Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Analyse numérique/*Numerical Analysis*)

Analyse et approximation du problème de Stokes dans un bassin peu profond

Pascal AZÉRAD

Résumé – Pour les écoulements géophysiques, la faible profondeur du domaine devant son étendue conduit à un modèle asymptotique, basé sur l'hypothèse hydrostatique. Bien que les équations possèdent un caractère dégénéré, nous prouvons que le problème est bien posé, à l'aide d'un principe variationnel de point-selle en prenant deux multiplicateurs de Lagrange : la pression et la vitesse verticale. Nous proposons une discrétisation par éléments finis mixtes stable.

Analysis and approximation of the Stokes problem in a thin domain

Abstract – *In geophysical fluid dynamics where the depth of the domain is much smaller than its horizontal dimension an asymptotic model, based on the hydrostatic hypothesis, is in current use. Though the resulting equations degenerate in some way, we prove that the problem is well posed, by using a mixed variational principle with two Lagrange multipliers, namely the pressure and the vertical velocity. We give a stable mixed finite element discretization.*

Abridged English Version – First we write the hydrostatic Stokes problem (1.1)-(1.6) in the integrated and tractable form:

Given $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathrm{H}'$, find $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in \mathrm{H}$ such that

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v = (v_1, v_2, v_3, q) \in \mathrm{H} \tag{2}$$

where $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0(\partial_3, \Omega) \times \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ is equipped with the norm

$$\|u\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2 + \|\partial_3 u_3\|_0^2 + \|p\|_0^2.$$

Then we apply theorem 1, an extended Lax-Milgram theorem (*see* [8]) well suited to mixed method (*see* [1]) stating that (2) is well posed if and only if a is weakly coercive or, as we prefer to say, *persuasive* (*see* definition 1):

$$\exists \mathrm{C} > 0, \quad \sup_{v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \geqq \mathrm{C}\,\|u\|.$$

We remark (*see* theorem 3) that $u = (u_1, u_2, u_3, p)$ is solution of a saddle point problem, p (resp. u_3) being the Lagrange multipliers of the constraints $\operatorname{div} u = 0$ (resp. $\partial p/\partial x_3 = 0$).

We show that a is persuasive, first in the continuous case (*see* theorem 4), then in the discrete one (*see* theorem 5). In both cases the proof relies upon:

– Brezzi inequality (*see* [5]): $\sup_{v_h \in \mathrm{V}_h - \{0\}} (p_h, \operatorname{div} v_h)/\|v_h\|_1 \geqq \mathrm{C}\|p_h\|_0$;

– "hydrostatic" inequality: $\sup_{q_h \in \mathrm{P}_h - \{0\}} (\partial_3 u_{3h}, q_h)/\|q_h\|_0 \geqq \mathrm{C}\|\partial_3 u_{3h}\|_0$.

To ensure them (*see* theorem 6) in the discrete case we design an "hydrostatic" finite element (see *fig.* 1) for which the hydrostatic inequality is built-in (*see* proposition 1). As for Brezzi's, we make use of Rolf Stenberg [11] powerful macro-element technique (*see* proposition 2).

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

0764-4442/94/03180053 \$ 2.00 © Académie des Sciences

Finally, a classical result (*see* theorem 2) in mixed FEM methods yields an optimal error estimate in the product norm (*see* theorem 7). In particular, under the regularity assumption $(u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{H}^2(\Omega)^2 \times \mathrm{H}^2(\partial_3, \Omega)$, $p \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ we get with our element

$$\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 + \|p - p_h\|_0 = O(h).$$

---

1. PRÉLIMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE.

DÉFINITION 1. – Soit U un espace de Banach, V un espace de Banach réflexif. Nous dirons qu'une forme bilinéaire a sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ est U-*non dégénérée* si

(i) l'application $v \mapsto a(\,.\,, v)$ est injective;

(ii) il existe une constante $\mathrm{C}>0$ telle que $\sup\limits_{v \neq 0} a(u, v)/\|v\| \geqq \mathrm{C}\|u\|$.

Remarque. – Dans le cas symétrique, (i) est superflue. Nous dirons alors que a est *persuasive*, plus français que *faiblement coercive* (de « weakly coercive », *voir* [8]). □

Les résultats suivants sont, pour l'essentiel, connus (*voir* Roberts et Thomas [10]) et dus à Nečas [7], Babuška [1] et Brezzi [4].

Considérons le problème variationnel :

(P) Étant donné $f \in \mathrm{V}'$, trouver $u \in \mathrm{U}$ tel que $a(u, v) = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in \mathrm{V}$.

THÉORÈME 1. – *Soit a bilinéaire continue sur* $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$, *le problème* (P) *est bien posé si et seulement si a est* U-*non dégénérée.*

Soit U_h (resp. V_h) sous-espace fermé de U (resp. V) et considérons le problème variationnel *discret* associé à (P) :

(P_h) Étant donné $f \in \mathrm{V}'_h$, trouver $u_h \in \mathrm{U}_h$ tel que $a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle$, $\forall v_h \in \mathrm{V}_h$.

THÉORÈME 2. – *Soit a une forme bilinéaire continue sur* $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$, U-*non dégénérée et telle que sa restriction à* $\mathrm{U}_h \times \mathrm{V}_h$ *soit* U_h-*non dégénérée. Soit u* (*resp.* u_h) *solution de* (P) [*resp.* (P_h)]. *On a l'estimation d'erreur :*

$$\|u - u_h\| \leqq (1 + \mathrm{M}/\mathrm{C}_h) \inf_{w_h \in \mathrm{U}_h} \|u - w_h\|$$

où les constantes C (*resp.* C_h) *proviennent des inégalités de stabilité de la définition 1 dans les espaces* U, V (*resp.* U_h, V_h) *et* M *désigne la norme de a.*

2. ANALYSE DU PROBLÈME DE STOKES HYDROSTATIQUE. – 2.1. *Équations du modèle.* – Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ le domaine à frontière suffisamment régulière (disons C^1 par morceaux) défini par

$$\Omega = \{x = (x_i) \in \mathbf{R}^3,\ (x_1, x_2) \in \Gamma_s,\ -h(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$$

où Γ_s est un domaine borné de $\mathbf{R}^2$ représentant la surface du bassin et $h : \Gamma_s \to \mathbf{R}_+$ est une fonction C^1 par morceaux. Le domaine Ω (représentant un lac ou un océan) est occupé par un liquide incompressible en mouvement lent et stationnaire. Sous la condition naturelle en géophysique que la profondeur est faible devant l'étendue, on fait l'hypothèse hydrostatique (*voir* [9])

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

où p désigne la pression dynamique, *i. e.* débarrassée de l'influence de la pesanteur. Les équations du problème, où nous prenons des conditions de Dirichlet homogènes pour simplifier la présentation, sont alors (*voir* [3])

$$-\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1}$$

(1.2) $$-\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2 \quad \text{dans } \Omega$$

(1.3) $$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

(1.4) $$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

(1.5) $$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

(1.6) $$u_3 \cdot n_3 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où n désigne la normale sortante sur $\partial\Omega$.

Remarque. – Par rapport au problème de Stokes usuel, la disparition du terme $-\Delta u_3$ de (1.3) confère à (1.1)-(1.6) un caractère dégénéré. La vitesse verticale u_3 est donc *a priori* moins régulière que les vitesses horizontales u_1 et u_2, c'est pourquoi la condition limite (1.6) diffère de (1.5). □

2.2. *Formulation variationnelle du problème.* – Notant dorénavant $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $L_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0\right\}$, $\|\cdot\|_0$ la norme L^2, nous désignons par (suivant [12])

$$H(\partial_i, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega);\ \partial_i \varphi \in L^2(\Omega)\} \text{ muni de la norme du graphe}$$

$$H_0(\partial_i, \Omega) = \{\varphi \in H(\partial_i, \Omega);\ \varphi n_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \text{ muni de la norme } \|\partial_i \varphi\|_0$$

et nous posons $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0(\partial_3, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ muni de la norme produit.

Une formulation faible naturelle de (1) est alors :

Étant donné $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H'$, trouver $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ tel que

(2) $$a(u, v) = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v = (v_1, v_2, v_3, q) \in H$$

avec

$$a(u, v) = (\nabla u_1, \nabla v_1) + (\nabla u_2, \nabla v_2) - (p, \operatorname{div} v) - (\operatorname{div} u, q),$$

$$\langle f, v\rangle = \sum_{i=1}^{4} \langle f_i, v_i\rangle.$$

Remarque. – Dans le problème (1) f_3 et f_4 sont nuls. □

La formulation faible (2) traduit un principe variationnel mixte qui s'énonce

THÉORÈME 3. – *L'élément* $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ *est une solution de* (2) *si et seulement si u est* point selle *de la fonctionnelle*

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) = (1/2)(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2) - (p, \operatorname{div} u)$$
$$- \langle f_1, u_1\rangle - \langle f_2, u_2\rangle - \langle f_3, u_3\rangle - \langle f_4, p\rangle$$

en ce sens que pour tout $(v_1, v_2, v_3, q) \in H$

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, q) \leqq \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) \leqq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, p)$$
$$\mathcal{L}(u_1, u_2, v_3, p) \leqq \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) \leqq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, p).$$

Remarque. – La pression p (resp. la vitesse verticale u_3) s'interprète comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $-\operatorname{div} u = f_4$ (resp. $\partial_3 p = f_3$). □

2.3. *Existence, unicité, stabilité de la solution.* – Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant (*voir* aussi [3], [2]) THÉORÈME 4. – *Le problème de Stokes hydrostatique* (2) *est bien posé.*

Preuve. – D'après le théorème 1 et vu la symétrie de a, il s'agit de prouver que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue *persuasive*. La bilinéarité et la continuité sont élémentaires. Il reste à vérifier la condition de stabilité $\sup_{v\neq 0} a(u,v)/\|v\| \geqq C\|u\|$ où C désigne une constante *générique* strictement positive.

Fixons $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ et construisons $w \in H$ tel que $a(u,w) \geqq C\|u\|\,\|w\|$. La condition inf-sup continue (*voir* [5])

$$\sup_{v\in H_0^1(\Omega)^3-\{0\}} \frac{(p, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geqq C\|p\|_0 \tag{3}$$

permet de choisir $v \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que $(p, \operatorname{div} v) \geqq C\|p\|_0\,\|v\|_1$. Par homogénéité on peut prendre v tel que $\|v\|_1 = \|p\|_0$. Puis on choisit q tel que

$$\frac{(\partial_3 u_3, q)}{\|q\|_0} \geqq \|\partial_3 u_3\|_0, \tag{4}$$

pour cela prenons $q = \partial_3 u_3$ qui est bien dans $L_0^2(\Omega)$ vu la condition limite (1.6). On cherche alors w de la forme $\alpha(u_1, u_2, u_3, -p) - \beta(v_1, v_2, v_3, 0) - \gamma(0, 0, 0, q)$ avec α, β, γ à ajuster. ■

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME APPROCHÉ. – 3.1. *Critères pour une discrétisation bien posée.* – Soit $H_h = U_h \times P_h$ où $U_h = V_h \times W_h$ et V_h (resp. W_h, P_h) désigne le sous-espace de dimension finie des vitesses « horizontales » v_1, v_2 (resp. vitesses « verticales » v_3 et pressions). En reprenant la preuve précédente, on constate que

THÉORÈME 5. – *Le problème de Stokes hydrostatique discret correspondant est bien posé si et seulement si sont vérifiées*

– *l'inégalité de Brezzi* (*voir* [5]) : $\sup_{v_h\in V_h-\{0\}} (p_h, \operatorname{div} v_h)/\|v_h\|_1 \geqq C\|p_h\|_0$

– *l'inégalité « hydrostatique »* : $\sup_{q_h\in P_h-\{0\}} (\partial_3 u_{3h}, q_h)/\|q_h\|_0 \geqq C\|\partial_3 u_{3h}\|_0$.

3.2. *Élément fini hydrostatique.* – Considérons un maillage $\mathcal{C}_h$ dont les éléments sont des prismes (resp. des hexaèdres) *verticaux*, base et toit de ceux-ci n'étant pas nécessairement parallèles.

$R_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne P_k ou Q_k (*voir* Ciarlet [6]) selon que les éléments sont prismatiques ou hexaédriques. Le produit tensoriel des espaces vectoriels E et F est noté $E \otimes F$. Soit F_K l'application transformant l'élément de référence $\hat{K}$ en l'élément K de façon isoparamétrique. Pour $\hat{x} \in \hat{K}$ notons $\hat{f}(\hat{x}) = f(F_K(\hat{x}))$.

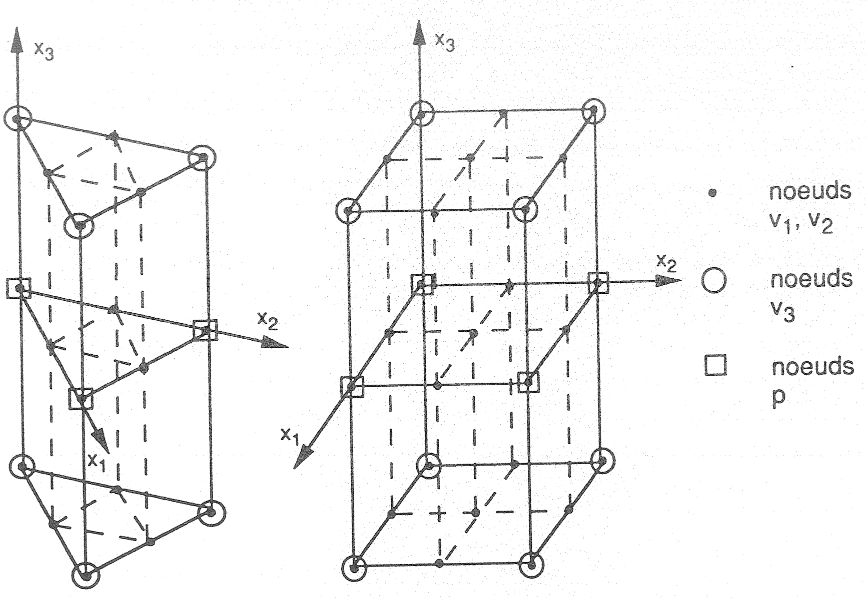
Soit $\mathcal{C}_{h/2}$ le maillage obtenu en subdivisant chaque élément de $\mathcal{C}_h$ en huit, en coupant chaque arête en son milieu. Les espaces des vitesses sont

$$V_h = \{\phi \in C(\bar{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 \mid \forall K \in \mathcal{C}_{h/2},\ \hat{\phi}_{|K} \in (R_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \otimes P_1(\hat{x}_3))^2\},$$

$$W_h = \{\chi \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0(\partial_3, \Omega) \mid \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \hat{\chi}_{|K} \in R_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \otimes P_1(\hat{x}_3)\}.$$

Pour la pression, on ne demande pas la pleine continuité, on exige seulement la continuité aux interfaces verticales : pour toute F face verticale commune à deux éléments K_1 et K_2, $\forall a \in F$, $\lim_{x\to a,\, x\in K_1} p(x) = \lim_{x\to a,\, x\in K_2} p(x) = p(a)$. L'espace des pressions est

$$P_h = \{\psi \in L_0^2(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \hat{\psi}_{|K} \in R_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \otimes P_0(\hat{x}_3)$$
$$\text{et } \psi \text{ continue aux interfaces verticales}\}.$$



Éléments hydrostatiques de référence.
Hydrostatic reference elements.

Les degrés de liberté sont décrits sur l'élément de référence (voir *fig.*).

Remarque. – Pour les vitesses horizontales on peut prendre aussi

$$V_h = \{\phi \in C(\bar{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 \mid \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \hat{\phi}_{|K} \in (R_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \otimes P_2(\hat{x}_3))^2\}. \quad \square$$

3.3. *Vérification des inégalités de stabilité.* – Dans la suite, nous supposons que le maillage $\mathcal{C}_h$ est régulier et qu'il satisfait l'hypothèse inverse « verticale »

$$h_{\min}/h_{\max} \geqq \mu > 0,$$

où $2\,h_{\min}$ (resp. $2\,h_{\max}$) désigne la plus petite (resp. grande) arête verticale des éléments de $\mathcal{C}_h$.

Proposition 1. – *L'élément fini hydrostatique vérifie l'inégalité hydrostatique.*

Preuve. – L'idée de base est que si $u_3 \in W_h$ alors $\partial_3 u_3$ est « presque » dans P_h, propriété caractéristique de ce que nous appelons un *élément fini hydrostatique*. En effet, comme les éléments sont tous verticaux, par dérivation composée on obtient aisément

$$\text{(5)} \qquad \forall x \in K, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot h_{\min} \leqq \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3} \leqq \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot h_{\max}.$$

Soit $u_3 \in W_h$, sur l'élément K prenons

$$\text{(6)} \qquad \widehat{q_{|K}(x)} = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3},$$

on voit que $q \in P_h$, en particulier q est *a priori* continue *seulement* aux interfaces verticales. De (5) et (6) on déduit $(\partial_3 u_3, q) \geqq \mu \cdot \|\partial_3 u_3\|_0 \|q\|_0$. ■

Remarque. – On peut voir que l'élément de Hood-Taylor R_2/R_1, ainsi que l'élément de Bercovier-Pironneau $8\,R_1/R_1$ *ne vérifient pas* l'inégalité hydrostatique et peuvent donner lieu à des vitesses verticales parasites. □

Pour vérifier l'inégalité de Brezzi, nous utilisons la technique de *macro-élément* de Stenberg (*voir* [11]). Formons, pour chaque sommet S intérieur à Ω, le macro-élément M composé de tous les éléments contenant S. En appliquant le théorème 3.1 de Stenberg [11], nous obtenons (en omettant pour des raisons de place la vérification détaillée des hypothèses) la

PROPOSITION 2. – *L'élément fini hydrostatique vérifie l'inégalité de Brezzi.*

Des propositions 1, 2 et du théorème 5 on déduit le

THÉORÈME 6. – *La discrétisation par éléments finis hydrostatiques de* (2) *est bien posée.*

3.4. *Estimation d'erreur.* – Introduisons l'espace de Sobolev anisotrope

$$H^2(\partial_3, \Omega) = \{w \in H^1(\Omega) | \partial_3 w \in H^1(\Omega)\}.$$

D'après le théorème 2, nous pouvons assurer le

THÉORÈME 7. – *On a l'estimation d'erreur optimale*

$$\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 + \|p - p_h\|_0 \leqq C$$
$$\times \inf_{(\phi_h, \chi_h, \psi_h) \in V_h \times W_h \times P_h} \{\|u_1 - \phi_{1h}\|_1 + \|u_2 - \phi_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 \chi_h\|_0 + \|p - \psi_h\|_0\}.$$

Si de plus $(u_1, u_2, u_3) \in H^2(\Omega)^2 \times H^2(\partial_3, \Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ *on obtient avec l'élément fini hydrostatique*

$$(7) \qquad \|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 + \|p - p_h\|_0 = O(h).$$

Preuve. – Il suffit d'utiliser les résultats classiques d'approximation (*voir* [6]), en remarquant que $\partial_3 u_3 \in H^1(\Omega)$ et que $\partial_3 \chi_h$ est « presque » dans P_h. ■

Je remercie Olivier Besson pour ses idées et conseils précieux, Rolf Stenberg pour une discussion fructueuse, Franco Brezzi pour ses critiques pertinentes ainsi que le Fonds National de la Recherche Suisse pour son soutien financier (projet 20-31162.91).

Note remise le 3 septembre 1993, acceptée après révision le 17 novembre 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] I. BABUŠKA, Error bound for the finite element method, *Numer. Math.*, 16, 1971, p. 322-333.

[2] O. BESSON et M. R. LAYDI, Some estimates for the anisotropic Navier-Stokes equations and for the hydrostatic approximation, *M²AN*, 26, 7, 1992, p. 855-865.

[3] O. BESSON, M. LAYDI et R. TOUZANI, Un modèle asymptotique en océanographie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310, série I, 1990, p. 661-665.

[4] F. BREZZI, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO*, an. 8, 2, 1974, p. 129-151.

[5] F. BREZZI et M. FORTIN, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.

[6] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.

[7] J. NEČAS, Sur une méthode pour résoudre les EDP du style elliptique voisine de la variationnelle, *Ann. Scicola. Norm. Sup. Pisa*, (3), 16, 4, 1962, p. 305-326.

[8] J. T. ODEN et J. N. REDDY, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer-Verlag, 1983.

[9] J. PEDLOSKY, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[10] J. E. ROBERTS et J. M. THOMAS, Mixed and hybrid methods, in *Handbook of numerical analysis*, II, *Finite Element Method (part* 1), North-Holland Elsevier, 1991, p. 527-637.

[11] R. STENBERG, On some three-dimensional finite elements for incompressible media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 63, 1987, p. 261-269.

[12] R. TEMAM, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, *Ann. Mat. Pura Appl.*, LXXIX, 1968, p. 191-379.

Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, Chantemerle 20, CH-2007 Neuchâtel, Suisse.