Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 721-727, 1996
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Analyse numérique/*Numerical Analysis*)

Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport

Pascal AZÉRAD et Jérôme POUSIN

P. A. : Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, CH-2007 Neuchâtel, Suisse.
Nouvelle adresse : INSA Lyon, Laboratoire Modélisation Mathématique et Calcul Scientifique, Bât. 401, 20, avenue Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex, France ;
E-mail : azerad@mathinsa.insa-lyon.fr

J. P. : Laboratoire Modélisation Mathématique et Calcul Scientifique, INSA Lyon, Bât. n° 401, 20, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex, France.

Résumé. Il est possible de donner à l'équation de transport un traitement variationnel analogue à celui des équations elliptiques. Pour obtenir une forme bilinéaire coercitive, nous introduisons un espace de Sobolev approprié, des fonctions tests spécialement adaptées au transport et nous travaillons dans l'espace-temps. La méthode repose sur une inégalité de Poincaré « courbe », dont nous étudions la validité.

A curved Poincaré inequality for the variational form of the advection equation

Abstract. *It is possible to give a* coercive *variational formulation of the advection equation. To this aim, we introduce a Sobolev space, special test functions and work in space-time. The cornerstone is a "curved" Poincaré inequality, the validity of which we investigate.*

Abridged English Version

Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^n$ with piecewise C^1 boundary, $\bar{\Omega} \subset V$ an open set. Let $\beta : V \to \mathbb{R}^n$ a C^1 vector field. The vector $\mathbf{n}$ standing for the outer unit normal, well defined except perhaps on a negligible set $\mathcal{N}$, let us define $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{N} | \ \beta \cdot \mathbf{n} < 0\}$ (resp. Γ^+, Γ^0) the inflow (resp. outflow, noflow) boundary and $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-) = \{\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \,|\, \phi = 0 \text{ on } \Gamma^-\}$. The space $H(\beta, \Omega)$, denotes the completion of $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ equipped with the norm $|||u|||^2 = ||u||^2_{L^2} + ||\beta \cdot \nabla u||^2_{L^2}$, $H_0(\beta, \Omega, \Gamma^-)$ (resp. $H_0(\beta, \Omega, \Gamma^+)$) is the closure of $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$ (resp. $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)$) in $H(\beta, \Omega)$. These spaces have been extensively studied ([2], [4], [3]), in particular there is a trace operator $\gamma : H(\beta, \Omega) \to L^2_{\text{loc}}(|\beta \cdot \mathbf{n}|; \Gamma^-)$ so that one can handle nonhomogeneous Dirichlet boundary problems.

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

We say that a flow is *Ω-filling* if its trajectories starting from the inflow boundary do fill $\bar{\Omega}$ except perhaps for a negligible set in a finite bounded time. A sufficient condition for this to be true is given by the

PROPOSITION 1. – *If the field β is C^1, bounded as well as its gradient in a neighbourhood V of $\bar{\Omega}$, if there are a unit vector* $\mathbf{k}$, *a number $\alpha > 0$ such that*

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \beta \cdot \mathbf{k} \geq \alpha \tag{1}$$

and if Ω is bounded in the $\mathbf{k}$ *direction then the flow is Ω-filling.*

We now state the

THEOREM 1. – *For a Ω-filling flow, governed by a solenoidal vector field β, $\exists C > 0$ such that*

$$\forall u \in H_0(\beta, \Omega, \Gamma^-), \quad ||u||_{L^2} \leq C||\beta \cdot \nabla u||_{L^2}. \tag{2}$$

Remark. – One can give counterexamples if condition (1) is not satisfied, see *fig.* 1-2.

Application to the variational solution of the advection equation

Consider the model problem:

$$\mathcal{A}u \equiv u_t + \beta \cdot \nabla u = f \quad \text{on } \Omega \times]0, T[\tag{3}$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma^- \times]0, T[\tag{4}$$

$$u(., t = 0) = h \quad \text{on } \Omega. \tag{5}$$

The space-time formulation

Denoting by $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = t)$, $Q = \Omega \times]0, T[$, $\partial Q = \partial\Omega \times]0, T[\cup \Omega \times (\{T\} \cup \{0\})$, $\tilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{n}, 0)$ on $\partial\Omega \times]0, T[$, $(0, 1)$ on $\Omega \times \{T\}$ and $(0, -1)$ on $\Omega \times \{0\}$, $\tilde{\beta}(\tilde{\mathbf{x}}) = (\beta(\mathbf{x}, t), 1)$, $G^- = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \partial Q | \tilde{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{n}} < 0\} = \Gamma^- \times]0, T[\cup \Omega \times \{0\}$, and $\tilde{\nabla} \equiv (\nabla, \partial_t)$ one rewrites (3)-(5) as

$$\mathcal{A}u \equiv \tilde{\beta} \cdot \tilde{\nabla} u = f \quad \text{on } Q \tag{6}$$

$$u = \tilde{g} \quad \text{on } G^- \tag{7}$$

Remark. – By taking $\mathbf{k} = (\mathbf{0}, 1)$, one easily proves that a time-dependent flow is Q-filling.

The Least Squares weak form

Find $u \in H_0(\beta, Q, G^-)$ such that $\forall \phi \in H_0(\beta, Q, G^-)$,

$$\int_Q (\beta \cdot \nabla u)(\beta \cdot \nabla \phi)\, dxdt = \int_Q (\beta \cdot \nabla \phi)\, dxdt \tag{8}$$

Remark. – The Euler equation associated to (8) is *parabolic*, namely a diffusion equation involving an anisotropic conductivity tensor.

By using the standard Lax-Milgram lemma and inequality (2), one gets the

THEOREM 2. – *If the flow is Q-filling then problem* (8) *is well posed.*

The STILS (Space Time Integrated Least Squares) method

Using a finite element discretization with standard continuous elements of the space-time domain ([9], [10], [1]) one gets a stable numerical scheme and error estimates of the same order as in [8].

1. Cadre fonctionnel

1.1. *Espaces de Sobolev obliques*

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière C^1 par morceaux. Soit V un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$. Soit $\beta : V \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1. On définit $H(\beta, \Omega)$ comme le complété de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ muni de la norme

$$|||u|||^2 = ||u||_0^2 + ||\beta \cdot \nabla u||_0^2,$$

où $||.||_0$ désigne la norme L^2. Le vecteur $\mathbf{n}$ désignant la normale sortante est défini sauf peut-être sur une partie négligeable $\mathcal{N}$; on note $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{N} | \ \beta \cdot \mathbf{n} < 0\}$ (resp. Γ^+) la frontière à flux entrant (resp. sortant), supposées de mesure strictement positive, et Γ^0 la frontière à flux nul. On définit $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-) = \{\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \,|\, \phi = 0 \,\mathrm{sur}\, \Gamma^-\}$. On désigne par $H_0(\beta, \Omega, \Gamma^-)$ (resp. $H_0(\beta, \Omega, \Gamma^+)$) la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$ (resp. $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)$) dans $H(\beta, \Omega)$. Ces espaces ont été introduits et étudiés dans [2], [4], [3]. En particulier, on dispose d'un opérateur de trace $\gamma : H(\beta, \Omega) \to L^2_{\mathrm{loc}}(|\beta \cdot \mathbf{n}|; \Gamma^-)$, ce qui permet de traiter des conditions limites de Dirichlet non homogènes.

1.2. *Ecoulement remplissant*

Soit l'écoulement ou *flot* associé au champ β, décrit par les trajectoires ou *courbes intégrales maximales* $\xi : (x, s) \in \bar{\Omega} \times [\sigma_x, \tau_x] \mapsto \xi(x, s) \in \bar{\Omega}$ solutions de

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta(\xi) \tag{9}$$

$$\xi(x, 0) = x \tag{10}$$

DÉFINITION 1. – Un écoulement est appelé *Ω-remplissant* si les trajectoires issues du bord à flux entrant remplissent $\bar{\Omega}$, sauf peut-être une partie négligeable, en une durée finie, bornée par un nombre fixe T.

Une condition suffisante pour cela est donnée par la

PROPOSITION 1. – *Si le champ β est C^1, borné et à gradient borné dans un voisinage V de $\bar{\Omega}$, s'il existe une direction donnée par un vecteur unitaire fixe* $\mathbf{k}$, *un nombre $\alpha > 0$ tels que*

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \beta \cdot \mathbf{k} \geq \alpha \tag{11}$$

et que le domaine soit borné dans cette direction, alors l'écoulement est Ω-remplissant.

Preuve. – Par le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué dans V, tout point x de $\bar{\Omega}$ est situé sur une courbe intégrale maximale. Le domaine est borné dans la direction $\mathbf{k}$. Notons $\mathrm{diam}_{\mathbf{k}}(\Omega) = \sup_{x,y \in \Omega} \{(x-y) \cdot \mathbf{k}\}$. On a $\beta \cdot \mathbf{k} \geq \alpha > 0$, donc il existe $\sigma_x \leq 0$ tel que $x_0 = \xi(x, \sigma_x) \in \partial\Omega$, avec $|\sigma_x| \leq \mathrm{diam}_{\mathbf{k}}(\Omega)/\alpha$. Prouvons que le complémentaire du sous-ensemble $\{x \in \bar{\Omega} | \ \xi(x, \sigma_x) \in \Gamma^-\}$ est de mesure nulle. Comme le domaine est supposé C^1 par morceaux, l'ensemble des points $\mathcal{N}$ où la normale n'est pas définie est de mesure nulle. Supposons donc $x_0 \in \partial\Omega \setminus \mathcal{N}$. Pour h assez petit, $\xi(x, \sigma_x + h) - \xi(x, \sigma_x)/h \cdot \mathbf{n} < 0$, d'où, en faisant $h \to 0$, $\beta(x_0) \cdot \mathbf{n} \leq 0$. Donc $x_0 \in \Gamma^- \cup \Gamma^0$. Enfin par le lemme de Sard, on montre comme dans [2] que $\{x \in \bar{\Omega} | \ \xi(x, \sigma_x) \in \Gamma^0\}$ est négligeable. ■

Remarque. – La régularité du champ sert à assurer l'existence de courbes intégrales maximales. En fait il suffirait que β soit lipschitzien, par exemple. On pourrait même se contenter d'une régularité de type Sobolev et de solutions renormalisées (*voir* [6]). □

1.3. *Inégalité de Poincaré courbe*

Les définitions précédentes nous permettent d'énoncer le

THÉORÈME 1. – *Pour un écoulement Ω-remplissant, gouverné par un champ à divergence nulle, il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H_0(\beta, \Omega, \Gamma^-), \quad ||u||_0 \leq C||\beta \cdot \nabla u||_0. \tag{12}$$

L'idée naturelle de preuve consiste à redresser globalement le champ de vecteurs gouvernant le flot et d'appliquer ensuite l'inégalité classique de Poincaré dans une direction donnée. Cette idée simple peut être réalisée [11], mais nous avons préféré une démonstration « hilbertienne » qui est généralisable au cas de champs β moins réguliers.

Preuve. – Soit $x \in \Gamma^-$; alors $\sigma_x = 0$ et τ_x représente la durée de la trajectoire issue de x. La régularité de l'écoulement entraîne $\tau_x \leq T < \infty$. Par la méthode des caractéristiques, à l'aide de la proposition 1, on prouve le

LEMME 1. – *Il existe $\rho \in H_0(\beta, \Omega, \Gamma^+) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\beta \cdot \nabla \rho = -2$ dans Ω. De plus $||\rho||_\infty \leq 2T$.*
On raisonne ensuite par densité. Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$.

$$||\beta \cdot \nabla u||_0 = \sup_{\phi \in L^2 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega \phi \beta \cdot \nabla u \mathrm{d}x}{||\phi||_0} \right\}.$$

Choisissons ρ fourni par le lemme 1, et prenons $\phi = \rho u$. Alors on a

$$(\rho u)\beta \cdot \nabla u = 1/2(\rho \beta \cdot \nabla u^2).$$

Puis, en intégrant par parties sur Ω, les termes de bord disparaissent à cause de la nullité de ρ sur Γ^+, de u sur Γ^-, de $\beta \cdot \mathrm{n}$ sur Γ^0. Comme $\mathrm{div}\beta = 0$, le choix de ρ conduit à

$$1/2 \int_\Omega \rho \beta \cdot \nabla u^2 \, dx = \int_\Omega u^2 \, dx = ||u||_0^2$$

D'autre part on sait que la norme $||\rho u||_0$ est majorée par $||\rho||_\infty ||u||_0$; on en déduit

$$\frac{||u||_0^2}{||\rho||_\infty ||u||_0} \leq \frac{\int_\Omega \phi \beta \cdot \nabla u \, dx}{||\phi||_0} \leq ||\beta \cdot \nabla u||_0.$$

Ainsi (12) est démontrée avec $C = ||\rho||_\infty$. ∎

Remarque. – Si les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées, la constante de l'inégalité 12 est majorée par $2\,\mathrm{diam}_{\mathrm{k}}(\Omega)/\alpha$, ce qui est connu pour l'inégalité de Poincaré usuelle (lorsque $\beta = \mathrm{e}_1$). □

On peut donner des contre-exemples si (11) n'est pas vérifiée : soit $\beta = (-y, x)$, une fonction radiale $u = u(r)$, nulle pour $r \geq 1/2$ et valant l'unité pour $r \leq 1/4$ par exemple. Manifestement $\beta \cdot \nabla u = 0$, violant ainsi (12). Voir *fig.* 1.

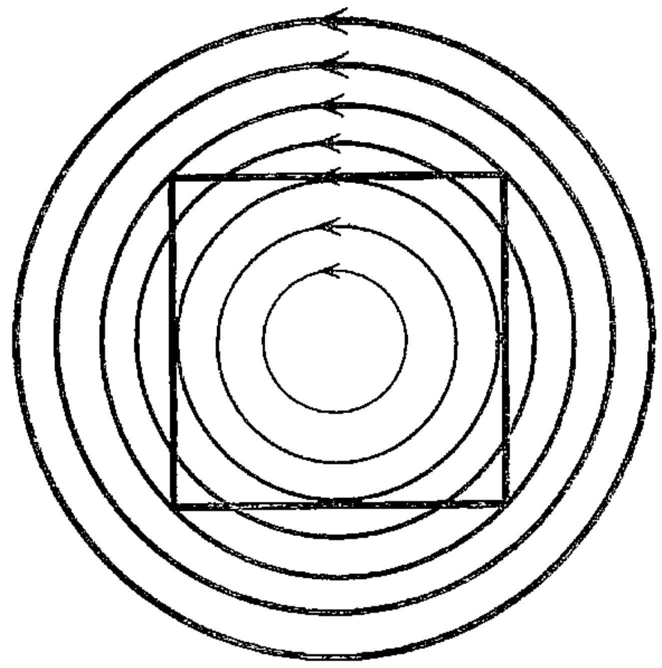

Fig. 1. – Flot en vortex dans un carré.

Fig. 1. – Vortex flow in a square.

2. Traitement variationnel de l'équation de transport

2.1. *Le cadre spatio-temporel*

La méthode que nous présentons a été introduite d'un point de vue numérique dans [9], partiellement étudiée et illustrée dans [10] . Elle s'avère très robuste numériquement pour traiter des écoulements en milieux poreux fracturés, par exemple.

Étant donnés $f \in L^2(\Omega\times]0,T[)$, g et h des fonctions régulières compatibles, il s'agit de résoudre *par une méthode variationnelle* l'équation de transport

$$\mathcal{A}u \equiv u_t + \beta \cdot \nabla u = f \quad \text{sur } \Omega\times]0,T[\tag{13}$$

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma^-\times]0,T[\tag{14}$$

$$u(.,t=0) = h \quad \text{sur } \Omega \tag{15}$$

Comme il n'y a pas de raison de distinguer la variable temps des autres, on se place dans l'espace-temps avec les coordonnées $\tilde{\mathrm{x}}=(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}=t)$, le domaine $Q=\Omega\times]0,T[$ de bord $\partial Q = \partial\Omega\times]0,T[\cup\Omega\times(\{T\}\cup\{0\})$, la normale sortante $\tilde{\mathrm{n}} = (\mathbf{n},0)$ sur $\partial\Omega\times]0,T[$, $(0,1)$ sur $\Omega\times\{T\}$ et $(0,-1)$ sur $\Omega\times\{0\}$, la vitesse advective $\tilde{\beta}(\tilde{\mathrm{x}}) = (\beta(\mathrm{x},t),1)$, la frontière à flux entrant $G^- = \{\tilde{\mathrm{x}} \in \partial Q | \tilde{\beta}\cdot\tilde{\mathrm{n}} < 0\} = \Gamma^-\times]0,T[\cup\Omega\times\{0\}$, le gradient $\tilde{\nabla} \equiv (\nabla, \partial_t)$.

Le problème devient « stationnaire » :

$$\mathcal{A}u \equiv \tilde{\beta}\cdot\tilde{\nabla}u = f \quad \text{sur } Q \tag{16}$$

$$u = \tilde{g} \quad \text{sur } G^- \tag{17}$$

Remarque. – La condition de Dirichlet (17) sur G^- recouvre alors la condition limite *à flux entrant* et la condition *initiale.* □

Surprenante est la

PROPOSITION 2. – *Un écoulement* instationnaire *gouverné par un champ C^1 à divergence nulle dans un voisinage V de $\bar{Q}$ est Q-remplissant.*

Preuve. – Il suffit de prendre $\mathbf{k} = (\mathbf{0},1)$. ■

Quitte à modifier le second membre f dans (16), on prend pour simplifier une condition de Dirichlet homogène, et on supprime les tildes qui mettaient l'accent sur le cadre spatio-temporel.

2.2. *La méthode des moindres carrés*

Pour pallier l'hyperbolicité et la non-coercivité de l'opérateur $\mathcal{A}$, nous utilisons la méthode des moindres carrés (*voir* [7] par exemple) qui consiste ici à prendre des fonctions tests de la forme $\beta \cdot \nabla\phi$ au lieu de ϕ, ϕ décrivant $H_0(\beta, Q, G^-)$. La formulation faible correspondante de (16)-(17) est alors :

Trouver $u \in H_0(\beta, Q, G^-)$ tel que $\forall\phi \in H_0(\beta, Q, G^-)$,

$$\int_Q (\beta \cdot \nabla u)(\beta \cdot \nabla\phi)\, dxdt = \int_Q f(\beta \cdot \nabla\phi)\, dxdt \tag{18}$$

Remarque. – L'équation d'Euler associée à (18) est :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ([\beta \otimes \beta]\nabla u) &= \nabla \cdot f\beta \quad \text{sur } Q \\ u &= 0 \quad \text{sur } G^- \\ ([\beta \otimes \beta]\nabla u) \cdot \mathbf{n} &= f\beta \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } G \setminus G^- \end{aligned}$$

qui est une équation de *diffusion*, avec un tenseur de conductivité anisotrope. □

Remarque. – La condition d'incompressibilité peut être remplacée par div$\beta \in L^\infty(\Omega)$, la formulation faible au sens des moindres carrés n'est alors plus symétrique. □

THÉORÈME 2. – *Si l'écoulement est Q-remplissant, alors le problème* (18) *est bien posé.*

Preuve. – Sur $V = H_0(\beta, Q, G^-)$, considérons la forme bilinéaire symétrique

$$B(\phi, \psi) = \int_Q (\beta \cdot \nabla\phi)(\beta \cdot \nabla\psi)\, dxdt,$$

et la forme linéaire

$$L(\psi) = \int_Q f(\beta \cdot \nabla\psi)\, dxdt.$$

Elles sont visiblement continues sur V, et la forme bilinéaire est coercitive grâce à l'inégalité de Poincaré oblique, qui est vérifiée par le théorème précédent. Le théorème de Lax-Milgram fournit alors le résultat. ■

A priori le problème diffusif (18) est à interpréter en un sens plus faible que le problème advectif original, mais on montre le

THÉORÈME 3. – *Si l'écoulement est Q-remplissant, alors l'équation d'advection* (16)-(17) *admet une unique solution dans* $H_0(\beta, Q, G^-)$.

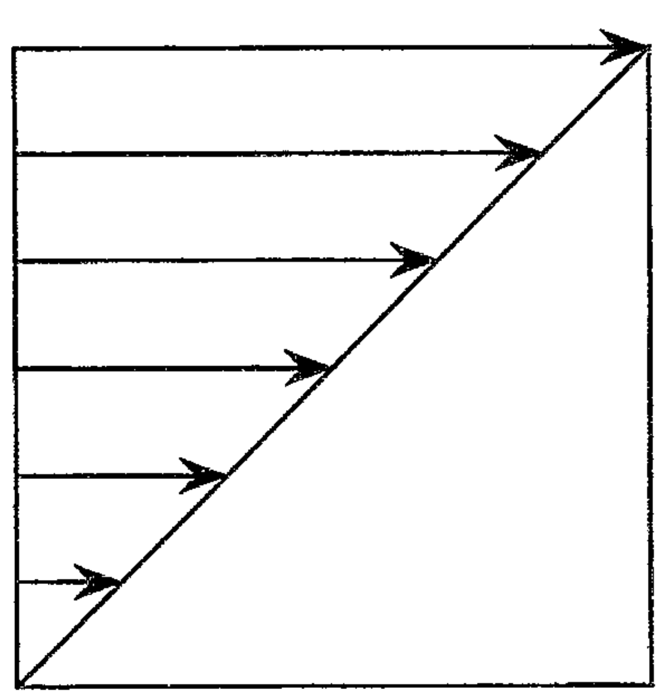

Fig. 2. – Écoulement de Couette.

Fig. 2. – Couette flow.

Preuve. – Il suffit de prouver la densité des fonctions de la forme $\beta \cdot \nabla\phi$, $\phi \in \mathcal{D}(\bar{Q}, G^-)$ dans $L^2(Q)$. On utilise pour cela l'inégalité de Poincaré oblique pour l'écoulement dual. ■

Remarque. – La condition (11) doit être vérifiée jusqu'au bord du domaine, sinon il peut ne pas y avoir de solution dans L^2 : prenons par exemple $\beta = (y, 0)$, alors l'équation $y\partial_x u = 1$ dans le carré $]0,1[^2$ avec $u = 0$ sur $\Gamma^- = \{x = 0\}$ admet une unique solution $u = x/y$ *qui n'est pas dans* L^2. Voir *fig.* 2. □

Signalons enfin que le traitement variationnel coercitif présenté permet une discrétisation de l'équation d'advection en éléments finis spatio-temporels continus Q_1 (*voir* [10]), qui donne, par le lemme de Céa et l'interpolation [5], l'estimation d'erreur $|||u - u_h||| = O(h)$, du même ordre que celle obtenue dans [8].

Remerciements. Nous remercions O. Besson, R. Laydi et H. Maire pour des discussions fructueuses et le Fonds National de la Recherche Suisse pour le financement (projet 20-31162.91).

Note remise le 3 juillet 1995, acceptée après révision le 12 janvier 1996.

Références bibliographiques

[1] **Azérad P., Perrochet P. et Pousin J.** Space Time Integrated Least Squares: a simple, stable and precise finite element scheme to solve advection equations as if they were *elliptic*, *Proceedings of Journées de Metz 95*, Chipot M. éd., Pitman (à paraître).

[2] **Bardos C., 1970.** Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; Théorèmes d'approximation; Applications à l'équation de transport, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 3, p. 185-133.

[3] **Dautray R. et Lions J.-L., 1985.** *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, 3, chap. XX, Masson.

[4] **Geymonat G. et Leyland P., 1988.** Transport and propagation of a flow of a compressible fluid in a bounded region, *Archive Rational Mech. Anal.*, 103, p. 53-81.

[5] **Ciarlet P. G., 1978.** *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland.

[6] **DiPerna R. L. et Lions P.-L., 1989.** Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. math.*, 98, p. 511-547.

[7] **Glowinski R., 1984.** *Numerical Methods For Nonlinear Variational Problems,* Springer.

[8] **Hughes T. J. R., Franca L. P. et Hulbert G. M., 1989.** A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 73, p. 173-189.

[9] **Nguyen H. et Reynen J., 1984.** A Space-Time Least-Square Finite Element Scheme For Advection-Diffusion Equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 42, p. 331-342.

[10] **Perrochet P. et Azérad P., 1995.** Space-Time Integrated Least-Squares: Solving a Pure Advection Equation with a Pure Diffusion Operator, *J. Comput. Phys.*, 117, 2, p. 183-193.

[11] **Suter U.** communication personnelle.