**UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER** **Année 2016-2017**

# Dynamique des populations HLMA609, L3 EBO

## Examen final sur les modèles continus

Exercice 1 (8 points)

On considère deux populations $x(t)$ et $y(t)$ cohabitant sur un même territoire. On propose le modèle linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = \qquad -y + 1, \end{cases}$$

avec les données initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = 2$.

1. Résoudre ce système avec la méthode habituelle (diagonalisation etc). Quel est le devenir des populations $x(t)$ et $y(t)$ ?
2. Retrouver le résultat en

   a) résolvant d'abord $y' = -y + 1$ avec la donnée initiale $y(0) = 2$

   b) puis en plongeant le résultat dans l'équation pour $x$

   c) enfin en résolvant cette dernière équation avec la donnée initiale $x(0) = 2$.

Exercice 2 (8 points)

On considère deux populations mesurées par $x(t)$ et $y(t)$ et vivant sur un même territoire. Le modèle est le système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = y(1 - y - \beta x), \end{cases}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes positives.

1. En quelques phrases, expliquer les phénomènes mis en jeu dans ce système.
2. On considère ici une population d'éléphants et de lions. Pourquoi a t on alors $\alpha = \beta = 0$ ? Quel est alors le devenir de ces animaux ?
3. On considère ici une population de saumons et de bars. Pourquoi faut il alors prendre $\alpha$ et $\beta$ non nuls ? Dans la suite, disons $\alpha = \beta = 2$ et donc

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - 2y) \\ y' = y(1 - y - 2x). \end{cases}$$

   a) Tracer les isoclines et la direction des trajectoires.

   b) Montrer que les équilibres sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(x_0, y_0)$ avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ à déterminer.

   c) Etudier la stabilité de $(0, 0)$.

   d) Etudier la stabilité de $(1, 0)$. On admet alors que $(0, 1)$ a la même stabilité.

   e) On admet que $(x_0, y_0)$ est instable. Avez vous un pronostic sur le comportement en temps grand ?

Exercice 3 (4 points)

1. On s'intéresse ici au modèle non linéaire $x' = f(x)$ où la fonction de croissance $f$ est définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f(x) = x\left(2 - x - \frac{2}{1+x}\right).$$
Montrer que $f(x) = x^2\frac{1-x}{1+x}$. Quels sont les équilibres ? Tracer l'allure de la courbe de $f$. Que se passe t il en temps grand pour la population ?
2. On s'intéresse ici au modèle non linéaire $x' = f(x)$ où la fonction de croissance $f$ est définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f(x) = x\left(2 - x - \frac{3}{1+x}\right).$$
Montrer que $f(x) = x\frac{-x^2+x-1}{1+x}$. Quels sont les équilibres ? Tracer l'allure de la courbe de $f$. Que se passe t il en temps grand pour la population ?