Université de Montpellier II
Maîtrise de Mathématiques
7 Leçons sur les Martingales

Pascal Azérad

17 décembre 2003

Table des matières

1 Espérance conditionnelle **5**
1.1 L'espérance mathématique : une moyenne probabiliste 5
1.2 Probabilité conditionnelle 6
1.3 Espérance conditionnelle : définitions et propriétés fondamentales 6
1.3.1 une moyenne relative 6
1.3.2 une projection orthogonale ou une prédiction optimale . 10
1.4 Loi conditionnelle. Brefs rappels. 10
1.5 Exercices 11

2 Processus stochastiques et temps d'arrêts **13**
2.1 Filtration : l'histoire d'un processus 13
2.2 Loi d'un processus 13
2.3 Trajectoires d'un processus 14
2.4 Temps d'arrêt 14
2.5 Exercices 16

3 Martingales **17**
3.1 Définition et interprétations 17
3.2 Martingales et temps d'arrêts 18
3.3 Convergence presque sûre 20
3.3.1 Le cas des surmartingales positives 20
3.3.2 Le cas des sous-martingales bornées dans L^1. 23
3.4 Martingales uniformément intégrables 25
3.4.1 Uniforme intégrabilité et convergence dans L^1 25
3.4.2 Martingales régulières 26
3.5 Exercices et problèmes. 28

Préambule

Ce cours volontairement succinct poursuit les buts suivants :
- être assimilable en sept semaines par un étudiant de maîtrise.
- être assimilable en sept jours par un mathématicien désireux de s'initier à la théorie des martingales.
- servir de tremplin pour les cours de troisième cycle et de vade-mecum pour les agrégatifs.

Il existe de nombreux traités volumineux et complets sur la théorie des probabilités, cet opuscule, en établissant un choix délibéré ne vise pas l'exhaustivité, il est plutôt destiné aux amoureux de raccourcis et chemins de traverse.[1] Les notions sont présentées sans affèterie, sans technicité inutile, mais nous avons cherché à capturer l'essentiel de chaque concept, en insistant sur les diverses interprétations qui font le charme si particulier de la théorie des probabilités. Ce cours présuppose une première connaissance des rudiments du calcul des probabilités et de la théorie de la mesure. En particulier, quelques preuves du premier chapitre sont seulement esquissées. A l'issue de ce cours, le lecteur pourra aborder avec aisance des sujets de troisième cycle, comme l'étude du mouvement brownien et du calcul stochastique.

Des exercices et problèmes accompagnent le texte, un bon nombre sont tirés de l'excellent recueil [9], où le lecteur pourra d'ailleurs trouver les corrections, ainsi que de nombreux autres exercices et problèmes. Une bibliographie présente des compléments au texte.

Une spécificité du texte est la présence de commentaires heuristiques, signalés par le sigle

★ A méditer : Nous pensons en effet que les mathématiques ne se livrent pas seulement par la déduction ou la démonstration, mais surtout par l'interprétation vivante, qui ne s'élabore que lentement, progressivement. Ces commentaires ne sont donc pas destinés à être saisis d'emblée, ne doivent pas forcément être compris d'ailleurs, ils sont simplement proposés, et non imposés, pour faciliter l'appropriation de la théorie.

Ce document est une première version, l'auteur est très reconnaissant pour toute erreur, coquille ou commentaire qu'on voudra bien lui adresser à

`azerad@math.univ-montp2.fr`

[1]"Délire laborieux et appauvrissant que de composer de vastes livres, de développer en cinq cent pages une idée que l'on peut très bien exposer oralement en quelques minutes. Mieux vaut feindre que ces livres existent déjà et en offrir un résumé, un commentaire." J.L. Borges, Fictions, Gallimard, trad. de *Ficciones*, SUR, Buenos Aires, 1944

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Dans ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Ω est appelé l'ensemble fondamental, $\mathcal{A}$ est une tribu ou σ-algèbre de parties de Ω. Le plus souvent, la tribu sera complète, i.e. contenant toutes les parties négligeables.
Il est bon de s'imprégner du vocabulaire de la théorie, afin de soutenir et développer l'intuition. Ainsi un élément $\omega \in \Omega$ est appelé une issue, une épreuve, un tirage ... selon le contexte, un élément $A \in \mathcal{A}$ est appelé un évènement. Lorsque $\omega \in A$, on dit que l'évènement A est réalisé.
★ A méditer : L'enjeu de la théorie ne consiste pas à connaître l'issue $\omega \in \Omega$ [1] mais à calculer des probabilités d'évènements ou des lois de variables aléatoires.

1.1 L'espérance mathématique : une moyenne probabiliste

Soit X une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable, ou positive. On définit son espérance[2] mathématique par

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

Cette expression se calcule à l'aide de *la loi* $\mathbb{P}_X$ de la v.a. X, qui est simplement la mesure image de $\mathbb{P}$ par X :

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x)$$

En fait cette formule générale recouvre deux cas particuliers de natures différentes, selon que la v.a. X est discrète prenant ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{x_k\}$

$$\mathbb{E}X = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

ou absolument continue de densité f_X

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

[1] la lettre Ω représentant l'inconnaissable...
[2] de l'anglais *expectation* : prévision

★ A méditer : Du fait que $\sum_k \mathbb{P}(X = x_k) = 1$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$, l'espérance représente *la moyenne des valeurs prises par la v.a., pondérées par leurs probabilités.*

Remarque. Dans le cas absolument continu, il est bon de voir que

$$f_X(x)\,dx = \mathbb{P}(x \leq X < x + dx) = dF_X(x),$$

où $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$ désigne la fonction de répartition de X. □

Il faut bien garder à l'esprit que l'espérance est un nombre associé à une v.a. La propriété principale est

Proposition 1 *L'espérance est une forme linéaire positive sur* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Exercice. Retrouver l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et d'une loi exponentielle de paramètre λ.

1.2 Probabilité conditionnelle

Soit un évènement $B \in \mathcal{A}$, tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, la probabilité de A sachant B est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$$

★ A méditer : Ainsi $\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B)$ induit une *nouvelle* probabilité pour laquelle B joue le même rôle que l'ensemble fondamental Ω vis à vis de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}_B(B) = 1$, $\mathbb{P}_B(A) = 0$ ssi $A \cap B = \emptyset$

Lorsqu'il y a différentes éventualités qui s'excluent mutuellement, on utilise :

Théorème 1 *la formule des probabilités totales. Soit* $(B_j)j$ *une partition de* Ω,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_j \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)$$

Lorsqu'il y a succession ou enchaînement d'évènements, on utilise

Théorème 2 *la formule des probabilités composées.*

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap \ldots) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(C|A \cap B) \ldots$$

Exercice. Retrouver la démonstration (très simple) des deux théorèmes.

1.3 Espérance conditionnelle : définitions et propriétés fondamentales

1.3.1 une moyenne relative

Théorème et Définition 1 *Soit X une variable aléatoire intégrable (resp. positive). Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notéee $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X$ est l'unique (à équivalence $\mathbb{P}$ p.s. près) variable aléatoire intégrable (resp. positive) vérifiant*

(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable*
(ii) $\int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}X \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}, \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Remarque. L'identité (ii) peut être remplacée par (ii')

$$\int_\Omega Z \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{B}}X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z \cdot X \, d\mathbb{P} \quad \text{pour toute v.a.} Z \ \mathcal{B}\text{-mesurable bornée (resp. positive).}$$

En effet, il suffit de commencer par prendre $Z = 1_B$ puis par linéarité d'étendre aux fonctions étagées, et enfin par passage à la limite aux v.a. bornées (resp. positives). □

Preuve. L'unicité de l'espérance conditionnelle résulte de (ii). En effet, une v.a.$\mathcal{B}$-mesurable Y telle que $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y \, d\mathbb{P} = 0$ est nulle $\mathbb{P}\, p.s.$
L'existence de l'espérance conditionnelle est une conséquence du théorème de Radon-Nykodym. En effet, l'application ν

$$B \in \mathcal{B} \mapsto \int_B X \, d\mathbb{P} \in \mathbb{R}$$

est une mesure de Borel *absolument continue* par rapport à $\mathbb{P}$: si $\mathbb{P}(B) = 0$ alors $\nu(B) = 0$. Il existe donc une application $\mathcal{B}$-mesurable Y telle que $\nu(B) = \int_B X \, d\mathbb{P}$ soit égale à $\int_B Y \, d\mathbb{P}$. Cet Y est l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$. ■

Exemple. Le cas particulier où $\mathcal{B}$ est une tribu atomique : Soit $(B_j)_{1 \le j \le n}$ une partition de Ω en évènements et $\mathcal{B} = \sigma(B_j)_j$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X = \sum_j \frac{\int_{B_j} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B_j)} \cdot 1_{B_j}$$

Ceci est une conséquence directe du fait que les v.a. $\mathcal{B}$-mesurables sont *constantes* sur les atomes B_j. Cet exemple est fondamental. Conditionner par $\mathcal{B}$ signifie qu'on est à même de déterminer si tel évènement B_j de $\mathcal{B}$ est réalisé. Si c'est le cas, l'espérance conditionnelle est alors la moyenne de X sur l'évènement B_j en question.

Remarque. Si on prend comme cas "encore plus particulier" $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$, on retrouve

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X = \frac{\int_B X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)} \cdot 1_B + \frac{\int_{B^c} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B^c)} \cdot 1_{B^c}$$

Du fait que

$$\frac{\int_B 1_A \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) = \int_\Omega 1_A \, d\mathbb{P}_B$$

par extension aux v.a.

$$\frac{\int_B X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)} = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}_B$$

et on notera donc

$$\frac{\int_B X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{E}(X|B)$$

□

Exercice. Considérer T la v.a. température définie sur $\Omega = \{1, \dots, 365\}$, évidemment muni de la tribu discrète. Soit $\mathcal{S}$ la tribu engendrée par les quatre saisons S_1, S_2, S_3, S_4. Que vaut $\mathbb{E}^{\mathcal{S}} T$?
★ A méditer : Alors que l'espérance est un *nombre*, l'espérance conditionnelle est une *variable aléatoire.* C'est en quelque sorte une prévision moyennée de la variable aléatoire de départ, suivant l'information contenue dans la tribu par laquelle on conditionne. Ceci se reflète dans les propriétés suivantes.

Proposition 2 *Soit X une v.a. intégrable (resp.positive)*

1. *La moyenne de la prévision moyenne de X sachant $\mathcal{B}$ est la moyenne de X :*
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X) = \mathbb{E}X$$
2. *Si X est indépendante de la tribu $\mathcal{B}$, la prévision n'apporte rien de plus que l'espérance simple :*
$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X = \mathbb{E}X$$
3. *A l'opposé, si X est $\mathcal{B}$-mesurable, la prévision devient exacte*
$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X = X$$
4. *si Z est $\mathcal{B}$-mesurable bornée (resp. positive), elle se comporte* comme une constante *vis à vis de l'espérance conditionnelle :*
$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(ZX) = Z \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X$$
5. *En particulier, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} 1 = 1$*
6. *Linéarité : $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(aX + bY) = a\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X + b\mathbb{E}^{\mathcal{B}} Y$*
7. *Positivité : si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X \geq 0$ p.s.*

Preuve. Nous démontrons seulement le point 4, les autres sont laissés en exercice. D'abord $Z \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X$ est $\mathcal{B}$-mesurable. Ensuite $\forall B \in \mathcal{B}$,
$$\int_B Z\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega 1_B Z \, \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X \, d\mathbb{P}$$
La variante (ii') de la définition donne enfin
$$\int_\Omega 1_B Z \, \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega 1_B Z \, X \, d\mathbb{P} = \int_B Z \, X \, d\mathbb{P}$$
■

Remarque. La propriété 4 est encore vraie si $X \in L^p$ et $Z \in L^q(\mathcal{B})$, pour tous $1 \leq p, q \leq \infty, \quad 1/p + 1/q = 1$. Elle est vraie dès que $X \in L^1$ et $ZX \in L^1$. Pour le démontrer, commencer par tronquer Z, i.e. poser
$$Z_n = n \cdot 1_{(Z>n)} - n \cdot 1_{(Z<-n)} + Z \cdot 1_{(-n \leq Z \leq n)}$$
puis passer à la limite $n \to \infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée.
□

Insistons sur une propriété fondamentale pour la théorie des martingales (voir chapitre ultérieur).

Théorème 3 *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ des sous tribus de $\mathcal{A}$, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X) = \mathbb{E}^{\mathcal{C}}X$*

Preuve. Tout d'abord $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}X$ est $\mathcal{C}$-mesurable donc a fortiori $\mathcal{B}$-mesurable. Ensuite, soit $C \in \mathcal{C}$, d'une part

$$\int_C \mathbb{E}^{\mathcal{C}}X \, d\mathbb{P} = \int_C X \, d\mathbb{P}.$$

D'autre part, comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{B}$ donc

$$\int_C X \, d\mathbb{P} = \int_C \mathbb{E}^{\mathcal{B}}X \, d\mathbb{P}$$

Donc $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}X$ vérifie bien les deux conditions caractérisant $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X)$ ■

Le théorème suivant est très utile pour obtenir des inégalités.

Théorème 4 (inégalité de Jensen) *Soit ϕ une fonction convexe réelle, telle que $\phi(X) \in L^1$ (resp. $\phi(X) \geq 0$),*

$$\phi(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}\phi(X) \; p.s.$$

En particulier, pour $p \geq 1$

$$|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X|^p \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|^p$$

Preuve. Elle est très simple si on utilise le fait que toute fonction convexe est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines[3] :

$$\phi(x) = \sup\left\{ax + b; \; (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \; at + b \leq \phi(t)\right\}$$

Soit une fonction affine $t \mapsto at + b$ minorant ϕ, par *linéarité* on a :

$$a(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X) + b = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(aX + b) \; p.s.$$

Par *positivité*,

$$a(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X) + b \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}\phi(X) \; p.s.$$

Comme ceci a lieu pour toute minorante affine, en prenant la borne supérieure du premier membre on obtient le résultat annoncé ■

Signalons enfin que les théorèmes fondamentaux de l'intégration s'étendent à l'espérance conditionnelle.

Théorème 5 *soit $(f_n)_n$ une suite croissante de v.a. positives, alors $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}f_n)_n$ est une suite croissante de v.a. positives et*

$$\lim_n (\mathbb{E}^{\mathcal{B}}f_n) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\lim_n f_n)$$

soit $(f_n)_n$ une suite de v.a. dominées par une v.a. g intégrable,

$$\lim_n (\mathbb{E}^{\mathcal{B}}f_n) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\lim_n f_n)$$

[3] appelées aussi droites d'appui

Preuve. Démontrons seulement le premier résultat. L'espérance conditionnelle étant positive, $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f_n)_n$ est une suite croissante de v.a. positives, de plus pour tout n et pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a

$$\int_B f_n \, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}} f_n \, d\mathbb{P}$$

Faisons tendre $n \to \infty$ et appliquons le théorème de convergence monotone à chaque membre, on obtient

$$\int_B \lim_n f_n \, d\mathbb{P} = \int_B \lim_n \mathbb{E}^{\mathcal{B}} f_n \, d\mathbb{P}$$

Or $\lim_n \mathbb{E}^{\mathcal{B}} f_n$ est $\mathcal{B}$-mesurable comme limite de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables, d'où le résultat. ■

1.3.2 une projection orthogonale ou une prédiction optimale

Lorsqu'on la restreint à $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'inégalité de Jensen montre que l'espérance conditionnelle est contractante. Elle possède en outre une interprétation géométrique très importante : c'est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. En effet
(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ X est $\mathcal{B}$-mesurable
(ii) $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X - X) \perp Z$, pour toute v.a. $Z \in L^2$ $\mathcal{B}$-mesurable.
A ce titre, il vérifie la propriété de meilleure approximation suivante :

Théorème 6 *Parmi toutes les v.a. Z $\mathcal{B}$-mesurable, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X$ est la plus proche en norme L^2 de X.*

$$\|X - \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X\| = \inf\{\|X - Z\|, \quad Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})\}$$

1.4 Loi conditionnelle. Brefs rappels.

Dans le cas particulier où la tribu $\mathcal{B}$ est engendrée par une v.a. Y, l'espérance conditionnelle est notée

$$\mathbb{E}^{\sigma(Y)} X = \mathbb{E}(X|Y)$$

Rappelons le lemme très utile.

Lemma 1 *La v.a. Z est $\sigma(Y)$-mesurable si et seulement si Z est de la forme $g(Y)$, avec g mesurable.*

D'après la définition, $\mathbb{E}(X|Y)$ est une variable aléatoire qui est $\sigma(Y)$-mesurable, donc il existe une application mesurable g telle que

$$\mathbb{E}(X|Y) = g(Y).$$

Ainsi il est naturel de noter

$$g(y) = \mathbb{E}(X|Y = y).$$

Cette notation n'est pas fortuite. En effet, elle correspond exactement au conditionnement par l'évènement $(Y = y)$ lorsque celui-ci a une probabilité non nulle.
Exemple. On lance d'abord une pièce équilibrée n fois. On compte le nombre de "face" obtenu, désigné par Y. On relance la pièce Y fois. Soit X le nombre de "face" obtenu au second tour. Déterminons $\mathbb{E}(X|Y)$. Pour cela $\mathbb{E}(X|Y = k)$ représente le nombre moyen de "face" obtenu au second tour, sachant que $Y = k$. La loi conditionnelle $\mathcal{L}_X(\cdot|Y = k)$ est facile à identifier ici : c'est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, 1/2)$. D'où $\mathbb{E}(X|Y = k) = k/2$ et $\mathbb{E}(X|Y) = Y/2$.

Plus généralement, lorsque pour toute fonction borélienne bornée (resp. positive) on peut exprimer

$$\mathbb{E}(h(X)|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\mu_y(x)$$

on dit que μ_y est la *loi conditionnelle* de X sachant $(Y = y)$ que l'on note désormais$\mathcal{L}_X(\cdot|Y = y)$.

Dans le cas où X et Y sont absolument continues, la densité conditionnelle de X sachant Y vaut :

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} \tag{1.1}$$

★ A méditer : Cette formule se retient aisément, il suffit d'oser faire appel à l'intuition et aux *probabilités infinitésimales*.

$$f_{X|Y=y}(x)\, dx = \mathbb{P}(x \leq X < x + dx|Y = y) =$$

$$\frac{\mathbb{P}(x \leq X < x + dx,\ y \leq Y < y + dy)}{\mathbb{P}(y \leq Y < y + dy)} = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy}{f_Y(y)\, dy}$$

Ainsi, la loi conditionnelle se calcule de façon analogue à la probabilité conditionnelle. Une variante intéressante de (1.1) est la version continue de la formule des probabilités totales

$$f_X(x) = \int f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y) dy \tag{1.2}$$

Exercice. Retrouver *à partir de la formule précédente* que la densité d'une somme de v.a. indépendante s'exprime comme le produit de convolution de leurs densités respectives : $f_{X+Y}(x) = \int f_X(x - y)\, f_Y(y) dy$

1.5 Exercices

1. **Propriété d'absence de mémoire.** Soit T v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que pour tous t, s réels positifs,

   $$P(X > t + s|X > t) = P(X > s).$$

   Interpréter. Montrer que cette propriété caractérise la loi exponentielle parmi les lois continues. Quelle est l'analogue parmi les lois discrètes ?

2. **Indépendance partielle.** Soit $\mathcal{B}$ une tribu et X une v.a. On se donne $\mathcal{C}$ une tribu indépendante de $\sigma(X) \cup \mathcal{B}$. Montrer que

   $$E^{\sigma(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})} X = E^{\mathcal{B}} X$$

   indications : $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est engendrée par les $B \cap C$

3. **Echantillon de v.a.** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi intégrable. Soit $S_n = \sum_{k \leq n} X_k$. Déterminer $E(X_1|S_n)$ ainsi que $E(S_n|X_1)$
4. **Une propriété d'approximation.** Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur $[0,1]$ engendrée par les intervalles de la forme $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ où $k = 1, \ldots, n-1$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, calculer $E^{\mathcal{F}_n} f$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?
5. **Formule des espérances conditionnelles totales.** Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une partition de Ω en évènements. Montrer que
$$E(X) = \sum_i P(A_i) E(X|A_i).$$
Application : David (fortune initiale 1F) joue à pile ou face contre Goliath (fortune initiale 1MF). La mise est de 1F à chaque partie. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux n'a plus rien. Quelle est la durée moyenne du jeu ?
indications : Soit X_n (resp. Y_n) la fortune de David (resp. Goliath) à la n^e partie et T la v.a. durée du jeu. Soit $g(x) = E(T|X_0 = x)$. Montrer que $g(x) = 1/2(g(x-1) + g(x+1)) + 1$. Chercher $g(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$, en déduire que $g(x) = x\,(10^6 + 1 - x)$

Chapitre 2

Processus stochastiques et temps d'arrêts

2.1 Filtration : l'histoire d'un processus

Définition 1 *Un processus stochastique*[1] *est une famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$*, qui peut être indexée par* $\mathbb{T} = \mathbb{R}+$ *ou* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$*. Dans le cas où* $\mathbb{T} = \mathbb{R}+$*, resp.* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$*, on dit que le processus est à temps continu, resp. discret. Dans ce dernier cas, on dit aussi série temporelle ou série chronologique.*

★ A méditer : En général, un processus aléatoire modélise l'évolution au cours du temps d'une quantité aléatoire, par exemple le cours d'un actif financier.

Définition 2 *On appelle filtration naturelle du processus la suite* croissante *de tribus complètes*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \le t)$$

Plus généralement, on appelle filtration toute suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$*. On dit que le processus est* adapté *si pour tout* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

★ A méditer : Le fait que les tribus d'une filtration soient emboîtées $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+\delta t}$ reflète le fait que l'information accumulée sur le processus croît avec le temps. Dans certains cas, on aura intérêt à ce que $\mathcal{F}_0$ soit la tribu grossière $\{\emptyset, \Omega\}$. Enfin on désigne par $\mathcal{F}_\infty$ la tribu $\sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$.

2.2 Loi d'un processus

La loi d'un processus est la donnée des *lois conjointes* de $(X_{t_1}, X_{t_2} \ldots, X_{t_k})$ pour toutes les suites finies d'instants $t_1, t_2, \ldots t_k$. Ainsi la loi du processus (X_t) permet de calculer les probabilités :

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots X_{t_k} \in B_k)$$

Exercice. Le processus (X_t) est *à accroissement indépendants* si pour tous $t_1 < t_2 < t_3$, $X_{t_3} - X_{t_2}$ est indépendant de $X_{t_2} - X_{t_1}$. Il est dit *stationnaire* si

[1] mot apparu vers 1945, du grec *stokhastês* : devin

la loi de $X_{t_2} - X_{t_1}$ ne dépend que de $(t_2 - t_1)$. On suppose de plus que $X_0 \equiv 0$. On note f_t la densité de X_t. Montrer que

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots X_{t_k} \in B_k) =$$

$$\int_{B_1 \times B_2 \times \dots B_k} dx_1 dx_2 \dots dx_k f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})$$

Indication : penser à la formule des probabilités composées.

2.3 Trajectoires d'un processus

On peut voir aussi un processus stochastique comme une *fonction aléatoire* qui à chaque tirage $\omega \in \Omega$ associe une fonction

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

On appelle cette dernière une trajectoire.
★ A méditer : Il y a donc deux points de vue sur un processus stochastique. A chaque instant t, on observe une v.a. X_t. Ou bien à chaque tirage ω, on tire une trajectoire $\{X_t(\omega),\, t \in \mathbb{T}\}$. C'est exactement la même chose en mécanique des fluides avec les points de vue eulerien et lagrangien.

2.4 Temps d'arrêt

Définition 3 *Une variable aléatoire* $T : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ *est appelé temps d'arrêt si*

$$\forall t < \infty, \quad (T \leq t) \in \mathcal{F}_t \tag{2.1}$$

Dans le cas particulier où le processus est à temps discret, (2.1) équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (T = n) \in \mathcal{F}_n. \tag{2.2}$$

Preuve. D'une part on a

$$(T = n) = (T \leq n) \cap (T \leq n-1)^c.$$

Comme $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $(T \leq n-1) \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, (2.1) $\Rightarrow$ (2.2).
Réciproquement,

$$(T \leq n) = \bigcup_{k \leq n} (T = k)$$

Comme $\forall k \leq n$, $(T = k) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, (2.2) $\Rightarrow$ (2.1). ■

★ A méditer : $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ signifie qu'à un instant donné t, on sait si on s'est arrêté ou non. Mais on ne sait pas encore si on va s'arrêter avant une date ultérieure $t + s$: $(T \leq t + s) \notin \mathcal{F}_t$

Définition 4 *Soit T un temps d'arrêt. On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}_\infty$ est* antérieur *à T si*

$$\forall t < \infty, \quad A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t. \tag{2.3}$$

L'ensemble de tels évènements constitue une sous-tribu de $\mathcal{F}_\infty$ appelée tribu antérieure *à T notée $\mathcal{F}_T$.*
De même, si le processus est à temps discret, on peut remplacer (2.3) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A \cap (T = n) \in \mathcal{F}_n. \tag{2.4}$$

Preuve. Il s'agit de voir que
– $\mathcal{F}_T$ contient Ω
– $\mathcal{F}_T$ est stable par complémentation
– $\mathcal{F}_T$ est stable par réunion dénombrable.
Montrons la stabilité par complémentation. Les autres points sont triviaux. Soit $A \in \mathcal{F}_T$, et $t < \infty$, l'idée clef est que

$$A^c \cap (T \leq t) = (A \cap (T \leq t))^c \cap (T \leq t) \tag{2.5}$$

En effet $(A \cap (T \leq t))^c = A^c \cup (T > t)$ donc

$$(A \cap (T \leq t))^c \cap (T \leq t) = (A^c \cap (T \leq t)) \cup ((T > t) \cap (T \leq t))$$

or $(T > t) \cap (T \leq t) = \emptyset$ d'où (2.5). Comme d'une part $(A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ donc aussi $(A \cap (T \leq t))^c$ et d'autre part $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$, le résultat en découle. ■

Exemple. Temps d'atteinte d'une partie. Soit D une partie borélienne de $\mathbb{R}$,

$$\tau_D = \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\};\ X_n \in D\}$$

est un temps d'arrêt.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(\tau_D = n) = (X_n \in D) \cap \bigcap_{k \leq n} (X_k \notin D)$$

Or $(X_n \in D) \in \mathcal{F}_n$ et $(X_k \notin D) = (X_k \in D)^c \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ d'où le résultat.
Illustrons par cet exemple la pertinence de la notion de temps d'arrêt. Soit un joueur dans un casino (ou un actif financier sur un marché...) qui mise initialement X_0. Soit X_n le gain algébrique (positif ou négatif) à la n^e partie (ou le n^e jour). Soit $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} X_k$ la fortune totale au temps n. Une stratégie peut être de s'arrêter (resp. vendre, acheter) dès que S_n dépasse un certain seuil b ou descend en dessous d'un seuil a. On est amené naturellement à introduire

$$T = \inf\{n \geq 1;\ S_n \in [a, b]^c\}$$

Exercice. Soit X une v.a. et T un temps d'arrêt. Montrer que, sur $(T = n)$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_T} X = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X$

Proposition 3 *Soit S et T deux temps d'arrêts, $S \wedge T$ est aussi un temps d'arrêt.*

Preuve. Il suffit de voir que

$$((S \wedge T) \leq t) = (S \leq t) \cup (T \leq t).$$

■

Remarque. Attention, selon le tirage ω, $(S \wedge T)(\omega)$ peut valoir $S(\omega)$ ou $T(\omega)$. Le plus petit de S et T varie selon l'épreuve. □

Le terme antérieur qui qualifie la tribu $\mathcal{F}_T$ n'est pas fortuit.

Proposition 4 *Soit S et T deux temps d'arrêts, si $S \leq T$ p.s., alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}_S$, cela signifie que $\forall t < \infty, \quad A \cap (S \leq t) \in \mathcal{F}_t$ Comme $S \leq T$ p.s.,

$$(T \leq t) \subset (S \leq t),$$

et $A \cap (T \leq t) = A \cap (S \leq t) \cap (T \leq t)$, à une partie négligeable près. Or $A \cap (S \leq t) \in \mathcal{F}_t$ et $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ car T est un temps d'arrêt, de plus $\mathcal{F}_t$ est supposée complète, donc $A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ ■

A l'aide d'un temps d'arrêt T, d'une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable X_∞ et d'un processus adapté (X_n), on peut construire une nouvelle variable X_T par

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

ou de façon équivalente

$$X_T(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & si \quad T(\omega) = n \\ X_\infty(\omega) & si \quad T(\omega) = \infty \end{cases}$$

On vérifie aisément que

Proposition 5 *X_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable*

Preuve. Il suffit d'écrire

$$X_T = \sum_n 1_{(T=n)} X_n + 1_{(T=\infty)} X_\infty$$

et d'utiliser le lemme

Lemma 2 *Soit Z une v.a. $\mathcal{F}_\infty$-mesurable , Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable ssi $\forall n$, $1_{(T=n)} Z$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable.*

■

On peut même construire une nouveau processus :

Définition 5 *Soit (X_n) un processus adapté et T un temps d'arrêt. Le processus $(X_{n \wedge T})$ est défini par*

$$X_{n \wedge T}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & si \quad T(\omega) \geq n \\ X_{T(\omega)}(\omega) & si \quad T(\omega) < n \end{cases}$$

On l'appelle processus arrêté *à l'instant T. C'est encore un processus adapté.*

2.5 Exercices

1. **Minimum de deux temps d'arrêt.** Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration et S, T deux temps d'arrêt. Montrer que

$$\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$$

2. **Connaissance progressive d'une v.a.** Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration, X une v.a.intégrable ou positive et T un temps d'arrêt. Posons pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$. Montrer que

$$X_T = E(X|\mathcal{F}_T)$$

Chapitre 3

Martingales

Dans la suite de ce cours, on se limite aux processus à temps discret. $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une filtration. $\mathcal{B}_\infty$ est la tribu $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n)$.

3.1 Définition et interprétations

Définition 6 *Un processus $(X_n)_n$ adapté à une filtration $(\mathcal{B}_n)_n$ est appelé une $\mathcal{B}_n$- martingale* [1] *(resp. surmartingale, sous-martingale) si*
(i) $\forall n$ X_n est intégrable (ou positive)
(ii) $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1} = X_n$ (resp. $\leq X_n$, resp. $\geq X_n$)

Remarque. Si (X_n) est une martingale (resp. surmartingale , sous-martingale) pour une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle l'est aussi pour sa filtration naturelle. La réciproque n'est pas vraie. □

Remarque. La suite (X_n) est une surmartingale ssi $(-X_n)$ est une sous-martingale. □

La terminologie sur ou sous-martingale est trompeuse : une sous-martingale est *croissante* en moyenne conditionnelle. Autrement dit, pour gagner en moyenne, il faut trouver une *sous*-martingale.

Proposition 6 *Si $(X_n)_n$ est une $\mathcal{B}_n$-martingale (resp. surmartingale , sous-martingale) alors*
(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1} - X_n) = 0$ (resp. ≤ 0, resp. ≥ 0)
(ii) la suite $\mathbb{E}X_n$ est constante (resp. décroissante, croissante).

Preuve. (i) Par linéarité $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_n$. Or X_n est adapté donc $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_n = X_n$.
(ii) Il suffit d'utiliser que $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}} X) = \mathbb{E}X$. ■

Exemple. Soit X une v.a. intégrable (resp. positive) et $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X$. On vérifie aisément que $(X_n)_n$ est une $\mathcal{B}_n$-martingale intégrable (resp.positive).

[1] du provençal *martegalo* Martigues. *jouga a la martegalo* : jouer à la martingale. Système de jeu fondé sur des considérations découlant du calcul des probabilités et qui prétend assurer un bénéfice certain dans les jeux de hasard.

Exemple. Stratégie de placement. Soit (X_n) une $\mathcal{B}_n$-martingale intégrable. Soit (Y_n) une processus *prévisible*, i.e. pour tout $n \geq 1$, Y_n est $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable et Y_0 est $\mathcal{B}_0$-mesurable. On suppose en outre que pour tout n, Y_n est borné. On pose

$$Z_n = Y_0\, X_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} Y_k\, (X_k - X_{k-1})$$

Le processus (Z_n) une $\mathcal{B}_n$-martingale.
★ A méditer : L'exemple précédent s'interprète en terme de finance. Si X_k désigne le cours d'une action donnée au temps k, et Y_k la quantité d'actions détenue au temps k, qui est prévisible puisque le financier décide en fonction des cours *précédents* combien d'actions il va détenir, le bénéfice (algèbrique !) réalisé entre le jour $k-1$ et le jour k est $Y_k\,(X_k - X_{k-1}$. La fortune totale accumulée au temps n est donc précisément :

$$Z_n = Y_0\, X_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} Y_k\, (X_k - X_{k-1})$$

Exemple. Jeu de pile ou face. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et centrées. Soit

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

S_n est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)$
La propriété suivante généralise la définition.

Proposition 7 *Si $(X_n)_n$ est une $\mathcal{B}_n$-martingale (resp. surmartingale , sous-martingale) alors pour $m \geq n$ $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_m = X_n$ (resp. $\leq X_n$, resp. $\geq X_n$.)*

Preuve. Comme les tribus $\mathcal{B}_n$ sont emboîtées, le théorème 3 donne

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_m = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n+1}} \ldots \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{m-1}} X_m$$

en appliquant la définition à répétition, on obtient le résultat ■

La propriété fondamentale des martingales est que ce résultat s'étend aux instants aléatoires, pourvu qu'ils soient des temps d'arrêts *bornés* et fait l'objet de la prochaine section.

3.2 Martingales et temps d'arrêts

Les martingales se comportent très bien vis à vis des temps d'arrêts.

Théorème 7 *Soit (X_n) une (resp. sur, sous-) martingale et T un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté $(X_{n \wedge T})$ est une (resp. sur, sous-) martingale.*

Preuve. On a $X_{(n+1)\wedge T} - X_{n \wedge T} = 1_{(T \geq n+1)}\,(X_{n+1} - X_n)$. Or $(T \geq n+1) = (T \leq n)^c \in \mathcal{B}_n$ d'où le résultat en conditionnant par $\mathcal{B}_n$. ■

Théorème 8 (d'arrêt borné) *Soit $(X_n)_n$ une martingale (resp. surmartingale , sous-martingale), $S \leq T$ deux temps d'arrêts* bornés. *Alors*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_S} X_T = X_S \ (resp. \leq X_S,\ resp. \geq X_S) \tag{3.1}$$

Preuve. On suppose que $S \leq T \leq k$. Dans le cas où S et T sont constants, le résultat a déjà été prouvé dans la proposition 7. Supposons maintenant que $T = n$ est constant. Montrons

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_S} X_n = X_S \tag{3.2}$$

Tout d'abord, X_S est bien $\mathcal{B}_S$-mesurable, d'après la proposition 5. Ensuite, soit $B \in \mathcal{B}_S$, comme $S \leq T = n$ on a

$$\int_B X_S \, d\mathbb{P} = \int_B \sum_{m \leq n} 1_{(S=m)} X_m \, d\mathbb{P}$$

$$\int_B \sum_{m \leq n} 1_{(S=m)} X_m \, d\mathbb{P} = \int \sum_{m \leq n} 1_{B \cap (S=m)} X_m \, d\mathbb{P}$$

Utilisons que $X_m = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_m} X_n$

$$\int \sum_{m \leq n} 1_{B \cap (S=m)} X_m \, d\mathbb{P} = \sum_{m \leq n} \int 1_{B \cap (S=m)} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_m} X_n \, d\mathbb{P}$$

Or $B \cap (S = m) \in \mathcal{B}_m$ donc

$$\sum_{m \leq n} \int 1_{B \cap (S=m)} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_m} X_n \, d\mathbb{P} = \sum_{m \leq n} \int 1_{B \cap (S=m)} X_n \, d\mathbb{P}$$

$$\sum_{m \leq n} \int 1_{B \cap (S=m)} X_n \, d\mathbb{P} = \int_B (\sum_{m \leq n} 1_{(S=m)}) X_n \, d\mathbb{P}$$

$$\int_B (\sum_{m \leq n} 1_{(S=m)}) X_n \, d\mathbb{P} = \int_B X_n \, d\mathbb{P}$$

ce qui établit (3.2). Montrons maintenant le théorème dans le cas le plus général. Pour cela considérons le processus arrêté $X'_n = X_{n \wedge T}$, c'est encore une martingale, d'après le théorème précédent. Comme $S \leq k$, nous pouvons appliquer la relation (3.2) au processus (X'_n) à l'instant $n = k$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_S} X'_k = X'_S$$

Or $X'_k = X_{k \wedge T} = X_T$ et $X'_S = X_{S \wedge T} = X_S$ d'où le résultat. ■

En prenant l'espérance dans (3.1) et $S = 0$.

Corollaire 1 *Soit $(X_n)_n$ une martingale (resp. surmartingale , sous-martingale), et T un temps d'arrêt borné alors*

$$\mathbb{E} X_T = \mathbb{E} X_0 \quad (resp. \leq, \geq)$$

Remarque. Si les temps d'arrêts ne sont pas bornés, le résultat est faux. Voici un contre-exemple. Considérons à nouveau le jeu de pile ou face, qui est une martingale d'après l'exemple précédent. Notons $S_n = \sum_k X_k$ et $T = \inf \{n; S_n \geq 1\}$. On peut démontrer (cf exercice) que $T < \infty$ p.s.. Alors il est clair que $X_T \equiv 1$. Supposons la fortune initiale nulle $X_0 = 0$. Appliquons le corollaire,

$$\mathbb{E} X_T = \mathbb{E} X_0$$

Or $X_0 \equiv 0$ et $X_T \equiv 1$ d'où la contradiction. Ici T n'est pas borné, bien que fini p.s. ! Ce phénomène est bien connu des joueurs, un jour ou l'autre on finit par gagner, mais l'attente peut-être très, très longue ... On peut démontrer (cf exercice) que $\mathbb{E}T = +\infty$ □

3.3 Convergence presque sûre

Nous commençons par traiter le cas des surmartingales positives. Une surmartingale décroît en moyenne conditionnelle. Nous allons exploiter à fond cette propriété, conjointement à la positivité.

3.3.1 Le cas des surmartingales positives

Le corollaire du théorème d'arrêt, dans le cas des surmartingales positives seulement, s'étend aux temps d'arrêt quelconques.

Théorème 9 (théorème d'arrêt fini) *Soit une surmartingale positive* $(X_n)_n$*, et* T *un temps d'arrêt* quelconque*, alors*

$$\mathbb{E}X_T 1_{(T<\infty)} \leq \mathbb{E}X_0$$

Preuve. On a

$$X_T 1_{(T<\infty)} = \lim_k X_{T\wedge k} 1_{(T<\infty)}$$

Donc le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}X_T 1_{(T<\infty)} \leq \liminf \mathbb{E}X_{T\wedge k} 1_{(T<\infty)}$$

D'autre part le théorème d'arrêt appliqué au temps d'arrêt $T \wedge k$ donne

$$\mathbb{E}X_{T\wedge k} \leq \mathbb{E}X_0$$

Comme $\mathbb{E}X_{T\wedge k} 1_{(T<\infty)} \leq \mathbb{E}X_{T\wedge k}$, a fortiori $\mathbb{E}X_{T\wedge k} 1_{(T<\infty)} \leq \mathbb{E}X_0$, d'où l'on tire

$$\mathbb{E}X_T 1_{(T<\infty)} \leq \mathbb{E}X_0$$

■

Corollaire 2 *Soit une surmartingale positive* $(X_n)_n$*,* S *et* T *deux temps d'arrêt* quelconques*, vérifiant* $S \leq T$ *alors*

$$\mathbb{E}X_T 1_{(T<\infty)} \leq \mathbb{E}X_S 1_{(S<\infty)}$$

Preuve. On effectue une translation de l'origine des temps, i.e. on considère

$$Y_n = X_{S+n} 1_{(S<\infty)}$$

On vérifie aisément que le processus $(Y_n)_n$ est une $\mathcal{B}_{S+n}$-surmartingale. Soit

$$\tau = \begin{cases} T-S & sur \quad (T<\infty) \\ +\infty & sur \quad (T=\infty) \end{cases}$$

On vérifie aisément que τ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{B}_{S+n})_n$ Le théorème précédent appliqué à $(Y_n)_n$ et τ donne

$$\mathbb{E}Y_\tau 1_{(\tau<\infty)} \leq \mathbb{E}Y_0$$

or $Y_\tau 1_{(\tau<\infty)} = X_T 1_{(T<\infty)}$ et $Y_0 = X_S 1_{(S<\infty)}$ d'où le résultat ■

Moralement, une surmartingale tend à décroître en moyenne. Il semble naturel qu'elle soit bornée supérieurement. Plus précisément, on a le théorème.

Proposition 8 (inégalité maximale) *Soit $(X_n)_n$ une surmartingale positive et $a > 0$, alors*

$$a\mathbb{P}(\sup_n X_n > a) \leq \mathbb{E}\min(X_0, a)$$

De plus si X_0 est finie p.s. alors la v.a. $X^\star = \sup_n X_n$ est finie p.s.

Preuve. Soit $T_a = \inf\{n \geq 0;\ X_n > a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Soit

$$Y_n = \begin{cases} X_n(\omega) & si \quad n < T(\omega) \\ a & si \quad n \geq T(\omega) \end{cases}$$

Montrons que $(Y_n)_n$ est une surmartingale. On peut exprimer

$$Y_n = 1_{(T_a>n)}X_n + 1_{(T_a \leq n)}a$$

donc $(Y_n)_n$ est adaptée. D'autre part

$$Y_{n+1} = 1_{(T_a>n+1)}X_{n+1} + 1_{(T_a \leq n+1)}a$$

Comme sur $(T_a = n+1)$, $X_{n+1} > a$, on peut majorer

$$Y_{n+1} \leq 1_{(T_a \geq n+1)}X_{n+1} + 1_{(T_a \leq n)}a$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}Y_{n+1} \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(1_{(T_a \geq n+1)}X_{n+1} + 1_{(T_a \leq n)}a)$$

Les propriétés de l'espérance conditionnelle et le fait que T_a est un temps d'arrêt donnent alors

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}Y_{n+1} = 1_{(T_a \geq n+1)}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}X_{n+1} + a1_{(T_a \leq n)}$$

Comme $(X_n)_n$ est une surmartingale on a

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}Y_{n+1} \leq 1_{(T_a>n)}X_n + a1_{(T_a \leq n)} = Y_n$$

Utilisons le fait que Y_n est une surmartingale et appliquons le corollaire du théorème d'arrêt au temps d'arrêt borné $T_a \wedge n$

$$\mathbb{E}Y_{n \wedge T_a} \leq \mathbb{E}Y_0$$

Or $Y_{n\wedge T_a} = X_n 1_{(T_a>n)} + a1_{(T_a \leq n)}$ donc $\mathbb{E}Y_{n\wedge T_a} \geq a\mathbb{P}(T_a \leq n)$. De plus l'évènement

$$(T_a \leq n) = (\sup_{k \leq n} X_k > a)$$

donc

$$a\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k > a) \leq \mathbb{E}min(X_0, a)$$

en faisant tendre $n \to \infty$ on obtient l'inégalité annoncée. Montrons que $\sup_k X_k$ est finie p.s.

$$\mathbb{P}(\sup_k X_k > a) \leq \mathbb{E}min(X_0/a, 1)$$

Faisons tendre $a \to \infty$. La v.a. X_0 est finie donc $X_0/a \to 0$ Donc par le théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}min(X_0/a, 1) \to 0$ donc

$$\mathbb{P}(\sup_k X_k = \infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\sup_k X_k > N) = 0$$

ainsi $\sup_k X_k$ est p.s. finie ■

Remarque. La démonstration précédente est instructive, cependant on peut donner une démonstration plus courte en appliquant le théorème d'arrêt fini à la surmartingale $Y_n := X_n \wedge a$ et $T = \inf \{n \geq 0;\ X_n > a\}$. □

Non seulement les surmartingales positives sont bornées p.s. mais le théorème fondamental affirme que les surmartingales positives convergent p.s. La démonstration est subtile mais est basée sur une idée simple : bien qu'une surmartingale ne soit pas décroissante p.s., mais seulement en moyenne, ses "montées" à répétition sont très peu probables.

Théorème 10 *Toute surmartingale positive $(X_n)_n$ converge presque sûrement. De plus la limite $X_\infty = \lim X_n$ satisfait les inégalités*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty \leq X_n$$

Preuve. Elle repose sur le lemme suivant

Lemma 3 (des montées) *Soit $0 < a < b$. La probabilité que X_n remonte au moins k fois d'une valeur inférieure à a à une valeur supérieure à b est moindre que $(a/b)^k$*

Définissons par récurrence la suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_n$.

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = \min\{n \geq \tau_0,\ X_n < a\}, \quad \tau_2 = \min\{n \geq \tau_1,\ X_n > b\}$$

$$\tau_{2k-1} = \min\{n \geq \tau_{2k-2},\ X_n < a\}, \quad \tau_{2k} = \min\{n \geq \tau_{2k-1},\ X_n > b\}, \ \ldots$$

L'évènement "X_n remonte au moins k fois d'une valeur inférieure à a à une valeur supérieure à b" est précisément $(\tau_{2k} < \infty)$. Utilisons le corollaire du théorème d'arrêt généralisé.

$$\mathbb{E}X_{\tau_{2k}} 1_{(\tau_{2k}<\infty)} \leq \mathbb{E}X_{\tau_{2k-1}} 1_{(\tau_{2k-1}<\infty)}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$X_{\tau_{2k}} 1_{(\tau_{2k}<\infty)} \geq b 1_{(\tau_{2k}<\infty)}$$

et que

$$X_{\tau_{2k-1}} 1_{(\tau_{2k-1}<\infty)} \leq a 1_{(\tau_{2k-1}<\infty)}$$

pour obtenir

$$b\mathbb{P}(\tau_{2k} < \infty) \leq a\mathbb{P}(\tau_{2k-1} < \infty)$$

or $(\tau_{2k-1} < \infty) \subset (\tau_{2k-2} < \infty)$ donc $b\mathbb{P}(\tau_{2k} < \infty) \leq a\mathbb{P}(\tau_{2k-2} < \infty)$ et par récurrence

$$\mathbb{P}(\tau_{2k} < \infty) \leq (a/b)^k$$

■

Considérons maintenant l'évènement $\bigcap_k (\tau_{2k} < \infty)$, comme il s'agit d'une intersection *décroissante*, on peut affirmer que

$$\mathbb{P}(\bigcap_k (\tau_{2k} < \infty)) = \lim_k (a/b)^k = 0$$

D'autre part

$$\bigcap_k (\tau_{2k} < \infty) = (\limsup X_n \geq b > a \geq \liminf X_n)$$

En effet l'évènement est réalisé ssi la suite traverse une infinité de fois la bande $[a, b]$. Enfin l'évènement

$$(\limsup X_n > \liminf X_n) = \bigcup_{(a,b)\in\mathbb{Q}^2 : a<b} (\limsup X_n \geq b > a \geq \liminf X_n)$$

est négligeable donc la suite converge p.s. vers une variable aléatoire positive, éventuellement infinie, notée X_∞. $(X_n)_n$ étant une surmartingale, on peut écrire

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+p} \leq X_n$$

Faisons tendre $p \to \infty$, le lemme de Fatou généralisé aux espérances conditionnelles (exercice !) donne

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+p} \leq X_n$$

■

Remarque. D'après l'inégalité maximale, X_∞ est finie p.s. si $X_0 < \infty$ p.s. On déduit de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty \leq X_n$ que $X_\infty < \infty$ p.s. hors de $\bigcap_n (X_n = +\infty)$. En effet X_∞ est intégrable sur chacun des évènements $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty \leq N)$ donc est finie p.s. sur leur réunion $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty < \infty)$, enfin $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty < \infty) \subset \bigcup_n (X_n < \infty)$ □

3.3.2 Le cas des sous-martingales bornées dans L^1.

Le théorème de convergence s'applique évidemment aux martingales *positives*, ainsi qu'aux sous-martingales négatives. Mais pour s'affranchir de l'hypothèse de signe, il faut supposer la (sous-)martingale bornée dans L^1. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 11 *Toute sous-martingale intégrable $(X_n)_n$ telle que*

$$\sup_n \mathbb{E} X_n^+ < \infty$$

converge presque sûrement. De plus la limite $X_\infty = \lim X_n \ \in L^1$

Preuve. Comme (X_n) est une sous-martingale intégrable, la suite (X_n^+) est une sous-martingale intégrable. En effet, on a $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1}^+ \geq 0$ et

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1}^+ \geq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1} \geq X_n$$

donc

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{n+1}^+ \geq X_n^+$$

Mais alors, pour n fixé la suite $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+)_{p \geq n}$ est croissante. En effet,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_{p+1}^+ = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_p} X_{p+1}^+ \geq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+$$

Posons alors

$$M_n = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+$$

et montrons que cette suite de v.a. positives est une martingale intégrable, donc finie p.s. Tout d'abord, M_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable par construction. D'autre part,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} M_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n+1}} X_p^+$$

En appliquant le théorème de convergence monotone des espérances conditionnelles,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} M_{n+1} = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n+1}} X_p^+$$

Or $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n+1}} X_p^+ = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+$ donc

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} M_{n+1} = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+ = M_n$$

Enfin, par hypothèse

$$\sup_n \mathbb{E} X_n^+ < \infty$$

Donc, par le théorème de convergence monotone,

$$\mathbb{E} M_n = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+ = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E} X_p^+ < \infty$$

Considérons alors la différence $Y_n = M_n - X_n$. Elle définit une surmartingale positive et intégrable. En effet, $M_n = \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p^+ \geq X_n^+$ donc $Y_n \geq 0$. De plus, M_n et X_n sont intégrable et $\mathcal{B}_n$-mesurable donc Y_n aussi. Enfin M_n et $-X_n$ sont des surmartingales donc leur somme aussi.
Le théorème de convergence p.s. des surmartingales positives permet de définir $M_\infty = \lim_n M_n$ et $Y_\infty = \lim_n Y_n$. Ces v.a. sont positives et aussi intégrables, car $\mathbb{E} M_\infty \leq \mathbb{E} M_0$ et $\mathbb{E} Y_\infty \leq \mathbb{E} Y_0$. Elles sont donc *finies* p.s. et leur différence $M_\infty - Y_\infty$ a un un sens donc $\lim_n X_n = M_\infty - Y_\infty$ ■

Remarque. Pour une sous-martingale intégrable, la condition

$$\sup_n \mathbb{E} X_n^+ < \infty$$

est équivalente à la condition

$$\sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty$$

En effet $|X_n| + X_n = 2X_n^+$ et $\mathbb{E}X_n \geq \mathbb{E}X_0$ $\square$

Remarque. La démonstration précédente s'appuie sur la décomposition $X_n = M_n - Y_n$ d'une sous-martingale intégrable comme différence d'une martingale positive intégrable et d'une surmartingale positive intégrable. Cette décomposition est appelée *décomposition de Krickeberg.* $\square$

Remarque. La limite X_∞ ne satisfait pas forcément les inégalités

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty = X_n \quad (resp. \geq)$$

En particulier, pour une martingale bornée dans L^1 on n'a pas forcément $\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_n$ et la suite ne converge pas nécessairement dans L^1. Pour cela, il faut des conditions plus restrictives, qui font l'objet de la section suivante. $\square$

3.4 Martingales uniformément intégrables

3.4.1 Uniforme intégrabilité et convergence dans L^1

La notion d'uniforme intégrabilité est une notion de théorie de la mesure.

Définition 7 *Une famille de fonctions mesurables $\{f_j\}$ est uniformément intégrable pour une mesure bornée μ si*

$$\int_{(|f_j|>M)} |f_j| d\mu \to 0 \quad \text{quand } M \to +\infty$$

uniformément par rapport à j.

Remarque. Certains auteurs parlent d'équi-intégrabilité ou de suite tendue. $\square$

Le théorème suivant généralise le théorème de convergence dominée.

Théorème 12 (Vitali) *Soit une suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f. Alors la suite converge dans L^1 ssi la suite est uniformément intégrable. Dans ce cas f est intégrable et la suite converge vers f dans L^1.*

Remarque. si la suite est dominée par une fonction intégrable, i.e.

$$\sup_j |f_j| \leq g \in L^1$$

alors la suite est trivialement uniformément intégrable. Le théorème de Vitali généralise donc bien le théorème de Lebesgue. $\square$

Une condition suffisante d'uniforme intégrabilité est la suivante

Théorème 13 (La Vallée-Poussin) *Soit ψ une fonction positive coercive i.e. telle que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty$$

Si

$$\sup_j \int \psi(|f_j|) d\mathbb{P} < \infty$$

alors la famille $\{f_j\}$ est uniformément intégrable

Corollaire 3 *Une suite bornée dans L^p avec $p > 1$ est uniformément intégrable*

Preuve. Il suffit de prendre $\psi(x) = |x|^p$ ∎

3.4.2 Martingales régulières

Commençons par montrer la

Proposition 9 *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'ensemble $\left\{\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X, \quad \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\right\}$ est uniformément intégrable.*

Preuve. Tout d'abord, nous avons $|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|$ donc

$$\int_{(|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X|>a)} |\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X| d\mathbb{P} \leq \int_{(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|>a)} \mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X| d\mathbb{P} = \int_{(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|>a)} |X| d\mathbb{P}$$

car $(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X| > a)$ est $\mathcal{B}$-mesurable. Partitionnons Ω en $(|X| > b)$ et $(|X| \leq b)$

$$\int_{(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|>a)} |X| d\mathbb{P} \leq b\mathbb{P}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X| > a) + \int_{(|X|>b)} |X| d\mathbb{P}$$

D'autre part

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X| > a) \leq a^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}|X|) = a^{-1}\mathbb{E}|X|$$

En rassemblant les inégalités précédentes, on obtient

$$\sup_{\mathcal{B}} \int_{(|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X|>a)} |\mathbb{E}^{\mathcal{B}}X| d\mathbb{P} \leq \frac{b}{a}\mathbb{E}|X| + \int_{(|X|>b)} |X| d\mathbb{P}$$

Il suffit alors de choisir $b = \sqrt{a}$ et de faire tendre $a \to \infty$. ∎

Nous avons vu que même pour une martingale positive bornée dans L^1 la convergence presque sûre n'entraîne pas la convergence dans L^1. Le théorème suivant précise les conditions pour lesquelles une martingale converge dans L^1

Théorème 14 *Soit $(X_n)_n$ une martingale intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) La suite $(X_n)_n$ converge dans L^1

(ii) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ et $X_\infty = p.s. \lim_n X_n$ vérifie pour tout n

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty = X_n$$

(iii) Il existe une v.a. intégrable X telle que pour tout n

$$X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X$$

(iv) La suite $(X_n)_n$ satisfait la condition d'uniforme intégrabilité

$$\sup_n \int_{(|X_n|>a)} |X_n| d\mathbb{P} \to 0 \quad \text{quand } a \to +\infty$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) : La convergence de X_n dans L^1 entraîne que la suite $(X_n)_n$ est bornée dans L^1 donc, d'après la section précédente, $(X_n)_n$ converge p.s. vers une v.a. X_∞. Soit $X = L^1 - \lim X_n$. D'après le lemme de Fatou,

$$\int |X_\infty - X| = \int \liminf |X_n - X| \leq \liminf \int |X_n - X| = 0$$

donc $X = X_\infty$ *p.s.* Maintenant fixons n, pour $p \geq n$ on a

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p = X_n$$

Or pour $p \to \infty$, par L^1-continuité de l'opérateur espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_p \to \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty$$

Donc

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X_\infty = X_n$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : C'est clair car par le lemme de Fatou X_∞ est intégrable

$$\mathbb{E}|X_\infty| \leq \liminf \mathbb{E}|X_n| \leq \sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Il suffit d'appliquer la proposition 9
(iv) $\Rightarrow$ (i) : Commençons par prouver la convergence presque sûre de X_n. La condition d'uniforme intégrabilité donne

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| \leq a + \sup_n \int_{(|X_n|>a)} |X_n| d\mathbb{P} < \infty$$

Donc la martingale est bornée dans L^1. Elle converge donc p.s. Le théorème de Vitali fournit alors la convergence dans L^1 ∎

Remarque. Attention, si (iii) est vérifié, on a $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n} X$, mais a priori $X \neq X_\infty$. On montre cependant que $X_\infty = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_\infty} X$ □

En appliquant le corollaire 3, on obtient immédiatemment.

Corollaire 4 *Soit une martingale bornée dans L^p, avec $p > 1$. Alors elle converge p.s. et dans L^1 vers la même limite. De plus la convergence a également lieu dans L^p.*

Preuve. La seule chose a montrer est la convergence dans L^p. Tout d'abord, par le lemme de Fatou $\int |X_\infty|^p \leq \liminf_n |X_n|^p < \infty$ donc $X_\infty \in L^p$. Le reste de la preuve est laissée en exercice. ∎

Terminons ce cours par le théorème suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Théorème 15 (d'arrêt régulier) *Soit $(X_n)_n$ une martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) uniformément intégrable, $S \leq T$ deux temps d'arrêts* quelconques, *Alors*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_S} X_T = X_S \ (resp. \leq X_S,\ resp. \geq X_S) \tag{3.3}$$

3.5 Exercices et problèmes.

1. **Somme et inf de surmartingales** Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ des surmartingales, montrer que $X_n + Y_n$ et $X_n \wedge Y_n$ aussi. En déduire que si $(X_n)_n$ est une martingale alors X_n^+ et X_n^- sont des sous-martingales positives.
2. **Fonction convexe de martingale.** Soit $(X_n)_n$ une martingale, et φ une fonction convexe telle que $\forall n,\ \varphi(X_n) \in L^1$. Montrer que $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale. En déduire que $|X_n|$ et X_n^2 sont des sous-martingales positives.
3. **Réciproque du théorème d'arrêt** Soit $(X_n)_n$ un processus intégrable et adapté à une filtration. Montrer que (X_n) est une martingale ssi pour tout temps d'arrêt borné T on a
$$EX_T = EX_0$$
4. **Surmartingale conservative = martingale.** Soit $(X_n)_n$ une $\mathcal{F}_n$-surmartingale telle que
$$\forall n,\ EX_n = EX_0$$
Montrer que $(X_n)_n$ une $\mathcal{F}_n$-martingale.
5. **Compensateur d'une sous-martingale** Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration, on dit qu'un processus $(A_n)_n$ est prévisible si $\forall n,\ A_{n+1}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et A_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable. On dit que $(A_n)_n$ est croissant si $\forall n,\ A_n \le A_{n+1}$. Montrer que toute sous-martinagle $(X_n)_n$ se décompose de façon unique
$$X_n = M_n + A_n$$
où $(M_n)_n$ est une martingale et $(A_n)_n$ un processus prévisible croissant de terme initial $A_0 = 0$. $(A_n)_n$ est appelé le compensateur de la sous-martingale (X_n) et cette décomposition est appelée décomposition de Doob. Dans le cas particulier où (X_n) est le carré d'une martingale (Y_n) (Cf ex 2), le compensateur de (Y_n^2) est noté $< Y_n >$.
6. **Martingales exponentielles** Soit $(Y_n)_{n\ge 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots Y_n)$ et $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Soit $Z_n^u = \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2)$. Montrer que $(Z_n^u)_n$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
7. **Martingales de carrés intégrable.** Soit $(M_n)_n$ une martingale telle que $\forall n,\ M_n \in L^2$. Montrer que
$$E(M_{n+p} - M_n)^2 = E(M_{n+p}^2 - M_n^2) \tag{3.4}$$
On suppose en outre que $\sup_n E(M_n^2) < \infty$. Montrer, simplement à l'aide de (3.4) que $(M_n^2)_n$ est une sous-martingale et que la suite $(EM_n^2)_n$ est croissante. Soit $m^* = \lim_n E(M_n^2)$. Montrer que la suite $(M_n)_n$ est convergente dans L^2.
8. **Loi du 0-1 de Kolmogorov.** Soit $(Y_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes. On définit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots Y_n)$, $\mathcal{F}^n = \sigma(Y_n, Y_{n+1} \dots)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$, et la tribu de queue $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_n \mathcal{F}^n$ Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer que $P(A) = 0$ *ou* 1. *indication* : considérer $Z_n = E^{\mathcal{F}_n} 1_A$.
En déduire que si X est une v.a. $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, elle est constante p.s.

9. **Martingales exponentielles (suite).** Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots Y_n)$ et $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Soit $Z_n^u = \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2)$. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_n$ converge p.s. vers une variable Z_∞^u finie. Que vaut cette limite ? Pour quelles valeurs de u, Z_n^u est -elle une martingale régulière ?
10. **Un jour ou l'autre** Considérer le jeu de pile ou face, i.e. une suite de v.a. $(X_n)_n$ indépendantes de même loi $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$. Soit a un entier positif. Noter $S_n = \sum_{k\leq n} X_k$ et $T = \inf\{n; S_n \geq a\}$. Supposer la fortune initiale nulle $X_0 = 0$.
    Le but du problème est de montrer que $T < \infty$ p.s
    Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$ et
    $$Z_n^\theta = \frac{\exp \theta S_n}{\cosh \theta^n}$$
    (a) Montrer que Z_n^θ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
    (b) Montrer que, pour tout $\theta \geq 0$, $Z_{n\wedge T}^\theta$ converge p.s. et dans L^2 vers la v.a.
    $$W_\theta = \frac{\exp \theta a}{(\cosh \theta)^T} 1_{T<\infty}$$
    (c) En déduire que $P(T < \infty) = 1$
    (d) En déduire que, pour tout θ positif
    $$E(\cosh \theta)^{-T} = \exp -\theta a$$
11. Soit une suite de v.a. $(X_n)_n$ indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m < 0$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k\leq n} X_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$ et $W = \sup_n S_n$. Le but du problème est d'étudier W.
    (a) Montrer que $P(W < \infty) = 1$
    (b) Calculer $E^{\mathcal{F}_n}(e^{\lambda S_{n+1}})$
    (c) Montrer qu'il existe un λ_0 tel que $e^{\lambda_0 S_n}$ soit une martingale
    (d) Montrer que pour tout $a > 1$
    $$P(e^{\lambda_0 W} > a) \leq 1/a$$
    et que $P(W > t) \leq e^{-\lambda_0 t}$
    (e) En déduire que pour tout $\lambda < \lambda_0$, $E(e^{\lambda W}) < \infty$ et qu'en particulier W a des moments de tous ordres.
12. **Marche aléatoire et temps d'arrêt.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une sous-martingale et T un temps d'arrêt adaptés à une filtration $(\mathcal{B}_n)_n$ tel que $T \geq 1$ et $ET < \infty$.
    (a) Montrer que $X_T = X_1 + \sum_{n\geq 1}(X_{n+1} - X_n) \cdot 1_{(T\geq n+1)}$
    (b) Montrer que $E^{\mathcal{B}_n}[(X_{n+1} - X_n) \cdot 1_{(T\geq n+1)}] \geq 0$
    (c) En déduire que $E(X_T|X_1) \geq X_1$ puis que $EX_T \geq EX_1$
    (d) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi d'espérance finie. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $Y_n = S_n - nEX_1$ est une martingale.

(e) Soit $T \geq 1$ un temps d'arrêt adapté à la suite $(Y_n)_n$ tel que $ET < \infty$. Montrer que $ES_T = ET \cdot EX_1$

(f) On suppose que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$ et on prend $T = \inf\{n \geq 1 | \ S_n > 0\}$. Montrer par l'absurde que $ET = +\infty$

13. **Loi du log-itéré.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi telle que $EX_1 = 0$ et $EX_1^2 = 1$. On suppose de plus que $\psi(\lambda) = E(e^{\lambda X_1}) < \infty$, $\forall \lambda$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Pour tout $t > 1$, on définit $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln t}$

(a) Montrer que $Y_n = e^{\lambda S_n}/\psi(\lambda)^n$ est une martingale

(b) Montrer en utilisant l'inégalité maximale que $\forall a > 0$ et pour tout $\forall \lambda$

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} (S_n > a + n\frac{\ln \psi(\lambda)}{\lambda}\right) \leq e^{-\lambda a}$$

(c) Soit $t > 1$ et $\alpha > 1$. Pour $k \geq 1$, on pose

$$a_k = \frac{\alpha}{2} h(t^k), \quad \lambda_k = \frac{h(t^k)}{t^k}, \quad c_k = \frac{\alpha}{2} + t\frac{\ln \psi(\lambda_k)}{\lambda_k^2}.$$

Démontrer que

$$P\left(\bigcup_{t^k < n \leq t^{k+1}} (S_n > h(n)c_k)\right) \leq (k \ln t)^{-\alpha}$$

(d) Montrer que p.s. ω, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad \forall n \in]t^k, t^{k+1}], \ \frac{S_n(\omega)}{h(n)} \leq c_k$$

On utilisera pour cela le *lemme de Borel-Cantelli* :
Soit $(A_k)_k$ une suite d'évènements tels que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Alors $P(\bigcap_N \bigcup_{k\geq N} A_k) = 0$ autrement dit $P(\bigcup_N \bigcap_{k\geq N} A_k^c) = 1$, c'est-à-dire que p.s. ω appartient à tous les A_k^c à partir d'un certain rang.

(e) En *admettant* que $\psi(\lambda) = 1 + \lambda^2/2 + o(\lambda^2)$, démontrer que

$$c_k = \frac{\alpha + t}{2} + \epsilon(k),$$

avec $\lim_{k\to\infty} \epsilon(k) = 0$

(f) En déduire que presque-sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n \ln \ln n}} \leq 1$$

(g) En utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme de Lebesgue, prouver que $\psi(\lambda) = 1 + \lambda^2/2 + o(\lambda^2)$.

14. **Ensemble de convergence d'une martingale.**

(a) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale telle que $E\sup_{n\geq 0}(X_{n+1}-X_n)^+ < +\infty$, avec $X_0 = 0$. Soit un réel $a > 0$ et $T = \inf\{n \geq 0, \quad X_n \geq a\}$ (avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$). Montrer que sur $(T = n)$ on a : $X_n \leq a + (X_n - X_{n-1})^+$

(b) En déduire que $E|X_{T\wedge n}|$ est bornée.

(c) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus aléatoire quelconque. On pose $F = (\limsup_n X_n < +\infty)$ et $F_a = (\sup_n X_n < a)$. Montrer que $F = \bigcup_{a>0} F_a$.

(d) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $E\sup_{n\geq 0}|X_{n+1}-X_n|^+ < +\infty$, avec $X_0 = 0$. Soit $a > 0$.

i. Montrer que p.s. si $\omega \in F_a$ alors la suite $(X_n(\omega))$ converge vers une limite finie.

ii. En déduire que, p.s. ω, ou bien la suite $(X_n(\omega))$ converge vers une limite finie, ou bien elle oscille indéfiniment entre $-\infty$ et $+\infty$. *On pourra noter* $A_1 = \{\omega \in \Omega, \quad \lim_n X_n(\omega) \text{ existe et est finie.}\}$, $A_2 = \{\omega \in \Omega, \quad \limsup X_n(\omega) = +\infty \text{ et } \liminf X_n(\omega) = -\infty\}$.

15. **Quelques inégalités de Doob.**

(a) Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale positive associée à une filtration $(\mathcal{B}_n)_n$ et T un temps d'arrêt. Montrer que, sur $(T \leq n)$ on a $X_T \leq E^{\mathcal{B}_T} X_n$.

(b) Soit $T_a = \inf\{n \geq 0, \ X_n > a\}$. Démontrer que

$$aP(\sup_{k\leq n} X_k > a) \leq \int_{(\sup_{k\leq n} X_k > a)} X_n \, dP. \tag{3.5}$$

Pour cela, utiliser que $(T_a \leq n) = (\sup_{k\leq n} X_k > a)$

(c) Soit $p \geq 1$ et Z une v.a. positive, montrer que

$$E(Z^p) = \int_0^{+\infty} pa^{p-1} P(Z > a) \, da. \tag{3.6}$$

On pourra remarquer que $P(Z > a) = E1_{(a<Z)}$ *et utiliser le théorème de Fubini.*

(d) Soit $(X_n)_n$ une martingale intégrable.

i. Montrer que $|X_n|$ est une sous-martingale positive.

ii. On pose $S_n = \sup_{k\leq n} |X_k|$. Soit $p > 1$. Montrer à l'aide des inégalités (3.6), (3.5) et du théorème de Fubini que

$$E(S_n^p) \leq \frac{p}{p-1} E(|X_n| S_n^{p-1})$$

iii. A l'aide de l'inégalité de Hölder, en déduire que

$$E(S_n^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} E(|X_n|^p)^{1/p}.$$

iv. On suppose que $\sup_n E(|X_n|^p) < +\infty$. Prouver que

$$|| \sup_n |X_n| ||_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \sup_n ||X_n||_{L^p}.$$

16. **Une preuve de la loi forte des grands nombres.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $X_0 = 0$ et

$$M = \sup_{n\geq 0} E(X_{n+1} - X_n)^2 < +\infty.$$

(a) Montrer que $EX_n^2 = \sum_{1\leq k\leq n} E(X_n - X_{n-1})^2$

(b) En déduire que $EX_n^2 \leq M \cdot n$, puis que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0.$$

(c) Soit $Y_n = \sum_{1\leq k\leq n}(X_k - X_{k-1})/k$. Montrer que Y_n est une martingale.

(d) Montrer que Y_n est bornée dans L^2.

(e) En déduire que Y_n converge p.s.

(f) On *admettra* le lemme suivant : Soit une suite de nombre réels $(x_n)_n$ telle que la série $\sum_k (x_k - x_{k-1})/k$ est convergente. Alors la suite x_n/n tend vers 0. En déduire que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0.$$

(g) Retrouver la loi forte des grands nombres suivante : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. appartenant à L^2, indépendantes, de même espérance μ. Alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mu$$

Bibliographie

[1] Encyclopédie Universalis,“Martingales”, article de P. Crépel, J. Memin et A. Raugi

[2] P. Deheuvels, La probabilité, le hasard, la certitude, coll. Que-sais-je, PUF, 1990

[3] W. Feller, An introduction to probability theory, vol. I et II, Wiley, 1966

[4] J. Neveu, Martingales à temps discret, Masson, 1972

[5] N. Bouleau, Processus stochastiques et applications, Hermann, 1988

[6] D. Revuz, Probabilités, Hermann, 1997

[7] L. Breiman, Probability, Addison-Wesley, 1968

[8] B. Oksendal, Stochastic differential equations, Springer,1998

[9] L. Mazliak, P. Priouret, P. Baldi, Martingales et chaînes de Markov, Hermann, 1998