C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 000–000, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*)

Équations de Navier–Stokes en bassin peu profond : l'approximation hydrostatique

Pascal AZÉRAD [a], Francisco GUILLÉN [b]

[a] Laboratoire de modélisation, analyse non linéaire et optimisation, Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France
Courriel : azerad@univ-perp.fr

[b] Departamento de ecuaciones diferenciales y análisis numérico, c/ tarfia s/n, Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla, España
Courriel : guillen@numer.us.es

(Reçu le 6 juillet 1998, accepté après révision le 25 octobre 1999)

Résumé. Les fluides géophysiques partagent une particularité : leur profondeur est très petite devant leur étendue horizontale. Pour cette raison, on utilise fréquemment en océanographie, météorologie et limnologie un modèle asymptotique, appelé l'approximation hydrostatique des équations de Navier–Stokes, qui est basé sur l'hypothèse que la pression croît linéairement en la profondeur. Grâce à des estimations anisotropes et à un nouveau critère de compacité en temps, nous prouvons un théorème d'existence et de convergence pour ce modèle. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Full Navier–Stokes equations in shallow water: the hydrostatic approximation

Abstract. *Geophysical fluids all exhibit a common feature: the ratio depth* vs *horizontal width is very small. This leads to an asymptotic model widely used in meteorology, oceanography and limnology, namely the hydrostatic approximation of the time-dependent incompressible Navier–Stokes equations. It relies on the hypothesis that pressure increases linearly in the vertical direction. We prove a convergence and existence theorem for this model by means of anisotropic estimates and a new time-compactness criterium.* © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English Version

Let us consider a geophysical fluid filling a thin domain defined by $\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, z)\ ;\ (x_1, x_2) \in \Gamma_{\rm s},\ -\varepsilon \cdot h(x_1, x_2) < z < 0\}$, where $\Gamma_{\rm s}$ is a bounded Lipschitz domain in $\mathbb{R}^2$ representing the fluid surface and $h : \Gamma_{\rm s} \to \mathbb{R}$ is a nonnegative Lipschitzian application, arbitrary provided that Ω_ε be Lipschitzian. We denote by $\Gamma_{\rm b} = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_{\rm s}$ the basin bottom. The fluid flow in Ω_ε is generated by the wind traction on the surface $\Gamma_{\rm s}$, influenced by the Coriolis effect and governed by

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/99/03290000

the Navier–Stokes equations (1)–(5). In our study, we make the fundamental assumption that the kinematic viscosity is anisotropic, because we take a turbulent viscosity. Specifically, we assume that $\nu = (\nu_1, \nu_2, \varepsilon^2 \cdot \nu_3)$, for dimension and analytical reasons (*see* [3], [5], [8]). As usual in asymptotic analysis, we perform a vertical scaling to make the domain independent of ε to get (6)–(12). The hydrostatic approximation consists in neglecting the ε^2-small terms in the third momentum equation (8) thus getting the hydrostatic Navier–Stokes equations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f\,u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f\,u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T),\\
u_1 = u_2 = u_3\,n_3 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{b}}\times(0,T),\\
\nu_3\,\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3\,\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{s}}\times(0,T),\\
u_i(\,\cdot\,, t=0) = u_{0i}, \;\; i &= 1,2, \quad \text{in } \Omega.
\end{aligned}
$$

Our main result is the following:

THEOREM 1. – *For $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{L}^2\big(0,T\,;\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{s}})\big)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, with $\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0$ and $\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$, there exists a weak solution of the hydrostatic Navier–Stokes equations $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(0,T\,;\mathbf{W})$, with $u_1, u_2 \in \mathrm{L}^\infty\big(0,T\,;\mathrm{L}^2\big)$, obtained as a limit of solutions of the anisotropic Navier–Stokes equations as the aspect ratio ε goes to zero.*

The proof relies on estimates in anisotropic spaces, *see* Propositions 1 and 2, which are sufficient to take the limit in the linear terms (*see* [1]), whereas for the nonlinear ones, we establish a new time-compactness criterium, *see* Theorem 2, which we apply to the horizontal velocities, *see* Lemma 1. This theorem states essentially that a small perturbation of an L^p-equicontinuous family still possesses a strong convergent subsequence.

---

1. La faible profondeur

La circulation des masses d'air en météorologie ou la circulation des eaux en océanographie et en limnologie sont décrites de manière générale par les équations de Navier–Stokes. Les météorologues et les océanographes en utilisent couramment des modèles asymptotiques (*voir* par exemple [5], [7], [8], [11]) exploitant le fait que le quotient d'aspect ε = profondeur / diamètre horizontal, est de l'ordre de quelques pour mille.

1.1. Équations gouvernant l'écoulement

Soit $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ le domaine borné défini par

$$\Omega_\varepsilon = \big\{(x_1,x_2,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; (x_1,x_2) \in \Gamma_{\mathrm{s}}, \;\; -\varepsilon\cdot h(x_1,x_2) < z < 0\big\},$$

où Γ_{s} est un domaine borné lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ représentant la surface du fluide et $h : \Gamma_{\mathrm{s}} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne positive ou nulle, arbitraire pourvu que Ω_ε soit lipschitzien. On note alors $\Gamma_{\mathrm{b}}^\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \smallsetminus \Gamma_{\mathrm{s}}$ le fond du bassin, où $\partial\Omega_\varepsilon$ désigne la frontière du domaine Ω_ε. Le domaine Ω_ε modélisant un lac ou une mer est occupé par un liquide dont le mouvement est engendré par une traction horizontale (induite par le vent) sur la surface Γ_s et ce mouvement est soumis à la force de Coriolis induite par la rotation de la Terre. On suppose la densité constante égale à l'unité. Dans la suite, on utilise de manière essentielle une viscosité turbulente anisotrope pour le liquide, basée sur l'observation que la différence entre les échelles horizontale et verticale induit une turbulence différente dans les deux directions (*voir* [5], [8]). L'écoulement est régi par les équations de Navier–Stokes incompressible, avec viscosité cinématique turbulente *anisotrope.*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \Delta_\nu \mathbf{v} - 2\omega\wedge\mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon\times(0,T), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon\times(0,T), \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{b}}^{\varepsilon}\times(0,T), \tag{3}$$

$$\nu_z\frac{\partial u_1}{\partial z} = \tau_1, \quad \nu_z\frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_2, \quad w = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{s}}\times(0,T), \tag{4}$$

$$\mathbf{v}(\,\cdot\,,t=0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \tag{5}$$

Dans l'équation (1), Δ_ν est défini par $\Delta_\nu = \nu_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \nu_z\frac{\partial^2}{\partial z^3}$, avec $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_z)$ le vecteur de viscosité cinématique turbulente. Le vecteur $\mathbf{v} = (u_1,u_2,w)$ représente la vitesse du liquide, $2\omega = (0,0,f)$ la vitesse angulaire du bassin, P est la pression totale, $\mathbf{g} = (0,0,-g)$ est l'accélération de la pesanteur.

Dans l'équation (4) τ_i, $i = 1, 2$, représentent les tractions horizontales exercées par le vent sur la surface Γ_s du liquide et $w = 0$ sur Γ_s traduit l'hypothèse du toit rigide. Enfin, $\mathbf{v}_0 = (u_{01},u_{02},w_0)$ désigne la vitesse initiale du liquide.

1.2. La mise à l'échelle

Pour rendre le domaine Ω_ε indépendant de ε, effectuons les changement d'échelles $z = \varepsilon\cdot x_3$, $w = \varepsilon\cdot u_3$ et $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ ainsi

$$\Omega = \big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ ;\ (x_1,x_2)\in\Gamma_{\mathrm{s}},\ \ -h(x_1,x_2) < x_3 < 0\big\}.$$

Il est nécessaire de répercuter le changement d'échelle dans les grandeurs physiques. Il est naturel de supposer que $w_0 = \varepsilon u_{03}$, où u_{03} ne dépend pas de ε. Pour des raisons de dimension (*cf.* [3], [5]), on suppose que $\nu_z = \varepsilon^2\cdot\nu_3$ et $\tau_i = \varepsilon\cdot\theta_i$, $i = 1, 2$, où ν_3 et θ_i sont des constantes. Posons enfin $p = P + g\cdot z = P + g\cdot\varepsilon x_3$ la pression hydrodynamique. Les équations (1)–(5) deviennent alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f\,u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f\,u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{7}$$

$$\varepsilon^2\left\{\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_3 - \Delta_\nu u_3\right\} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{9}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{b}}\times(0,T), \tag{10}$$

$$\nu_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{s}}\times(0,T), \tag{11}$$

$$\mathbf{u}(\,\cdot\,,t=0) = \mathbf{u}_0 \ \text{ dans } \Omega. \tag{12}$$

L'approximation hydrostatique consiste alors à négliger les termes en ε^2 dans l'équation (8) et à la remplacer par l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \ \text{ dans } \Omega\times(0,T). \tag{13}$$

2. Le résultat principal

2.1. Espaces fonctionnels anisotropes et à divergence nulle

Soient les espaces de Hilbert :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1_{\mathrm{b}}(\Omega) &= \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ \ \varphi = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_{\mathrm{b}}\}, \\ \mathrm{H}(\partial_3, \Omega) &= \{\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \ \partial_3\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} \ \text{ avec } \ \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}(\partial_3,\Omega)} = \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\partial_3\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \\ \mathrm{H}_0(\partial_3, \Omega) &= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\,\mathrm{H}(\partial_3,\Omega)} = \{\varphi \in \mathrm{H}(\partial_3, \Omega)\ ;\ \ \varphi n_3 = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\}, \\ \mathbf{W} &= \{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{b}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{b}}(\Omega) \times \mathrm{H}_0(\partial_3, \Omega)\ ;\ \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}. \end{aligned}$$

2.2. Formes faibles et théorème d'existence et convergence

On désigne par T une durée positive fixée. Notons $u_H = (u_1, u_2)$, $b(u_H) = f \cdot (-u_2, u_1)$ et $\nabla_\nu = \big(\nu_i^{1/2}\partial_i\big)_{i=1}^3$. Nous faisons l'hypothèse naturelle que l'énergie dissipée par le vent est finie : $\theta_H = (\theta_1, \theta_2) \in \mathrm{L}^2\big(0, T\,;\, \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{s}})^2\big)$. Les produit scalaires dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ sont notés par $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ et la dualité $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{s}})$, $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_{\mathrm{s}})$ par $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. La forme faible des équations de Navier–Stokes hydrostatiques (6)–(7), (13), (9)–(12) est alors : trouver $\mathbf{u} = (u_H, u_3) \in \mathrm{L}^2(0, T\,;\, \mathbf{W})$, avec $u_H \in \mathrm{L}^\infty\big(0, T\,;\, \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big)$, tel que

$$\int_0^T -\left(u_H, \frac{\partial v_H}{\partial t}\right) - (u_H, \mathbf{u}\cdot\nabla v_H) + (b(u_H), v_H) + \big(\underline{\nabla}_\nu u_H, \nabla_\nu v_H\big) = (u_{0H}, v_H(0)) + \int_0^T \langle\theta, v_H\rangle, \tag{14}$$

pour tout $\mathbf{v} = (v_H, v_3) \in \mathcal{C}^1(0, T\,;\, \mathbf{W})$, avec $\mathbf{v}(T) = 0$, tel que $\partial_3 v_H \in \mathrm{L}^\infty\big(0, T\,;\, \big(\mathrm{L}^3(\Omega)\big)^2\big)$.

THÉORÈME 1. – *Soient* $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *à divergence nulle et trace normale nulle sur* $\partial\Omega$ *et* θ_1, $\theta_2 \in \mathrm{L}^2\big(0, T\,;\, \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{s}})\big)$*, il existe une solution faible des équations de Navier–Stokes hydrostatiques* $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(0, T\,;\, \mathbf{W})$*, avec* $u_1, u_2 \in \mathrm{L}^\infty\big(0, T\,;\, \mathrm{L}^2(\Omega)\big)$*, obtenue comme limite de solutions* $\mathbf{u}^\varepsilon$ *des équations de Navier–Stokes à viscosité anisotrope quand le quotient d'aspect* ε *tend vers zéro.*

Remarque 1. – Une difficulté majeure de la preuve est le manque de régularité de la vitesse verticale, qui est seulement déterminée par la condition d'incompressibilité (9). La régularité $\mathrm{L}^\infty\big(0, T\,;\, \mathrm{L}^3(\Omega)^2\big)$ pour $\partial_3 v_H$ est requise pour le terme $\int_0^T \mathrm{d}t\,(u_H, u_3\partial_3 v_H)$. La régularité $\mathrm{L}^2\big(0, T\,;\, \mathrm{L}^\infty(\Omega)^2\big)$ ou tout autre régularité intermédiaire conviendrait également.

Remarque 2. – Ce résultat fournit une justification au modèle dit des équations primitives (*voir* [7]). Pour cela, l'hypothèse de viscosité turbulente *anisotrope* est essentielle. Avec une viscosité isotrope, dans le cas stationnaire, on obtient un modèle asymptotique linéaire, également hydrostatique mais où seule la diffusion verticale subsiste (*voir* [4]).

3. La démonstration

3.1. Compacité par perturbation

Nous donnons ici un critère de compacité, nouveau à notre connaissance, qui généralise le critère bien connu des translations de Riesz–Fréchet–Kolmogorov, étendu au cas vectoriel par Simon [9]. Dans la suite, on note $\tau_h f(t) = f(t+h)$.

THÉORÈME 2. – *Soient* $T > 0$, $\mathbf{X} \overset{\text{compact}}{\hookrightarrow} \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{Y}$ *des espaces de Banach. Soit* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *une famille de fonctions de* $\mathrm{L}^p(0, T\,;\, \mathbf{X})$*,* $1 \le p \le \infty$*, avec pour* $p = \infty$*,* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{C}(0, T\,;\, \mathbf{Y})$*, telle que :*

(H1) $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^p(0,T\,;\mathbf{X})$ *;*
(H2) $\|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(0,T-h;\mathbf{Y})} \leq \varphi(h)+\psi(\varepsilon)$ *avec* $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon)=0$,
alors la famille $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *possède une valeur d'adhérence dans* $\mathrm{L}^p(0,T\,;\mathbf{B})$*, et dans* $\mathcal{C}(0,T\,;\mathbf{B})$ *pour* $p=\infty$*, quand* $\varepsilon\to 0$*.*

Démonstration. – Il suffit de prouver que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\varepsilon_n>0$ et $\varepsilon_n\to 0$ la famille $\{f_{\varepsilon_n}\}_n$ est relativement compacte dans $\mathrm{L}^p(0,T\,;\mathbf{B})$. On applique le théorème 5, p. 84, de Simon (op. cit.) à la famille $\{f_{\varepsilon_n}\}_n$, en constatant que l'hypothèse (H2) implique que

$$\|\tau_h f_{\varepsilon_n} - f_{\varepsilon_n}\|_{\mathrm{L}^p(0,T-h\,;\mathbf{Y})} \longrightarrow 0 \quad\text{quand}\quad h\to 0,$$

uniformément par rapport à n (*cf.* [2] pour les détails). □

3.2. Estimations des solutions

Pour alléger la notation nous notons $\mathbf{u}=\mathbf{u}^\varepsilon$ une solution faible des équations de Navier–Stokes (6)–(12) (avec viscosité anisotrope). Nous notons $\|\cdot\|$ la norme dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. L'inégalité d'énergie usuelle (*cf.* [6]) pour le système de Navier–Stokes se traduit, pour p.p. $t\in[0,T]$, par

$$\begin{aligned}\|u_H(t)\|^2+\varepsilon^2\|u_3(t)\|^2+\int_0^t \mathrm{d}s\big(\|\nabla_\nu u_H(s)\|^2+\varepsilon^2\|\nabla_\nu u_3(s)\|^2\big)&\\ \leq \|u_{0H}\|^2+\varepsilon^2\|u_{03}\|^2+\int_0^t \mathrm{d}s\langle\theta_H,u_H\rangle.&\end{aligned}\tag{15}$$

On démontre que (*cf.* [1]) :

PROPOSITION 1. – *Les éléments* u_1, u_2, εu_3 *sont bornés dans* $\mathrm{L}^\infty\big(0,T\,;\mathrm{L}^2(\Omega)\big)\cap\mathrm{L}^2\big(0,T\,;\mathrm{H}^1(\Omega)\big)$.

Comme $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, $\partial_3 u_3$ est borné dans $\mathrm{L}^2\big(0,T\,;\mathrm{L}^2(\Omega)\big)$. Enfin, l'inégalité de Poincaré verticale, due au fait que $u_3=0$ sur Γ_s, donne $\|u_3\|\leq C\,\|\partial_3 u_3\|$ donc :

PROPOSITION 2. – *L'élément* u_3 *est borné dans* $\mathrm{L}^2\big(0,T\,;\mathrm{H}_0(\partial_3,\Omega)\big)$.

Soient $\mathcal{D}_\mathrm{b}(\Omega)=\big\{\varphi\in\mathcal{D}(\overline{\Omega})\,;\,\varphi=0 \text{ au voisinage de } \Gamma_\mathrm{b}\big\}$ et $\mathcal{U}=\big\{\underline{\varphi}\in\mathcal{D}_\mathrm{b}(\Omega)^2\times\mathcal{D}(\Omega)\,;\,\operatorname{div}\underline{\varphi}=0\big\}$. Soient la projection $\mathrm{P}_H:(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mapsto(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ et les espaces $B_H=\overline{\mathrm{P}_H\mathcal{U}}^{(\mathrm{L}^2)^2}$, $W_H=\overline{\mathrm{P}_H\mathcal{U}}^{(\mathrm{H}^1)^2}$, $Y_H=\overline{\mathrm{P}_H\mathcal{U}}^{(\mathrm{H}^2)^2}$. On vérifie (*voir* [2]) que

$$Y_H\hookrightarrow W_H\hookrightarrow B_H\equiv B_H'\hookrightarrow W_H'\hookrightarrow Y_H' \quad \text{où toutes les injections sont compactes.}\tag{16}$$

Ensuite on démontre le :

LEMME 1. – *On a* $\|\tau_h u_\mathrm{H}^\varepsilon - u_\mathrm{H}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T-h;Y_H')}\leq c_1\cdot h^{1/4}+c_2\cdot\varepsilon$.

Démonstration. – La forme faible spatiale des équations de Navier–Stokes (6)–(12) est

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(u_H,v_H)}{\mathrm{d}t}-(u_H,\mathbf{u}\cdot\nabla v_H)+(b(u_H),v_H)+(\nabla_\nu u_H,\nabla_\nu v_H)\\ &\qquad+\varepsilon^2\cdot\left\{\frac{\mathrm{d}(u_3,v_3)}{\mathrm{d}t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla u_3,v_3)+(\nabla_\nu u_3,\nabla_\nu v_3)\right\}=\langle\theta,v_H\rangle \quad\text{dans }\mathcal{D}'(0,T).\end{aligned}\tag{17}$$

Soit $v_H\in Y_H$, il admet un relèvement à divergence nulle $\mathbf{v}=(v_H,v_3)\in\big(\mathrm{H}^2_\mathrm{b}\big)^2\times\mathrm{H}^1_0(\partial_3)$, vérifiant $\|v_3\|_{\mathrm{H}^1}+\|\partial_3 v_3\|_{\mathrm{H}^1}\leq C\,\|v_H\|_{Y_H}$, qu'on prend comme fonction test dans (17) avant d'intégrer sur $(t,t+h)$:

$$(\tau_h u_H(t)-u_H(t),v_H)+\varepsilon^2(\tau_h u_3(t)-u_3(t),v_3)=\int_t^{t+h} g^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s,$$

avec $g^\varepsilon(s) = (u_H, u_H\nabla_H v_H) + (u_H, u_3\partial_3 v_H) - \varepsilon(u_H\nabla_H \varepsilon u_3, v_3) - \varepsilon(\varepsilon u_3\partial_3 u_3, v_3) - (b(u_H), v_H) - (\nabla_\nu u_H, \nabla_\nu v_H) - \varepsilon(\nabla_\nu \varepsilon u_3, \nabla_\nu v_3) + \langle\theta, v_H\rangle$. On peut montrer par interpolation entre $\mathrm{L}^\infty\big(0,T\,;\,\mathrm{L}^2\big)$ et $\mathrm{L}^2\big(0,T\,;\,\mathrm{L}^6\big)$ que u_H et εu_3 sont bornés dans $\mathrm{L}^4\big(0,T\,;\,\mathrm{L}^3\big)$, ce qui fournit (nous omettons les détails (*cf.* [2]) $\|g^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^{4/3}(0,T)} \le C\,\|v_H\|_{Y_H}$ donc, par l'inégalité de Hölder $\int_t^{t+h}|g^\varepsilon(s)|\,\mathrm{d}s \le C\,h^{1/4}\,\|v_H\|_{Y_H}$. D'autre part, $|\varepsilon^2(\tau_h u_3(t) - u_3(t), v_3)| \le \varepsilon\cdot\big\{\|\tau_h\varepsilon u_3(t)\|_{\mathrm{L}^2} + \|\varepsilon u_3(t)\|_{\mathrm{L}^2}\big\}\,\|v_3\|_{\mathrm{L}^2} \le \varepsilon C\,\|v_H\|_{Y_H}$ en vertu de la proposition 1. □

3.3. Passage à la limite

Les propositions 1 et 2 autorisent à extraire une sous-suite telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon = (u_{\mathrm{H}}^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u} = (u_H, u_3) \;\; &\text{dans} \;\; \mathrm{L}^2(0,T\,;\,\mathbf{W}) \;\; \text{faible}, \\ u_{\mathrm{H}}^\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} u_H \;\; &\text{dans} \;\; \mathrm{L}^\infty\big(0,T\,;\,\mathrm{L}^2(\Omega)\big) \;\; \text{faible-}\star. \end{aligned}$$

Ces convergences faibles suffisent pour passer à la limite dans les termes linéaires de la forme faible de (6)–(12) (*cf.* [1]). D'autre part, en vertu de (16), de la proposition 1, du lemme 1 et du théorème 2 on peut extraire une sous-suite $u_H^\varepsilon \to u_H$ fortement dans $\mathrm{L}^2(0,T\,;\,B_H)$ et dans $\mathcal{C}(0,T\,;\,W_H')$. Cette convergence forte permet le passage à la limite dans les termes non linéaires, prouvant ainsi que $\mathbf{u}$ est solution de (14). Cela donne en outre la continuité en temps $u_H \in \mathcal{C}(0,T\,;\,W_H')$. Ainsi, la condition initiale (12) a un sens pour les vitesses horizontales. Pour la vitesse verticale, dont la dérivée temporelle est absente des équations, on ne peut rien dire.

En utilisant le lemme de de Rham [10], on récupère la pression comme une distribution telle que

$$\nabla p = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f\,u_2,\, \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f\,u_1, 0\right).$$

On montre (*cf.* [1], [3]) que $\nabla p \in \mathrm{W}^{-1,\infty}\big(0,T\,;\,\mathrm{W}^{-1,3/2}(\Omega)\big)$ donc $p \in \mathrm{W}^{-1,\infty}\big(0,T\,;\,\mathrm{L}^{3/2}(\Omega)\big)$. En particulier, on a bien (13).

Remerciements. Nous remercions le fonds franco-espagnol D.R.E.I.F. (ref. UC 815) et le projet PB95-1242 de la D.G.I.C.Y.T. (España) pour le financement du séjour de F. Guillén à Perpignan.

Références bibliographiques

[1] Azérad P., Analyse des équations de Navier–Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport, Thèse de Doctorat ès sciences, Université de Neuchâtel, 1996.
[2] Azérad P., Guillén F., Preprint.
[3] Besson O., Laydi M.R., Some estimates for the anisotropic Navier–Stokes equations and for the hydrostatic approximation, Modél. Math. Anal. Numér. 26 (1992) 855–865.
[4] Bresch D., Lemoine J., Simon J., A vertical diffusion model for lakes, SIAM J. Math. Anal. 30 (1999) 603–622.
[5] Lewandowski R., Analyse mathématique et océanographie, Masson, 1997.
[6] Lions J.-L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.
[7] Lions J.-L., Temam R., Wang S., On the equation of the large scale ocean., Nonlinearity 5 (1992) 1007–1053.
[8] Pedlosky J., Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag, 1987.
[9] Simon J., Compact sets in $\mathrm{L}^p(0,T\,;\,B)$, Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987) 65–97.
[10] Temam R., Navier–Stokes equations, North-Holland Elsevier, 1985.
[11] Zeytounian R.K., Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens, Springer-Verlag, 1994.