UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2016-2017**

Dynamique des populations, L3 EBO

Contrôle continu sur les modèles discrets (2h15)

Exercice 1 (Plusieurs populations)

On veut modéliser l'évolution d'une population d'extra-terrestres, en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 100 ans, les adultes entre 100 et 200 ans et les individus âgés de plus de 200 ans. Jusqu'à 300 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 300 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Entre 0 et 100 ans, on estime que chaque individu donne naissance à 1 jeune. Entre 100 et 200 ans, on estime que, en moyenne, 4 individus donnent naissance à 1 jeune. Entre 200 et 300 ans les individus deviennent cannibales : entre 200 et 300 ans on estime que, en moyenne, 4 individus mangent 1 jeune.

On observe la population sur des intervalles de 100 ans. On note x_n, y_n et z_n les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année $100n$. Par exemple, y_3 est égal au nombre d'individus adultes au bout de 300 années.

1. Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution des trois classes de la population entre l'année n et l'année $n+1$ est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$.
3. En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$,$\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.
4. Calculer un vecteur propre non nul X_1, X_2, X_3 associé à chaque valeur propre.
5. En déduire une matrice de passage P, son inverse P^{-1}, et une matrice diagonale D telle que telle que $A = PDP^{-1}$ soit diagonale.
6. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des données initiales x_0, y_0, z_0. Que se passe t il pour cette population en temps grand ?

Exercice 2 (Une population)

1. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n. \end{cases}$$

Quelle est la fonction de croissance f qui permet d'écrire $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$? Quel type de croissance est ce ? De quelle type est la suite (p_n) ? Calculer p_n. Quel est le devenir de cette population ?

2. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} q_0 = 6 \\ q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + 3. \end{cases}$$

En un mot que se passe t il par rapport au modèle précédent ? En posant $p_n = q_n - 4$ montrer qu'on se ramène au cas précédent. En déduire q_n. Quel est le devenir de cette population ?

Exercice 3 (Une population)
On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}. \end{cases}$$

1. Quelle est la fonction de croissance f qui permet d'écrire $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$? Quels sont les équilibres ?
2. Dans un repère orthonormé, tracer la première bissectrice (d'équation $y = x$) et la courbe représentative de la fonction racine carrée.
3. On suppose ici $0 < p_0 < 1$. En justifiant sur le graphique, expliquer le comportement de la suite (p_n).
4. On suppose ici $p_0 > 1$. En justifiant sur le graphique, expliquer le comportement de la suite (p_n).