**UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER** **Année 2014-2015**

# Dynamique des populations, L3 EBO

## Contrôle continu sur les modèles discrets (2h)

Exercice 1 (Plusieurs populations)

On veut étudier l'évolution d'une population de mammifères. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 10 ans, les adultes entre 10 et 20 ans et les individus âgés de plus de 20 ans. Jusqu'à 30 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 30 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Seuls les adultes se reproduisent : entre 10 et 20 ans, on estime que chaque individu femelle donne naissance à 8 jeunes (le sex-ratio sera supposé égal à un). On observe la population sur des intervalles de 10 ans. On note $x_n$, $y_n$ et $z_n$ les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année $10n$. Par exemple, $y_3$ est égal au nombre d'individus adultes au bout de 30 années.

1. Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution des trois classes de la population entre l'année $10n$ et l'année $10(n+1)$ est la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que $det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 4)$.
3. En déduire que les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$,$\lambda_3 = -2$.
4. Calculer un vecteur propre non nul $X_1, X_2, X_3$ associé à chaque valeur propre.
5. En déduire une matrice de passage $P$, son inverse $P^{-1}$, et une matrice diagonale $D$ telle que telle que $A = PDP^{-1}$ soit diagonale.
6. En déduire une expression explicite de $x_n, y_n, z_n$ en fonction des conditions initiales $x_0, y_0, z_0$.

Exercice 2 (Une population)

1. On considère le modèle discret pour une population suivant
$$\begin{cases} w_0 \text{ donné} \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n. \end{cases}$$
Quelle est la fonction de croissance $f$ qui permet d'écrire $w_{n+1} = w_n + f(w_n)$ ? Quel type de croissance est ce ? De quelle type est la suite $(w_n)$ ? Calculer $w_n$. Quel est le devenir de cette population ?
2. On considère le modèle discret pour une population suivant
$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + 2. \end{cases}$$
En un mot que se passe t il par rapport au modèle précédent ? En posant $w_n = q_n - 4$ montrer qu'on se ramène au cas précédent. En déduire $q_n$. Quel est le devenir de cette population ?
3. On considère le modèle discret pour une population suivant
$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = \frac{2p_n}{4p_n + 1}. \end{cases}$$
Proposer un changement "$q_n$ = une fonction de $p_n$" qui permet de se ramener au cas précédent. Quel est le devenir de cette population ?