rightarrow \infty$ , localement uniformément en espace.

En se plaçant dans le repère mobile avançant à vitesse  $c > 0$  on a

$$u(t, ct) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{t(r - \frac{c^2}{4})} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < c < 2\sqrt{r} \\ 0 & \text{si } c > 2\sqrt{r}. \end{cases}$$

► On a un front connectant  $\infty$  à 0 avançant à vitesse  $c^* := 2\sqrt{r}$ .

# Donnée exponentielle

Maintenant prenons  $u_0(x) = e^{-\lambda x}$  pour  $\lambda > 0$ . On cherche une solution conservant la forme initiale et avançant à une vitesse  $c$  à déterminer, cad

$$u(t, x) = e^{-\lambda(x-ct)}.$$

On aboutit à la relation de dispersion :

$$c(\lambda) = \lambda + \frac{r}{\lambda} \geq c^* = 2\sqrt{r}.$$

► La queue exponentielle de la condition initiale sélectionne la vitesse d'invasion de 0 par  $\infty$  !



### III. Equations de réaction-diffusion

#### 2. Diffusion et croissance non linéaire

Pb de Cauchy dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad u(t = 0, \cdot) = u_0.$$

Hyp :  $f(0) = 0$ ,  $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ .

## Un peu de Duhamel linéaire...

- ▶ Faire le lien entre le pb

$$y' + ay = f(t), \quad y(0) = 0,$$

avec  $y = y(t)$  et le pb

$$w' + aw = 0, \quad w(0; s) = f(s),$$

avec  $w = w(t; s)$ .

- ▶ En déduire la formule de Duhamel pour la chaleur avec source :

$$u_t = \Delta u + g(t, x), \quad u(t = 0, \cdot) = u_0.$$

## Notion de solution (retour au non linéaire)

Pour  $t_0 > 0$  on cherche une sol. dans  $X = C([0, t_0], BUC(\mathbb{R}^N))$ , normé par  $\|u\|_X = \sup_{0 \leq t \leq t_0} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ , en écrivant la **formule de Duhamel non linéaire** pour l'équation :

$$u(t, x) = G(t, \cdot) * u_0(x) + \int_0^t [G(t-s, \cdot) * f(u(s, \cdot))](x) ds,$$

soit encore

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(t-s, x-y) f(u(s, y)) dy ds.$$

# Solvabilité

## Theorem

*Solvabilité locale* : il existe  $t_0 = t_0(f, \|u_0\|_\infty) > 0$  tq le pb de Cauchy a une unique solution  $u$ . De plus  $\|u\|_X \leq 2\|u_0\|_\infty$ .

**Preuve** : th point fixe de Banach (existence) et lemme de Gronwall (unicité).

## Theorem

*Solvabilité globale* : si la solution (locale) est a priori bornée dans  $L^\infty$  alors elle est globale.

**Preuve** : on répète l'existence locale en  $t_0$ ,  $2t_0$  et on attrape tout intervalle de temps car la borne a priori montre que le  $t_0$  est fixe!

Pour avoir une telle borne, un outil important est le :

# Principe de comparaison

## Theorem

Si

$$v_t - \Delta v - f(v) \leq 0 \leq w_t - \Delta w - f(w) \quad \text{sous et sur solutions}$$

et

$$v_0 \leq u_0 \leq w_0 \quad \text{ordre initial}$$

alors

$$v(t, x) \leq u(t, x) \leq w(t, x), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{ordre conservé,}$$

avec séparation stricte comme pour la chaleur.

Applications :

-sous et sur solutions constantes : nos pbs de réaction diffusion sont GLOBALEMENT bien posés.

-sous et sur solutions par l'EDO :  $u_t = \Delta u - u$ ,  $u_t = \Delta u - u^2$ ,  
 $u_t = \Delta u + u^2$ ...

## Autre application utile

### Corollary

Considérons la solution  $u$  du pb de Cauchy  $u_t = \Delta u + f(u)$ ,  $u(t = 0, \cdot) = u_0$ . Si la condition initiale est sous solution cad

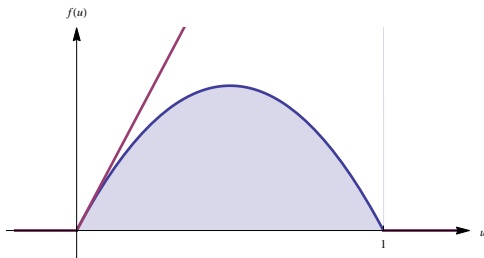
$$\Delta u_0 + f(u_0) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

alors la solution  $u(t, x)$  est croissante en temps.

**Preuve :** utiliser deux fois le principe de comparaison et l'invariance de l'éq par translation en temps.

# Chapitre 2 : EQUATION DE FISHER-KPP

- I. Donnée compacte et “Hair trigger effect”
- II. Donnée “front-like” et vitesse constante d’invasion
- III. Accélération induite par des “heavy tails”



Dans tout ce chapitre on considère le pb de Cauchy

$$u_t = \Delta u + ru(1 - u), \quad u(t = 0, \cdot) = u_0,$$

avec  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ ,  $u_0 \not\equiv 1$ , dans  $BUC(\mathbb{R}^N)$ .

On sait que la solution est GLOBALE et

$$0 < u(t, x) < 1, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

► Quid qd  $t \rightarrow \infty$  ?



## Un cas évident

S'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $u_0(x) \geq \varepsilon$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  alors, par comparaison avec la solution du pb de Cauchy EDO

$$\frac{dn}{dt} = f(n), \quad n(0) = \varepsilon,$$

on a

$$u(t, x) \rightarrow 1 \quad \text{uniformément en espace.}$$

Dans la suite on s'intéresse à des données initiales dont l'inf est zéro...

## I. Donnée compacte et “Hair trigger effect”

# Le hair trigger effect (HTE) pour Fisher-KPP

Toute perturbation de l'état  $u \equiv 0$  conduit la solution vers  $u \equiv 1$  :

## Theorem

Pour toute donnée à support compact, on a, pour tout  $R > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| \leq R} u(t, x) = 1,$$

et donc  $u(t, x) \rightarrow 1$  localement uniformément en espace.

**Preuve :** utiliser une fonction propre du laplacien comme sous solution, gagner de la croissance en temps, donc de la convergence point par point, puis une "meilleure" convergence (estimations paraboliques) pour passer à la limite dans l'équation puis identifier la limite=1...

# Rappel fonction propre principale du Laplacien Dirichlet

Dans la boule  $B_1$  :

$$\lambda_1 := \min_{u \in H_0^1(B_1), u \neq 0} \frac{\int_{B_1} |\nabla u|^2}{\int_{B_1} u^2} > 0$$

est la **valeur propre principale** du Laplacien Dirichlet dans  $B_1$ . Il existe alors une **fonction propre principale**  $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{B_1})$  satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } B_1 \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial B_1 \\ \varphi_1 > 0 & \text{dans } B_1, \end{cases}$$

qu'on normalise par  $\|\varphi_1\|_\infty = 1$ .

Dans la boule  $B_R$ , on pose  $\varphi_R(x) := \varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)$  et on a alors

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_R = \lambda_R\varphi_R & \text{dans } B_R \\ \varphi_R = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ \varphi_R > 0 & \text{dans } B_R, \end{cases}$$

normalisée par  $\|\varphi_R\|_\infty = 1$ , avec  $\lambda_R = \frac{\lambda_1}{R^2}$  et donc

$$\lambda_R \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

## II. Donnée “front-like” et vitesse constante d’invasion

Ici, dimension  $N = 1$ .

# Fronts progressifs

Si on cherche une solution sous la forme  $u(t, x) = \phi(x - ct)$  l'EDP  $u_t = u_{xx} + f(u)$  devient l'EDO  $-c\phi' = \phi'' + f(\phi)$ .

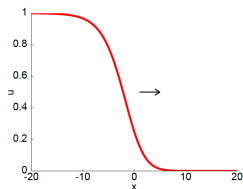
## Definition

Un front progressif (ou travelling wave TW) est un **couple**  $(c, \phi)$  où  $c \in \mathbb{R}$  est une **vitesse** et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un **profil positif** vérifiant

$$-c\phi' = \phi'' + f(\phi) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

et connectant les équilibres 1 et 0 cad

$$\phi(-\infty) = 1, \quad \phi(+\infty) = 0.$$



On peut montrer *a priori* qu'un éventuel front  $(c, \phi)$  vérifie

### Lemma

(i)  $0 < \phi < 1$ .

(ii)  $\phi'(\pm\infty) = 0$ .

(iii)  $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$  et  $c$  est du signe de  $\int_0^1 f$ .

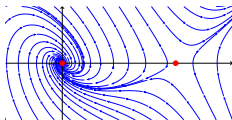
(iv)  $\phi' < 0$ .

En particulier  $c > 0$  signifiant que l'état 1 (=zone peuplée) envahit l'état 0 (=zone vide).

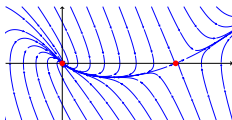


En passant dans le plan de phase, on constate en linéarisant autour de  $(\phi, \phi') \approx (0, 0)$  que :

-si  $0 < c < c^* := 2\sqrt{r}$  alors  $\phi$  ne peut pas rester positif, cad pas de TW!



-si  $c \geq c^*$  alors cela pourrait marcher et on a la décroissance vers zéro d'un éventuel front.



► Apparition d'une vitesse critique  $c^*$ .

Vitesse critique  $c^* := 2\sqrt{r}$ .

## Theorem

Si  $0 < c < c^*$  alors pas de TW.

Pour tout  $c \geq c^*$ , il existe une TW  $(c, \phi_c)$ . Le profil  $\phi_c$  est unique (modulo translation), et strictement décroissant sur  $\mathbb{R}$ . D'autre part

$$\phi_{c^*}(z) \sim_{z \rightarrow +\infty} \text{cste } ze^{-\lambda_{c^*} z} \quad (\text{FRONT CRITIQUE})$$

$$\phi_c(z) \sim_{z \rightarrow +\infty} \text{cste } e^{-\lambda_c z} \quad (\text{FRONT SUR-CRITIQUE } c > c^*)$$

où

$$\lambda_c := \frac{c - \sqrt{c^2 - 4r}}{2}.$$

Remarquons que  $c \in [c^*, \infty[ \mapsto \lambda_c$  est décroissante indiquant que plus la TW est rapide, plus sa queue (exponentielle) est lourde (ou décroît lentement).

# Pb de Cauchy à donnée front-like

## Definition

$0 < u_0 < 1$ , *uniformément continue*, est dite *front-like* si

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad u_0(+\infty) = 0.$$

Evidemment si  $u_0(x) = \phi_c(x)$  alors  $u(t, x) = \phi_c(x - ct)$  et l'état 1 envahit l'état 0 à vitesse  $c$ .

Plus généralement, quid si  $u_0(x) = e^{-\lambda x}$  pour  $x \gg 1$  et pour un  $\lambda > 0$  donné ?

Grâce à une sursolution exponentielle, on constate que l'invasion ne peut pas aller plus vite que

$$c = \begin{cases} c^* & \text{si } \lambda > \sqrt{r} \\ \lambda + \frac{r}{\lambda} > c^* & \text{si } 0 < \lambda \leq \sqrt{r}. \end{cases}$$

Une estimation “par dessous” (bien plus difficile !) montre que cette estimation “par dessus” est optimale, cad qu'elle donne la bonne vitesse d'invasion !

► Plus la queue (exponentielle) de la donnée initiale est lourde, plus l'invasion est rapide.

En fait, on a bien plus fort : les fronts progressifs décrivent en temps grand le pb de Cauchy avec donnée front-like à queue exponentielle. Movie

## Theorem

- Si  $u_0$  est front-like et  $\mathcal{O}(e^{-\sqrt{r}x})$  en  $+\infty$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - \phi_{c^*}(\cdot - c^*t + m(t))\|_{L^\infty} = 0,$$

où  $m(t) = \mathcal{O}(\ln t)$ .

- Si  $u_0$  est front-like et  $\sim e^{-\lambda x}$  en  $+\infty$  pour un  $0 < \lambda < \sqrt{r}$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - \phi_c(\cdot - ct + \xi)\|_{L^\infty} = 0,$$

pour un  $\xi \in \mathbb{R}$ , et où la vitesse est donnée par

$$c = \lambda + \frac{r}{\lambda} > c^*.$$

### III. Accélération induite par des “heavy tails”

Ici, dimension  $N = 1$ .

## Queue lourde

On considère ici le pb de Cauchy Fisher-KPP avec donnée front-like à **queue lourde** en  $+\infty$ , cad plus lourde que toute exponentielle :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) e^{\varepsilon x} = +\infty.$$

Par exemple :

$$e^{-\frac{x}{(\ln x)^\alpha}}, \quad e^{-x^\beta}, \quad \frac{1}{x^\alpha}, \quad \frac{1}{(\ln x)^\alpha},$$

avec  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < 1$ .

# Accélération

Pour  $0 < \lambda < 1$  on définit

$$E_\lambda(t) := \{x : u(t, x) = \lambda\}, \quad x_\lambda(t) := \min E_\lambda(t).$$

Theorem (Hamel, Roques 2010)

Soit  $u_0$  front-like et *à queue lourde*. Alors

$$\forall 0 < \lambda < 1, \exists t_\lambda \geq 0, \forall t \geq t_\lambda, E_\lambda(t) \neq \emptyset,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_\lambda(t)}{t} = +\infty \quad \text{ACCELERATION.}$$

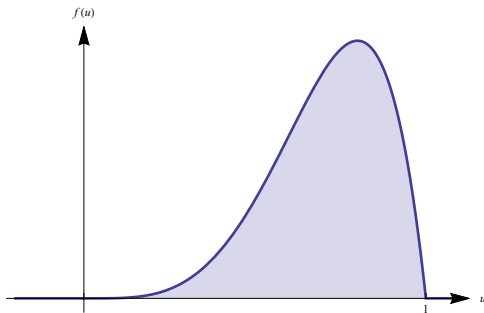
**Preuve :** pour tout  $c \geq c^*$  on peut glisser sous  $u_0$  une donnée front-like à queue exponentielle conduisant à une invasion à vitesse  $c$ . Ceci étant vrai pour tout  $c$ , on a accélération!<sup>2</sup>

2. Le papier de Hamel et Roques montre bien plus que cela, estimant notamment précisément la position des lignes de niveau.



# Chapitre 3 : EFFET ALLEE FAIBLE

- I. “Blow-up” de type Fujita
- II. “Hair trigger effect” vs Extinction
- III. Accélération ou pas...



## I. “Blow-up” de type Fujita

Ici on s'intéresse au pb de Cauchy dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$u_t = \Delta u + u^{1+p}, \quad u(t=0, \cdot) = u_0,$$

où  $p > 0$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ .

# Possibilité de blow-up

## Résolvant le pb de Cauchy EDO

$$\frac{dn}{dt} = n^{1+p}, \quad n(0) = n_0 > 0,$$

on voit que la solution explose en temps fini !

2 forces s'opposent sur l'EDP :

$$u_t = \underbrace{\Delta u}_{\text{tire vers l'extinction}} + \underbrace{u^{1+p}}_{\text{tire vers le blow-up}} .$$

► Les solutions sont elles globales ou explosent elles en temps fini ?

## Un cas évident

S'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $u_0(x) \geq \varepsilon$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  alors, par comparaison avec la solution du pb de Cauchy EDO

$$\frac{dn}{dt} = n^{1+p}, \quad n(0) = \varepsilon,$$

on a

explosion en temps fini.

Dans la suite on s'intéresse à des données initiales à support compact.

# Exposant de Fujita

Pb de Cauchy :

$$u_t = \Delta u + u^{1+p}, \quad u(t=0, \cdot) = u_0 \geq 0, \neq 0, \text{ à support compact.}$$

## Theorem (Fujita 1966)

On définit  $p_F := \frac{2}{N}$ .

- (i)  $0 < p \leq p_F \implies$  toutes les solutions explosent en temps fini.
- (ii)  $p > p_F \implies$  pour certaines données initiales "petites", la solution est globale et s'éteint qd  $t \rightarrow \infty$ .

Rq : les sol. de  $\partial_t v = \Delta v$  décroissent comme  $\frac{1}{t^{N/2}}$  et  $p_F = \frac{2}{N}$ ...

Preuve.

## II. “Hair trigger effect” vs. Extinction

Ici on s'intéresse au pb de Cauchy dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$u_t = \Delta u + ru^{1+p}(1-u), \quad u(t=0, \cdot) = u_0,$$

où  $p > 0$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ .

On sait que les solutions sont globales et restent entre 0 et 1. Pour Fisher-KPP

$$u_t = \Delta u + ru(1 - u)$$

on avait HTE. Pour

$$u_t = \Delta u + ru^{1+p}(1 - u)$$

l'introduction d'un effet Allee faible peut il conduire à l'extinction ?

# HTE vs. extinction

Pb de Cauchy :

$$u_t = \Delta u + ru^{1+p}(1-u), \quad u(t=0, \cdot) = u_0 \geq 0, \neq 0, \text{ à support compact.}$$

Theorem (Aronson, Weinberger 1978)

(i)  $0 < p \leq p_F \implies \text{HTE.}$

(ii)  $p > p_F \implies \text{certaines solutions s'éteignent (donnée initiale "petite").}$

Rq : (i) **Le HTE le long d'une sous suite**, cad

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| \leq R} u(t, x) = 1,$$

est un corollaire du Th. de Fujita, mais le "vrai" HTE réclame des arguments supplémentaires.

(ii) est une conséquence directe du Th. de Fujita et du principe de comparaison.



### III. Accélération ou pas...

Ici, dimension  $N = 1$ .

# Problématique

Pb de Cauchy ( $u_0$  front-like)

$$u_t = u_{xx} + u^\beta(1 - u), \quad u_0(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ pour } x \gg 1.$$

Effet Allee ( $\beta > 1$ ) vs. Queue lourde algébrique ( $\alpha > 0$ ).

Effet freinant vs. Effet accélérant.

► Accélération ou pas?...

Intuitivement :

- $\beta$  proche de 1,  $\alpha$  petit : accélération.

- $\beta$  grand,  $\alpha$  grand : pas d'accélération.

# L'invasion a bien lieu

On a vu que, en présence d'un effet Allee, des données à support compact et "petites" peuvent s'éteindre...

Néanmoins, pour des données front-like, un résultat de Zlatos 2005 dit que l'invasion de 0 par 1 a bien lieu, et qu'elle se fait à vitesse au moins linéaire : il existe  $\gamma > 0$  tq

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \leq \gamma t} u(t, x) = 1.$$

# Pas d'accélération

## Theorem (A. 2017)

Si

$$\beta \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$$

alors pas d'accélération : il existe une vitesse  $c > 0$  tq, pour tout  $0 < \lambda < 1$ , il existe  $T_\lambda \geq 0$  tq,

$$E_\lambda(t) \subset (\gamma t, ct), \quad \forall t \geq T_\lambda.$$

► L'effet Allee est assez fort pour bloquer l'accélération que la queue initiale produirait dans Fisher-KPP.

**Preuve :** il s'agit de construire une sur solution à queue algébrique et voyageant à vitesse constante. La condition  $\beta \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$  sort alors très naturellement.

# Accélération

## Theorem (A. 2017)

Si

$$\beta < 1 + \frac{1}{\alpha}$$

alors accélération : pour tout  $0 < \lambda < 1$ , tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_{\lambda,\varepsilon} \geq 0$  tq,

$$E_{\lambda}(t) \subset (x^{-}(t), x^{+}(t)), \quad \forall t \geq T_{\lambda,\varepsilon},$$

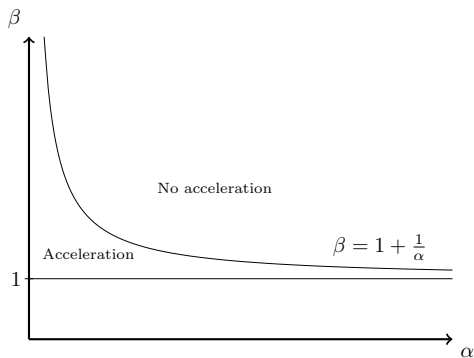
avec

$$x^{-}(t) := ((1 - \varepsilon)(\beta - 1)t)^{\frac{1}{\alpha(\beta-1)}}, \quad x^{+}(t) := ((1 + \varepsilon)(\beta - 1)t)^{\frac{1}{\alpha(\beta-1)}}.$$

► L'effet Allee n'est pas assez fort.

Preuve : **construire une sur solution** basée sur une EDO à paramètre. Pour la sous solution, c'est plus dur, cf [2] suivant une technique utilisée pour Fisher-KPP [6].

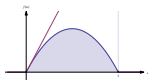
## $\beta$ -effet Allee vs. $\alpha$ -queue lourde



# CONCLUSION

# Conclusion

Fisher-KPP  $u_t = \Delta u + ru(1 - u)$  :



▶ HTE.

▶ Queues lourdes  $\Rightarrow$  accélération.

$\neq$

Effet Allee faible  $u_t = \Delta u + ru^{1+p}(1 - u)$  :



▶ HTE pour  $p \leq p_F$  (lien avec blow-up Fujita) mais Extinction possible pour  $p > p_F$  et donnés petites.

▶ Queues lourdes accélérantes vs. effet Allee freinant...



## D'autres modèles de type Fisher-KPP...

Hétérogène en domaine borné :

$$u_t = \Delta u + u(r(x) - u) \quad \text{dans } (0, \infty) \times \Omega,$$

avec donnée initiale  $u_0 \geq 0, \neq 0$ , et condition de bord Dirichlet  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  ou Neumann  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

► Le signe de la vp principale tranche entre extinction et persistance. ..

Diffusion non locale :

$$u_t = J * u - u + ru(1 - u) \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N.$$

► Diffusion à longue portée...

Compétition non locale :

$$u_t = \Delta u + ru(1 - \phi * u) \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N.$$

► Le principe de comparaison est perdu.... L'état  $u \equiv 1$  peut devenir instable...