Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport.

Pascal Azérad

7 janvier 1996

Cette thèse a été préparée à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel sous la direction du professeur Olivier Besson.

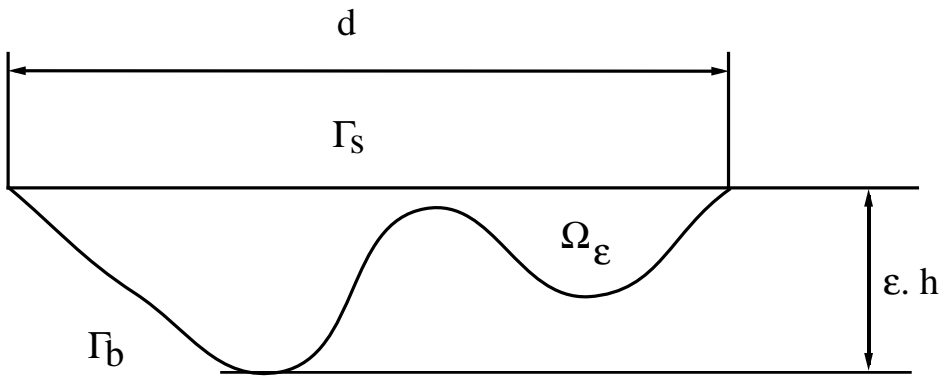


Figure 0.1: Le lac de Neuchâtel.

Remerciements.

Je tiens à remercier avant tout Olivier Besson, pour son magistère mathématique, son soutien indéfectible et sa disponibilité bienveillante tout au long de mes recherches.

Je remercie Pierre Lesaint pour m'avoir initié au calcul scientifique et m'avoir donné le goût de l'analyse numérique.

Je suis également reconnaissant à messieurs les professeurs A. Robert, J. Simon et A. Valli d'avoir bien voulu faire partie du jury, de leur lecture attentive du manuscrit et de leurs précieuses suggestions.

J'ai tiré grand profit de discussions avec R. Stenberg. Ma collaboration avec Pierre Perrochet et Jérôme Pousin a été (et sera j'espère) très fructueuse.

L'ambiance conviviale qui règne à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel est pour beaucoup dans la réalisation de ce travail, et je suis heureux de témoigner des bonnes conditions dont j'ai bénéficié, en particulier en tant qu'assistant du cours de théorie des probabilités des professeurs Alain Valette et Monique Graf.

Ma reconnaissance va également au Fonds National de la Recherche Scientifique de la Confédération Helvétique (requêtes 20-31162.91 et 20-37651.93) pour le financement de mes travaux.

Ma gratitude va enfin à ma famille qui a su m'entourer de son affection et me stimuler parfois, à mes collègues qui m'ont soutenu par leur amitié, leur humour dévastateur (et prodigué des conseils en LaTeX) durant ces dernières années à Neuchâtel: Cédric Béguin, Pierre-Alain Cherix et Claude Fuhrer.

Je dédie cette thèse au lac de Neuchâtel et à ma sirène.

Table des matières

1 Motivations. 9

1.1 Mathématiques lacustres. 9
1.2 Conventions typographiques 9
1.3 Notations mathématiques. 10
1.4 Les fluides géophysiques. 11
1.5 Plan de la thèse. 12

I L'approximation hydrostatique. 13

2 La modélisation asymptotique. 15

2.1 La faible profondeur. 15
2.2 Équations gouvernant l'écoulement. 16
2.3 Changement d'échelle et renormalisation. 17
2.4 L'hypothèse hydrostatique. 18

3 Le problème de Stokes hydrostatique. 21

3.1 Préliminaire d'analyse fonctionnelle. 21
3.2 Analyse du problème continu. 24
3.2.1 Equations du modèle. 24
3.2.2 Formulation variationnelle du problème. 25
3.2.3 Existence, unicité, stabilité de la solution. 28
3.3 Résolution du problème approché. 30
3.3.1 Critères pour une discrétisation bien posée. 30
3.3.2 Elément fini hydrostatique. 33
3.3.3 Vérification des inégalités de stabilité. 34
3.3.4 Estimation d'erreur. 37

4 Écoulement en eau peu profonde. 39
4.1 Modèle Renormalisé. 39
4.2 Modèle "Hydrostatique". 40
4.3 Espaces fonctionnels et notations utilisés. 40
4.4 Forme faible renormalisée. 42
4.5 Forme faible hydrostatique. 43
4.6 Majorations à priori. 44
4.6.1 Forme faible spatiale. 44
4.6.2 Égalité d'énergie. 44
4.7 Existence de la solution (cas linéarisé). 46
4.7.1 Passage à la limite. 47
4.8 Obtention de la pression. 48
4.9 Sens de la condition initiale et unicité. 50
4.9.1 Unicité de la solution. 53

II Le transport. 57

5 Moindres carrés dans l'espace-temps. 59
5.1 Une idée simple sur un exemple simple. 59
5.2 Principe des méthodes aux moindres carrés. 60
5.3 Le cadre spatio-temporel. 62
5.4 La méthode STILS. 63
5.4.1 Forme variationnelle aux moindres carrés. 63
5.4.2 Advection = diffusion anisotrope. 65
5.4.3 Retour à l'exemple. 67
5.5 Comportement numérique. 68
5.5.1 La discrétisation de Galerkin. 68
5.5.2 L'analyse de Fourier-von Neumann et la matrice d'amplification. 69
5.6 Exemples de simulations. 71

6 Inégalité de Poincaré courbe 75
6.1 Cadre fonctionnel. 75
6.1.1 Espaces de Sobolev obliques. 75
6.1.2 Écoulement remplissant. 76

6.1.3 Inégalité de Poincaré courbe. 78
6.2 Équivalence entre les formulations. 82

A **87**
A.1 Élément fini hydrostatique. 87
A.2 Le code STILS. 91

7 Bibliographie

Chapitre 1

Motivations.

1.1 Mathématiques lacustres.

Commençons par le début. Il y a bien longtemps, les hommes choisirent d'établir leurs cités au bord de l'eau, des fleuves, des mers ou des lacs. Pour des raisons pratiques bien sûr, mais ausi peut-être parce que le chant des nymphes, des sirènes et des ondines les attirait *à la claire fontaine* ... Lequel d'entre nous enfant n'est pas resté interdit, absorbé dans la contemplation de l'onde courant sous le pont? Et plus tard, son coeur n'a-t-il pas vibré à l'écho du vers de Baudelaire: "Homme libre, toujours tu chériras la mer"? Comme le lac de Neuchâtel est à l'origine de cette thèse, notre humble travail s'inscrit quelque part dans une provisoire sous-section d'un chapitre d'une partie d'un tome de cette histoire, volume rangé dans une des cellules hexagonales de l'immense bibliothèque de Babel [12].

Celle précisément où tu te trouves, cher lecteur.

1.2 Conventions typographiques

Pour avoir nous-mêmes maintes fois sué sang et eau à la lecture d'arides et absconses mathématiques, nous avons tenté d'aérer la mise en page, par une ample marge, permettant ainsi à notre cher lecteur de croquer quelque chimère, ou de vérifier quelque assertion au gré de son humeur. Il est dans la nature des mathématiciens d'exposer de façon déductive, logiquement ordonnée, ce qu'ils ont trouvé de façon inductive, à tâtons et dans le plus grand désordre. Ils agissent ainsi par souci de concision

Nous avons délibérement transgressé cette règle tacite, et de temps en temps en marge du texte nous livrons quelque indication heuristique.

et d'élégance, peut-être aussi par goût du secret, lointaine survivance de l'époque pythagoricienne?... A part cette marge élargie, la numérotation suit la convention habituelle, hormis quelques variantes que le lecteur attentif détectera.

1.3 Notations mathématiques.

Nous explicitons au fur et à mesure des besoins les notations que nous utilisons. Mentionnons seulement que C désigne une constante *flottante* au gré des courants (et des équations).

1.4 Les fluides géophysiques.

Les résultats que nous allons présenter sont centrés autour du problème de l'hydrodynamique du lac de Neuchâtel. Ce problème, bien que très particulier, revêt pourtant un intérêt "universel". Presque tous les fluides géophysiques présentent en effet la caractéristique suivante: Le rapport étendue horizontale/ profondeur est très petit.

Région	Diamètre horizontal d	Hauteur h	Rapport h/d
Europe	5000 km	10 km	0.2 %
Atlantique Nord	5000 km	5 km	0.1%
Lac de Neuchâtel	40 km	100 m	0.25%
flaque d'eau	4 m	1 cm	0.25%

Le lac de Neuchâtel est donc un excellent modèle réduit de la mer par exemple. Pour lui aussi, l'effet de Coriolis est très sensible (les marées en revanche sont imperceptibles), et nous disposons d'un appareillage permettant des mesures plus denses que pour l'Atlantique. En plus de ce caractère général des fluides géophysiques, la bathymétrie du lac révèle une colline sous-marine affleurant à 8m sous la surface, ce qui ajoute une difficulté à la simulation numérique et confère à notre lac une nature exemplaire pour l'hydrodynamique des fluides géophysiques [42]. Compte tenu des grandes variations de profondeur, une discrétisation par éléments finis est préférable à une méthode de différences finies pour simuler plus précisément les phénomènes.

Les premiers travaux effectuant l'analyse mathématique de l'hypothèse hydrostatique comme modèle asymptotique pour les fluides peu profonds sont [11, 10]. Ils traitent respectivement du problème de Stokes et des équations de Navier-Stokes stationnaires.

Un autre aspect important de l'hydrodynamique du lac concerne la stratification, c'est à dire le caractère inhomogène de la densité du fluide. A cause des phénomènes thermiques, une interface appelée thermocline sépare la couche de surface formée de fluide chaud plus léger de la partie inférieure formée de fluide froid, à 4 degré. Un modèle adéquat du lac devrait prendre en compte la densité variable [1]. Cela nous a amené à nous intéresser à la résolution de l'équation de conservation de la masse, c'est à dire de l'équation de transport linéaire.

1.5 Plan de la thèse.

Dans la première partie, nous nous intéressons aux équations de Stokes puis de Navier-Stokes en bassin peu profond, sous l'approximation hydrostatique qui fournit un modèle asymptotique particulièrement pertinent. Nous montrons que le problème de Stokes hydrostatique est bien posé, construisons un élément fini stable pour sa résolution numérique [5]. Nous prouvons ensuite que les équations de Navier-Stokes sous l'approximation hydrostatique admettent une solution faible au sens de Leray-Hopf [33, 26]. Malheureusement nous n'avons pas pu résoudre le cas non-linéaire, à cause du manque de contrôle sur la régularité de la vitesse verticale, nous traitons uniquement le cas linéarisé.

Dans la seconde partie, nous traitons le problème de l'équation de transport. Nous avons développé, en collaboration avec P. Perrochet [44], une méthode simple et stable de résolution en éléments finis, basée sur une formulation parabolique de l'advection. Ceci est surprenant à tous égards, mais nous montrerons que grâce à la méthode des moindres carrés écrite dans l'espace-temps, l'équation de transport prend la forme d'une équation de diffusion [6]. Ceci nécessite cependant l'usage d'espaces de Sobolev anisotropes et d'une inégalité de Poincaré "courbe" que nous prouvons [7].

Partie I

L'approximation hydrostatique.

Chapitre 2

Le modèle asymptotique des fluides géophysiques.

2.1 La faible profondeur.

La circulation des masses d'air en météorologie ou la circulation des eaux en océanographie et en limnologie sont décrites de manière générale par les équations de Navier-Stokes. Pour prédire de manière satisfaisante le mouvement de ces fluides, les météorologues et les océanographes utilisent depuis longtemps des modèles asymptotiques pour les équations de Navier-Stokes (voir par exemple [42]). Ces modèles sont tous basés sur l'observation fondamentale suivante.

> Les dimensions horizontales du bassin à étudier sont beaucoup plus importantes que ses dimensions verticales.

Dans tous les cas on remarque que le quotient

$$\epsilon = \text{profondeur / diamètre horizontal}$$

est de l'ordre de quelque pour mille (voir table dans le chapitre d'introduction). Tous les modèles asymptotiques actuels pour étudier le mouvement d'un fluide dans un tel contexte tiennent compte du fait que ϵ est très petit. Le plus simple est l'approximation hydrostatique des équations de Navier-Stokes [11, 10]. Cette méthode utilise de manière essentielle un modèle de viscosité turbulente pour le liquide, basé sur l'observation que la différence entre les échelles horizontale et ver-

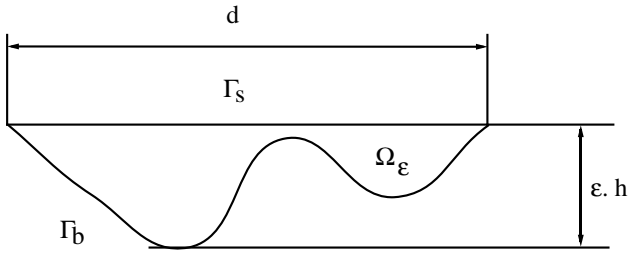


Figure 2.1: Le beau lac de Bâle.

ticale induit une turbulence différente dans les deux directions (voir [42]).

2.2 Équations gouvernant l'écoulement.

Soit $\Omega_\epsilon \subset \mathbf{R}^3$ le domaine borné à frontière suffisamment régulière (disons C^1 par morceaux) défini par

$$\Omega_\epsilon = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, z);\ (x_1, x_2) \in\ \Gamma_s,\ -\epsilon \cdot h(x_1, x_2) < z < 0\}$$

où Γ_s est un domaine borné de $\mathbf{R}^2$ représentant la surface du lac et $h : \Gamma_s \to \mathbf{R}$ est une fonction C^1 par morceaux. On note alors $\Gamma_b = \partial\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_s$ le fond du bassin, où $\partial\Omega_\epsilon$ désigne la frontière du domaine Ω_ϵ. Le domaine Ω_ϵ modélisant un lac ou une mer est occupé par un liquide dont le mouvement est engendré par une traction horizontale (induite par le vent) sur la surface Γ_s et ce mouvement est soumis à la force de Coriolis induite par la rotation de la Terre. On suppose la densité constante égale à l'unité. Avec les hypothèses et les notations précédentes, l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes incompressible, avec viscosité anisotrope.

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \Delta_\nu \mathbf{v} - 2\omega \wedge \mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_\epsilon \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\epsilon \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{2.3}$$

$$\nu_z \frac{\partial u_1}{\partial z} = \tau_1, \quad \nu_z \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_2, \quad w = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \tag{2.4}$$

$$\mathbf{v}(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\epsilon. \tag{2.5}$$

$$\mathbf{v} = (u_1, u_2, w)$$

Dans Eq. (2.1) Δ_ν est défini par $\Delta_\nu = \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \nu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

où $\mathbf{v} = (v_1, v_2, w)$ représente la vitesse du liquide, $\omega = (0, 0, \omega_3)$ la vitesse angulaire du bassin, P est la pression totale, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ est l'accélération de la pesanteur, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_z)$ le vecteur de viscosité cinématique turbulente.
Dans l'équation (2.4) τ_i, $i = 1, 2$ représentent les tractions horizontales exercées par le vent sur la surface Γ_s du liquide.
Remarque. On a de plus imposé $w = 0$ sur Γ_s pour éviter la résolution d'un problème à frontière libre, qui ne serait pas justifié pour le lac de Neuchâtel. En effet les seiches les plus hautes sont inférieures à 5 cm, ainsi qu'en t'emoignent les mesures effectuées par Léon du Pasquier [47]. □

Pour rendre le domaine Ω_ϵ indépendant de ϵ, effectuons les

2.3 Changement d'échelle et renormalisation.

$$\Omega_\epsilon = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, z);\ (x_1, x_2) \in\ \Gamma_s,\ -\epsilon \cdot h(x_1, x_2) < z < 0\}$$

On pose alors:

$$z = \epsilon \cdot x_3$$

$$w = \epsilon \cdot u_3$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3);\ (x_1, x_2) \in\ \Gamma_s,\ -h(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$$

On suppose de plus que:

$$\nu_z = \epsilon^2 \cdot \nu_3$$

$$\tau_i = \epsilon \cdot \theta_i,\ i = 1, 2$$

Nous effectuons cette renormalisation pour des motifs physiques et aussi des impératifs mathématiques:

- Pour le vent, il est naturel de le supposer proportionnel à la profondeur, sinon lorsqu'$\epsilon \to 0$, on simulerait un ouragan!

- Quant à la viscosité, elle contrôle la taille des tourbillons, et au vu de la faible profondeur, il est normal de supposer ν_z très petit. Une dépendance quadratique en ϵ est nécessaire pour aboutir à l'approximation hydrostatique, comme le montrent Besson-Laydi [10].

Posons enfin $p = P + g \cdot z = P + g \cdot \epsilon x_3$ la pression hydrodynamique.

2.4 L'hypothèse hydrostatique.

Avec ces changement d'échelle et renormalisation, les équations (2.1-2.5) deviennent:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.7}$$

$$\epsilon^2 \{\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 - \Delta_\nu u_3\} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{2.10}$$

$$\nu_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \tag{2.11}$$

$$\mathbf{u}(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.12}$$

L'approximation hydrostatique consiste alors à négliger les termes en ϵ^2 pour aboutir au modèle suivant:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.16}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{2.17}$$

$$\nu_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \tag{2.18}$$

$$u_1(., t = 0) = u_2(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.19}$$

L'approximation hydrostatique des équations de Stokes est étudiée au chapitre 3, et celle des équations de Navier-Stokes instationnaires linéarisées, avec effet de Coriolis, est analysée au chapitre 4.

Chapitre 3

Le problème de Stokes hydrostatique.

Dans ce chapitre nous étudions le problème de Stokes sous l'approximation hydrostatique, nous montrons qu'il est bien posé et nous construisons un élément fini stable, c'est à dire n'exhibant pas de modes parasites de pression, ni de vitesses verticales.

3.1 Préliminaire d'analyse fonctionnelle.

Dans cette section, nous donnons des résultats qui, bien qu'essentiellement classiques, mériteraient d'être mieux connus. Il s'agit en fait de la généralisation du théorème de Lax-Milgram au cas non-coercitif, ou encore de la généralisation en dimension infinie de la notion de forme bilinéaire non dégénérée, qui est la bonne propriété caractérisant un systéme linéaire bien posé, le cas défini positif n'étant qu'un cas particulier. Alors que le théorème de Lax-Milgram ne donne qu'une condition suffisante, le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème variationnel soit bien posé. Au préalable définissons la notion généralisant la coercitivité ou "V-ellipticité":

Définition 1 Soit U un espace de Banach, V un espace de Banach réflexif. Une forme bilinéaire a sur $U \times V$ est dite *U-non dégénérée* si

(i) l'application $v \mapsto a(.,v)$ est injective

(ii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|} \geq C\|u\|.$$

Remarque. Dans le cas symétrique, (i) est superflue. Nous dirons alors que a est *persuasive*, plus français que *faiblement coercive.* (voir [41]) □

V' désignant le dual topologique de V, considérons le problème variationnel :

(P) Etant donnée $f \in V'$, trouver $u \in U$ tel que $a(u,v) =< f, v >$ $\forall v \in V$

Théorème 1 *Soit a bilinéaire continue sur $U \times V$, le problème* **(P)** *est bien posé si et seulement si a est U-non dégénérée.*

Preuve. Il suffit de modifier légèrement la preuve de Nečas [39], voir également Oden-Reddy [41] ou Roberts-Thomas [46]. Nous donnons la preuve cependant, car les références citées ne traitent pas le problème dans toute sa généralité.
Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow V' \\ u &\mapsto a(u,.) \end{aligned}$$

a étant bilinéaire continue, A est un opérateur linéaire continu.
(P) est bien posé si et seulement si A est un isomorphisme, c'est à dire injectif, surjectif et ouvert. D'après le théorème de Banach, l'ouverture est conséquence de la surjectivité. D'autre part A est surjectif si et seulement si son image imA est dense et fermée. Or

$$\overline{imA} = Ker(A^\star)^\perp,$$

où $A^\star$ désigne l'adjoint de A. Donc nous avons établi le

Lemme 1 **(P)** *est bien posé si et seulement si A injectif, imA fermée et $A^\star$ injectif.*

Nous pouvons maintenant prouver le théorème.
$\Rightarrow$: V étant réflexif,

$$\begin{aligned} A^\star : V &\to U' \\ v &\mapsto a(.,v) \end{aligned}$$

L'injectivité de $A^\star$ est donc exactement la condition (i). Par le lemme 1 nous avons d' autre part A injectif et imA fermée, donc imA est un espace de Banach et l'opérateur (encore noté A abusivement) $A : U \to imA$ est un isomorphisme, grâce encore au théorème de Banach. Son inverse est donc continu, il existe ainsi une constante $C > 0$ telle que

$$\|Au\| \geq C\|u\|$$

or par définition

$$\|Au\| = \sup_{v\neq 0} \frac{< Au, v >}{\|v\|} = \sup_{v\neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|}$$

ce qui fournit la condition (ii).
$\Leftarrow$: Si a est U-non dégénérée, en particulier a est non dégénérée. En effet la condition (ii) entraîne que

$$\forall v \in V,\ a(u,v) = 0 \Rightarrow u = 0$$

donc A et $A^\star$ sont injectifs. En vertu du lemme 1 il reste à prouver que imA est fermée. Nous avons vu précédemment que la condition (ii) traduit

$$\|Au\| \geq C\|u\|. \tag{3.1}$$

Soit maintenant une suite $(Au_n)_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = v^\star$$

La suite $(Au_n)_n$ est de Cauchy donc par (3.1) la suite $(u_n)_n$ également donc, comme U est complet, il existe $u \in U$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Enfin par continuité de A, $v^\star = Au \in imA$. ■

Remarque. I.Babuška [8] et F.Brezzi [13] ont prouvé des théorèmes analogues pour des espaces de Hilbert, mais sous les deux hypothèses :

$$\sup_{v\neq 0}\frac{a(u,v)}{\|v\|}\geq C\|u\| \quad \text{et} \quad \sup_{u\neq 0}\frac{a(u,v)}{\|u\|}\geq C\|v\|.$$

□

Soit U_h (resp.V_h) sous-espace fermé de U (resp.V) et considérons le problème variationnel *discret* associé à $(\mathbf{P})$:

$(\mathbf{P_h})$ Etant donné $f \in V_h'$, trouver $u_h \in U_h$ tel que $a(u_h, v_h) =< f, v_h >$ $\forall v_h \in V_h$

Théorème 2 *Soit a une forme bilinéaire continue sur $U \times V$, U-non dégénérée et telle que sa restriction à $U_h \times V_h$ soit U_h-non dégénérée. Soit u (resp.u_h) solution de $(\mathbf{P})$ (resp.$(\mathbf{P_h})$). On a l'estimation d'erreur :*

$$\|u-u_h\|\leq (1+M/C_h)\inf_{w_h\in U_h}\|u-w_h\|$$

où les constantes C (resp.C_h) proviennent des inégalités de stabilité de la définition 3.1 dans les espaces U, V (resp. U_h, V_h) et M désigne la norme de a.

Ce théorème est dû à I.Babuška [8].
Remarque. Si C_h est indépendante de h, le théorème précédent fournit une estimation optimale de l'erreur $\|u-u_h\|$. □

3.2 Analyse du problème continu.

3.2.1 Equations du modèle.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ le domaine à frontière suffisamment régulière (disons C^1 par morceaux) défini par

$$\Omega=\Big\{x=(x_i)\in\mathbf{R}^3,\ (x_1,x_2)\in\Gamma_s,\ -h(x_1,x_2)<x_3<0\Big\}$$

où Γ_s est un domaine borné de $\mathbf{R}^2$ représentant la surface du bassin et $h : \Gamma_s \to \mathbf{R}_+$ est une fonction C^1 par morceaux. Le domaine Ω

(représentant un lac ou un océan) est occupé par un liquide incompressible en mouvement lent et stationnaire. Sous la condition naturelle en géophysique que la profondeur est faible devant l'étendue, on fait l'hypothèse hydrostatique [42]

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

où p désigne la pression dynamique, i.e. débarrassée de l'influence de la pesanteur. Notant dorénavant $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, les équations du problème, où nous prenons des conditions de Dirichlet homogènes pour simplifier la présentation, sont alors [11]

$$\begin{aligned}
-\Delta u_1 + \quad \partial_1 p \quad &= f_1 \quad \text{dans } \Omega && (3.2)\\
-\Delta u_2 + \quad \partial_2 p \quad &= f_2 \quad \text{dans } \Omega && (3.3)\\
\partial_3 p \quad &= 0 \quad \text{dans } \Omega && (3.4)\\
\text{div} u \quad &= 0 \quad \text{dans } \Omega && (3.5)\\
u_1 \quad = u_2 \quad &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega && (3.6)\\
u_3 \cdot n_3 \quad &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega && (3.7)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante sur $\partial\Omega$.

Remarque. Par rapport au problème de Stokes usuel, la disparition du terme $-\Delta u_3$ de (3.4) confère à (3.2)-(3.7) un caractère dégénéré. La vitesse verticale u_3 est donc à priori moins régulière que les vitesses horizontales u_1 et u_2, c'est pourquoi la condition limite (3.7) diffère de (3.6). Nous verrons dans la section suivante à quels espaces appartiennent les vitesses horizontales et verticales. □

3.2.2 Formulation variationnelle du problème.

Nous désignons par (suivant [16], [57])

> $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire usuel noté $(.,.)$ et de sa norme associée notée $\|\ \|_0$ *qui pourront également dénoter les produit scalaire et norme produit sur* $L^2(\Omega)^n$ *avec* n *convenable.*

$H^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s muni de sa norme usuelle notée $\| \|_s$

$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni de la norme $\|\nabla\varphi\|_0$, en vertu de l'inégalité de Poincaré.

$H(\partial_i, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega);\ \partial_i \varphi \in L^2(\Omega)\}$ muni de la norme du graphe

$H_0(\partial_i, \Omega) = \{\varphi \in H(\partial_i, \Omega);\ \varphi\, n_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni de la norme $\|\partial_i \varphi\|_0$ en vertu de l'inégalité de Poincaré dans la direction $\mathbf{x_i}$.

$L_0^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega \varphi(x)\, dx = 0\}$

et on pose $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0(\partial_3, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ muni de la norme produit.

Remarque. Les espaces $H(\partial_i, \Omega)$, $H_0(\partial_i, \Omega)$ sont présentés et étudiés dans [57]. □

Une formulation faible naturelle de (3.2)-(3.7) est alors:
Etant donné $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H'$, trouver $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ tel que
$\forall v = (v_1, v_2, v_3, q) \in H$

$$\begin{aligned} (\nabla u_1, \nabla v_1) - (p, \partial_1 v_1) &= < f_1, v_1 > \\ (\nabla u_2, \nabla v_2) - (p, \partial_2 v_2) &= < f_2, v_2 > \\ -(p, \partial_3 v_3) &= < f_3, v_3 > \\ -(\mathrm{div} u, q) &= < f_4, q > \end{aligned} \tag{3.8}$$

ou encore en rassemblant

(P) Trouver $u \in H$ tel que $a(u, v) =< f, v > \forall v \in H$ où $f \in H'$ donné.

avec

$$a(u, v) = (\nabla u_1, \nabla v_1) + (\nabla u_2, \nabla v_2) - (p, \mathrm{div} v) - (\mathrm{div} u, q),$$

$$< f, v >= \sum_{i=1}^{4} < f_i, v_i > .$$

Remarque. Le problème (3.2)-(3.7) est en fait un cas particulier du problème (3.8), où f_3 et f_4 sont nuls. □

La formulation faible (**P**) traduit un principe variationnel mixte qui s'énonce

Théorème 3 *L'élément* $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ *est une solution de* **(P)** *si et seulement si* u *est* point selle *de la fonctionnelle*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) &= 1/2(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2) - (p, \mathrm{div} u) \\ &\quad - < f_1, u_1 > - < f_2, u_2 > - < f_3, u_3 > - < f_4, p >\end{aligned}$$

en ce sens que pour tout $(v_1, v_2, v_3, q) \in H$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, q) &\leq \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) \leq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, p) \\ \mathcal{L}(u_1, u_2, v_3, p) &\leq \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p) \leq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, p).\end{aligned}$$

Preuve. Soit $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$, et un accroissement

$$\delta u = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3, \delta q).$$

On calcule, en utilisant la bilinéarité symétrie de a.

$$\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(u + \delta u) - \mathcal{L}(u) = a(u, \delta u) - < f, \delta u > + \frac{1}{2} a(\delta u, \delta u) \qquad (3.9)$$

$\Rightarrow$: Supposons u solution de **(P)**. Alors, (3.9) devient

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(\delta u, \delta u)$$

Il suffit alors de prendre des accroissements particuliers.
Pour $\delta u = (0, 0, 0, q - p)$, cela donne $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, q) = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p)$.
Pour $\delta u = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, 0, 0)$, $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, q) \leq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, p)$.
Pour $\delta u = (0, 0, v_3 - u_3, 0)$, $\mathcal{L}(u_1, u_2, v_3, q) = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, p)$.

$\Leftarrow$: Réciproquement, soit u point selle de la fonctionnelle $\mathcal{L}$. Prenant un accroissement de la forme $\delta u = t \cdot v$, où $t \in \mathbb{R}$, (3.9) devient

$$\delta\mathcal{L} = t(a(u, v) - < f, v >) + t^2 a(v, v)/2.$$

La condition de point selle entraîne la stationnarité de cette fonction $\delta\mathcal{L} = 0$ de t, donc la nullité de $a(u, v) - < f, v >$. ■

Remarque. La pression p (resp. la vitesse verticale u_3) s'interprète comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $-\mathrm{div} u = f_4$ (resp. $\partial_3 p = f_3$). □

3.2.3 Existence, unicité, stabilité de la solution.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant (voir aussi [11])

Théorème 4 *Le problème de Stokes hydrostatique (3.8) est bien posé*

Preuve. D'après le théorème 1 et vu la symétrie de a, il s'agit de prouver que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue *persuasive*. La bilinéarité est triviale, la continuité découle aisément de

$$\|\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2\|_0 \leq \|\nabla w\|_0, \ \forall w = (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Il reste à vérifier la condition de stabilité

$$\sup_{v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|} \geq C\|u\| \quad (3.11)$$

où C désigne une constante strictement positive.
Fixons $u = (u_1, u_2, u_3, p) \in H$ et construisons $w \in H$ tel que $a(u,w) \geq C\|u\|\|w\|$. La condition *inf-sup* continue (voir [23]) en dimension 3

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^3 - \{0\}} \frac{(p, \mathrm{div} v)}{\|v\|_1} \geq C\|p\|_0 \quad (3.12)$$

permet de choisir $v \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que

$$(p, \mathrm{div} v) \geq B\|p\|_0\|v\|_1 \quad (3.13)$$

avec B constante convenable. Par homogénéité on peut prendre v tel que

$$\|v\|_1 = \|p\|_0. \quad (3.14)$$

Puis on choisit q tel que

$$\frac{(\partial_3 u_3, q)}{\|q\|_0} \geq \|\partial_3 u_3\|_0, \quad (3.15)$$

pour cela prenons

$$q = \partial_3 u_3 \quad (3.16)$$

qui est bien dans $L^2_0(\Omega)$ vu la condition limite (3.7). Cherchons w de la forme $\alpha(u_1, u_2, u_3, -p) - \beta(v_1, v_2, v_3, 0) - \gamma(0, 0, 0, q)$. On a

$$\begin{aligned} a(u,w) &= \alpha(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2) \\ &\quad -\beta((\nabla u_1, \nabla v_1) + (\nabla u_2, \nabla v_2) - (p, \mathrm{div} v)) \\ &\quad +\gamma((\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2, q) + (\partial_3 u_3, q)) \end{aligned}$$

que l'on peut minorer à l'aide des inégalités (3.10), (3.13) de Cauchy-Schwarz, et des égalités (3.14), (3.16)

$$\begin{aligned} a(u,w) &\geq \alpha(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2) \\ &\quad -\beta\|p\|_0(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2)^{1/2} + \beta B\|p\|_0^2 \\ &\quad +\gamma\|\partial_3 u_3\|_0^2 - \gamma\|\partial_3 u_3\|_0(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour conclure on utilise le lemme élémentaire

Lemme 2 *Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R^3},\ \alpha x^2 + \beta B y^2 + \gamma z^2 - \beta xy - \gamma xz \geq C(x^2 + y^2 + z^2).$$

Preuve. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il suffit de s'assurer que la forme quadratique

$$\alpha x^2 + \beta B y^2 + \gamma z^2 - \beta xy - \gamma xz$$

est définie positive. Pour cela, ajustons α, β et γ pour que les mineurs principaux de la matrice associée soient strictement positifs . On constate que $\alpha = 1, \beta = B, \gamma = 1$ jouent. ■

critère bien connu de definie positivité [55]

En remplaçant alors x (resp. y, z) par $(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2)^{1/2}$ (resp. $\|p\|_0$, $\|\partial_3 u_3\|_0$) on obtient

$$a(u,w) \geq C(\|\nabla u_1\|_0^2 + \|\nabla u_2\|_0^2 + \|\partial_3 u_3\|_0^2 + \|p\|_0^2). \tag{3.17}$$

Or d'après la forme de w

$$\|w\| \leq C\|u\| \tag{3.18}$$

d'où le résultat. ■

3.3 Résolution du problème approché.

3.3.1 Critères pour une discrétisation bien posée.

Soit $H_h = U_h \times P_h$ où $U_h = V_h \times W_h$ et V_h (resp. W_h, P_h) désigne le sous-espace de dimension finie des vitesses "horizontales" v_1, v_2 (resp. vitesses "verticales" v_3 et pressions). En reprenant la preuve précédente, on constate qu'elle repose uniquement sur les inégalités (3.15) et (3.13). De plus, la démonstration est encore valable si (3.15) est remplacée par

$$\frac{(\partial_3 u_3, q)}{\|q\|_0} \geq A\|\partial_3 u_3\|_0,$$

[1] Ce qui fournit le

Théorème 5 *Le problème de Stokes hydrostatique discret correspondant est bien posé si et seulement si sont vérifiées*

- *l'inégalité de Brezzi (voir [23], [14])*

$$\sup_{v_h \in V_h - \{0\}} \frac{(p_h, \mathrm{div} v_h)}{\|v_h\|_1} \geq C\|p_h\|_0,$$

- *l'inégalité "hydrostatique"*

$$\sup_{q_h \in P_h - \{0\}} \frac{(\partial_3 u_{3h}, q_h)}{\|q_h\|_0} \geq \|\partial_3 u_{3h}\|_0.$$

Jusqu'à très récemment, les techniques de vérification de l'inégalité de Brezzi étaient disparates et délicates (voir [23], [14]).

En revanche, la technique de *macro-élément* de Stenberg [53], [54] est basée sur un principe simple : un macro-élément M est la réunion d'un ou plusieurs éléments adjacents par une face, une arête ou un sommet. Deux macro-éléments M et M' sont dits équivalents s'ils sont homologues par une transformation continue F appliquant les éléments internes de l'un sur ceux de l'autre de façon isoparamétrique.

Soient $\mathcal{C}_h$ un maillage formés d'éléments K, Γ_h la collection des faces des éléments de $\mathcal{C}_h$ contenues dans l'intérieur du domaine Ω et $h = \max_{K \in \mathcal{C}_h} \{diam(K)\}$. Notons

[1] Il suffit alors de prendre $\gamma = A^{-1}$ dans le lemme.

$$P_M = \left\{ p_{|M} \mid p \in P_h \right\}$$

$$V_{0,M} = \left\{ v_{|M} \mid v \in U_h,\, v = 0 \text{ sur } \partial M \right\}$$

$$N_M = \{ p \in P_M \mid (\mathrm{div} v, p)_M = 0,\, \forall v \in V_{0,M} \}.$$

Rolf Stenberg prouve alors le

Théorème 6 *Supposons que le maillage satisfasse l'hypothèse de régularité inverse* $diam(K) \geq Ch,\ \forall K \in \mathcal{C}_h$. *Supposons qu'il existe une collection finie de classes d'équivalence* $\mathcal{E}_i,\ i = 1, \ldots, N$ *de macro-éléments, un entier* L *et un ensemble* $\mathcal{M}_h$ *de macro-éléments tels que*

(M1) pour tout macro-élément M, *l'espace* N_M *est de dimension un et se réduit aux fonctions constantes*

(M2) chaque macro-élément $M \in \mathcal{M}_h$ *appartient à l'une des classes* $\mathcal{E}_i,\ i = 1, \ldots, N$

(M3) chaque élément $K \in \mathcal{C}_h$ *est contenu dans au moins un et au plus* L *macro-éléments de* $\mathcal{M}_h$

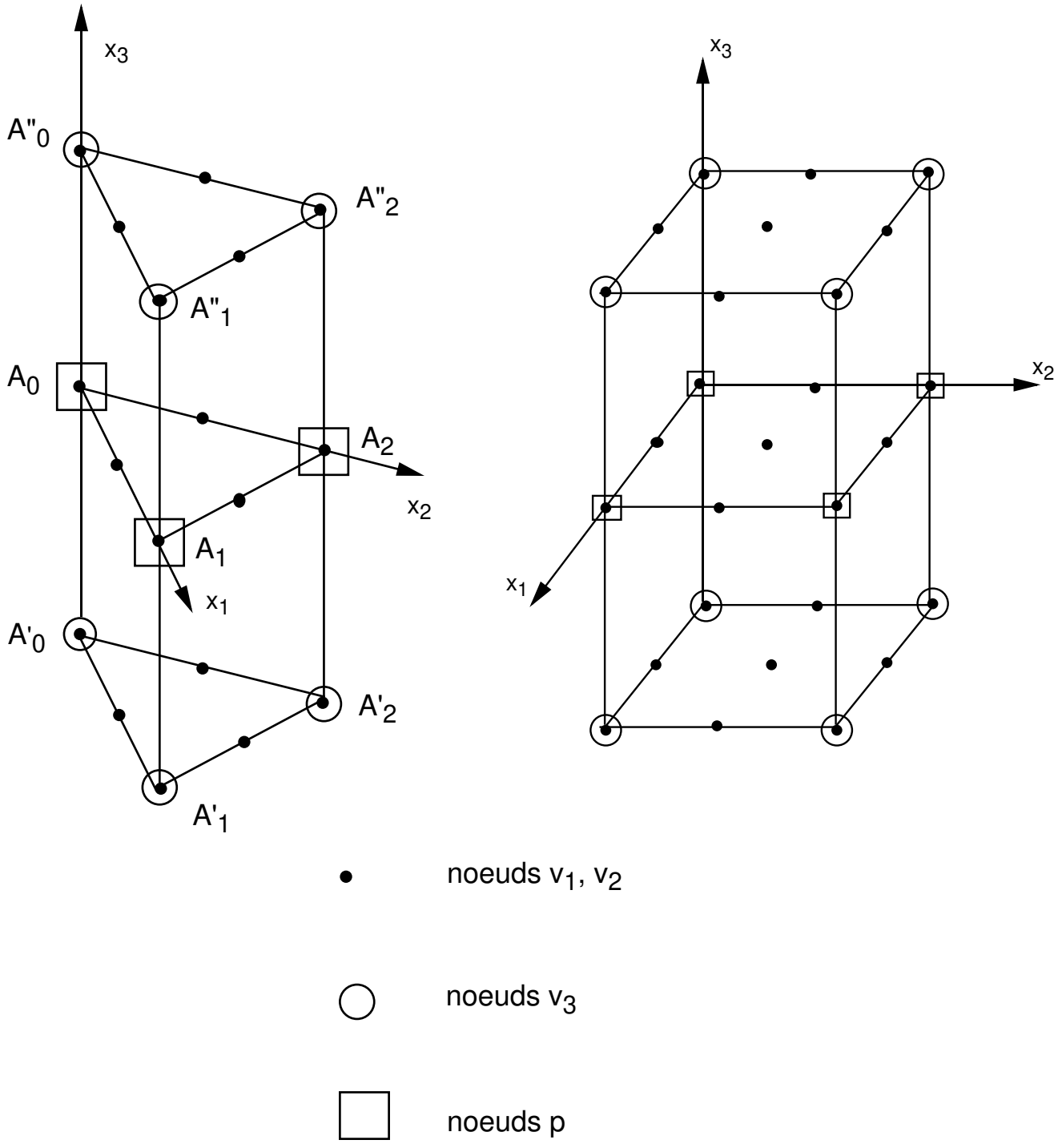
(M4) chaque $T \in \Gamma_h$ *est contenu dans l'intérieur d'au moins un et d'au plus* L *macro-éléments de* $\mathcal{M}_h$

alors l'inégalité de Brezzi est satisfaite.

Remarque. La seule hypothèse vraiment contraignante est (M1), pour (M2)-(M4) il suffit de construire un maillage qui les satisfait. L'hypothèse (M1) s'interprète physiquement, elle garantit l'absence de modes parasites locaux de pression (*spurious modes* ou *checkerboard pressures*, voir [14]). La puissance virtuelle des forces de pression

$$(\mathrm{div} v, p) = - < \nabla p, v >$$

ne devant être identiquement nulle que si la pression est constante. □



Eléments R2/R1/R0.5

Figure 3.1: Eléments hydrostatiques de référence

3.3.2 Elément fini hydrostatique.

Considérons un maillage $\mathcal{C}_h$ dont les éléments sont des prismes (resp. des hexaèdres) *verticaux*, base et toit de ceux-ci n'étant pas nécessairement parallèles. $R_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne P_k ou Q_k (voir Ciarlet [16]) selon que les éléments sont prismatiques ou hexaédriques. Le produit tensoriel des espaces vectoriels E et F est noté $E \otimes F$. Soit F_K l'application transformant l'élément de référence $\widehat{K}$ en l'élément K de façon isoparamétrique. Pour $\hat{x} \in \widehat{K}$ notons $\hat{f}(\hat{x}) = f(F_K(\hat{x}))$.
Soit $\mathcal{C}_{h/2}$ le maillage obtenu en subdivisant chaque élément de $\mathcal{C}_h$ en huit, en coupant chaque arête en son milieu. Les espaces des vitesses sont

$$V_h = \left\{\phi \in C(\bar{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 |\ \forall K \in \mathcal{C}_{h/2},\ \widehat{\phi_{|K}} \in (R_1(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \otimes P_1(\widehat{x_3}))^2\right\},$$

$$W_h = \left\{\chi \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0(\partial_3, \Omega) |\ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \widehat{\chi_{|K}} \in R_1(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \otimes P_1(\widehat{x_3})\right\}.$$

Pour la pression, on ne demande pas la pleine continuité, on exige seulement la continuité aux interfaces verticales : pour toute F face verticale commune à deux éléments K_1 et K_2, $\forall a \in F$, $\lim_{x \to a,\, x \in K_1} p(x) = \lim_{x \to a,\, x \in K_2} p(x) = p(a)$.
L'espace des pressions est

$$\begin{aligned} P_h = \{\ & \psi \in L_0^2(\Omega) |\ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \widehat{\psi_{|K}} \in R_1(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \otimes P_0(\widehat{x_3}) \\ & \text{et } \psi \text{ continue aux interfaces verticales } \}. \end{aligned}$$

Les degrés de liberté sont décrits sur l' élément de référence (voir *fig.* 3.1).
Remarque. Au lieu de découper les éléments en huit, pour les vitesses horizontales on peut prendre

$$V_h = \left\{\phi \in C(\bar{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 |\ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \widehat{\phi_{|K}} \in (R_2(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \otimes P_2(\widehat{x_3}))^2\right\}.$$

□

Nous donnons en annexe un programme FORTRAN de l'élément fini de pression pour l'hexaèdre.

3.3.3 Vérification des inégalités de stabilité.

Dans la suite, nous supposons que le maillage $\mathcal{C}_h$ est régulier et qu'il satisfait l'hypothèse inverse "verticale" $\frac{h_{min}}{h_{max}} \geq \mu > 0$, où $2h_{min}$ (resp. $2h_{max}$) désigne la plus petite (resp. grande) arête verticale des éléments de $\mathcal{C}_h$. Nous donnons les preuves pour l'élément prismatique, elles s'étendent aisément au cas hexaédrique.

Proposition 1 *L'élément fini hydrostatique vérifie l'inégalité hydrostatique.*

propriété caractéristique de ce que nous appelons un élément fini hydrostatique.

Preuve. L'idée de base est que si $u_3 \in W_h$ alors $\partial_3 u_3$ est "presque" dans P_h, En effet, soient B_i, B_i', B_i'' les points de K homologues aux $A_i, A_i', A_i'',\ i = 1,2,3$ de $\widehat{K}$ (voir *fig.* 3.1); comme les éléments sont tous verticaux, $\mathbf{B_i'B_i''} = 2h_i\mathbf{e_3},\ i = 1,2,3$, par dérivation composée on a alors

$$\frac{\partial \hat{u_3}}{\partial \hat{x_3}} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot h_K(\hat{x_1}, \hat{x_2}) \tag{3.19}$$

où $h_K(\hat{x_1}, \hat{x_2}) = (1 - \hat{x_1} - \hat{x_2})h_0 + \hat{x_1}h_1 + \hat{x_2}h_2$. Ainsi $\min(h_0, h_1, h_2) \leq h_K \leq \max(h_0, h_1, h_2)$. Soit $u_3 \in W_h$, sur l'élément K prenons

$$\widehat{q_{|K}(x)} = \frac{\partial \hat{u_3}}{\partial \hat{x_3}}, \tag{3.20}$$

on voit aisément que $q \in P_h$, en particulier q est continue aux interfaces verticales. Minorons

$$(\partial_3 u_3, q) = \sum_K \int_K \partial_3 u_3\, q \,\mathrm{dx}$$

par (3.19) et (3.20)

$$(\partial_3 u_3, q) \geq h_{min}\|\partial_3 u_3\|_0^2 \tag{3.21}$$

$$\|q\|_0 \leq h_{max}\|\partial_3 u_3\|_0 \tag{3.22}$$

De (3.21) et (3.22) on déduit

$$\frac{(\partial_3 u_3, q)}{\|q\|_0} \geq \frac{h_{min}}{h_{max}} \cdot \|\partial_3 u_3\|_0.$$

L'hypothèse de régularité "verticale" du maillage garantit enfin que $\frac{h_{min}}{h_{max}} \geq C$ constante strictement positive indépendante de la taille du maillage. ∎

Remarque. On peut voir que l'élément de Hood-Taylor R_2/R_1, ainsi que l'élément de Bercovier-Pironneau $8R_1/R_1$ *ne vérifient pas* l'inégalité hydrostatique et peuvent donner lieu à des vitesses verticales parasites. □

Pour chaque sommet S_0 intérieur à Ω, formons le macro-élément M composé de tous les éléments le contenant (voir *fig.* 3.2). Nous supposons aussi que le maillage $\mathcal{C}_h$ considéré vérifie les conditions (M2)-(M4) du théorème 6, qui sont aisées à respecter dans la pratique, ainsi que l' hypothèse de régularité. Il reste à vérifier (M1) pour prouver la

Proposition 2 *L'élément fini hydrostatique vérifie l'inégalité de Brezzi.*

Preuve. Faisons la preuve pour le macro esquissé *fig.*3.2, les autres cas sont analogues. Notons $p(A_i)$, $p(B_i)$, $i = 0,\ldots,5$ les degrés de liberté de p sur les douze arêtes verticales du macro-élément. Il s'agit de prouver

$$\forall v \in V_{0,M},\ (\mathrm{div}v, p)_M = 0 \Rightarrow p = constante \tag{3.23}$$

$$(\mathrm{div}v, p)_M = -\sum_{K\subset M}\int_K \nabla p \cdot v \mathrm{dx} + \int_{\partial K} pv\cdot \mathbf{n}\mathrm{ds}$$

à l'aide de la formule de Green. Comme p est continue aux interfaces verticales, les intégrales de bord correspondantes se détruisent mutuellement. De plus $v = 0$ sur les parois externes, donc ne subsistent que les intégrales sur le plancher du premier étage (contenant S_0)

$$(\mathrm{div}v, p)_M = -\sum_{K\subset M}\int_K \nabla p \cdot v \mathrm{dx} + \sum_{\sigma}\int_{\sigma}[p_+ - p_-]v\cdot \mathbf{n}\mathrm{ds}$$

où p_-(resp. p_+) concerne le rez de chaussé (resp. le premier étage), $\mathbf{n}$ désigne la normale dirigée vers le bas et σ les faces composant le plancher du premier étage.

Il reste à choisir des vitesses virtuelles révélatrices. Soit v nul sur tous les sommets sauf en S_0 où $v = (0,0,1)$ On a $\nabla p\cdot v = 0$ car $\partial_3 p = 0$ donc

$$(\mathrm{div}v, p)_M = \sum_{j=0}^{5}\int_{\sigma_j}[p_+ - p_-]v_3\cdot n_3\mathrm{ds}$$

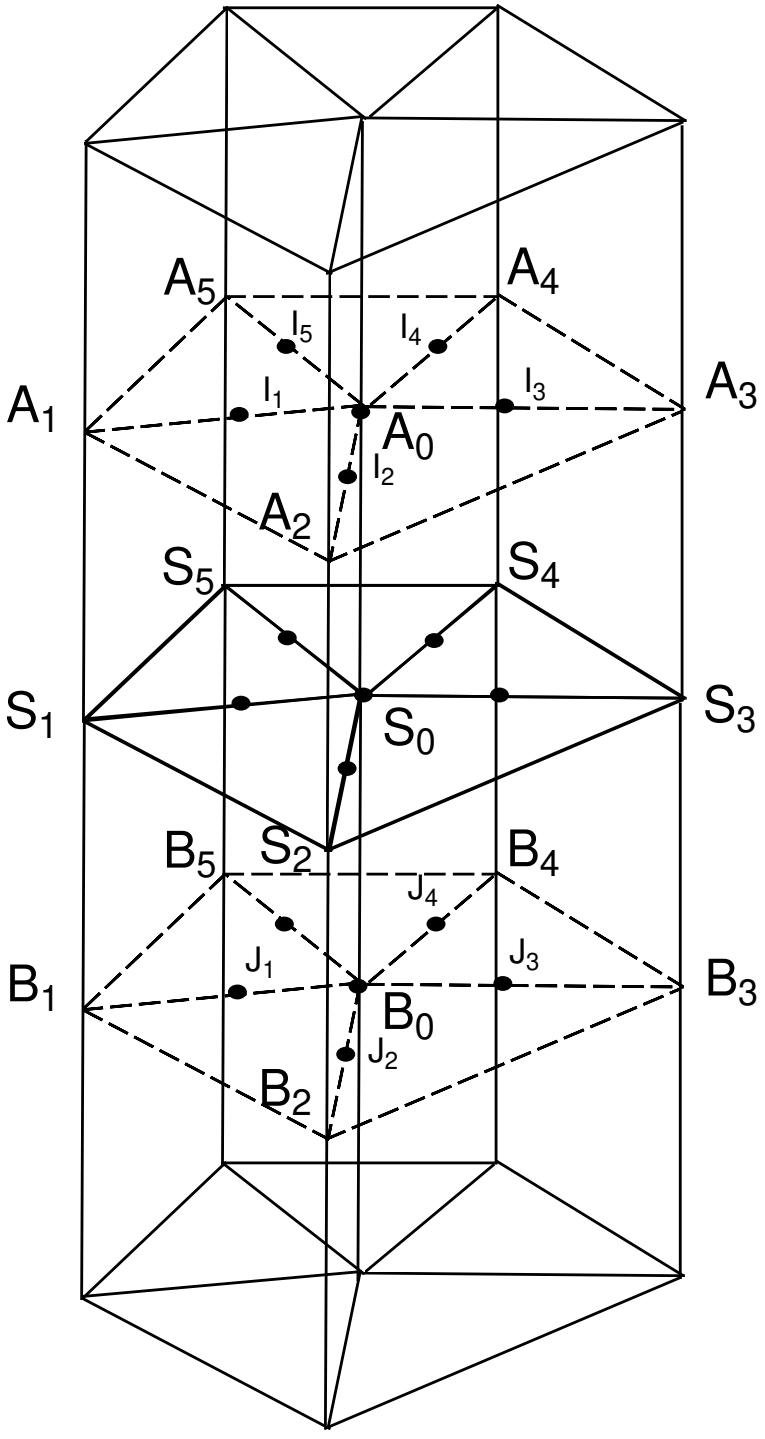


Figure 3.2: Exemple de macro-élément

où σ_j désigne la face (S_0, S_j, S_{j+1}). En utilisant une formule de quadrature, on obtient

$$(\mathrm{div} v, p)_M = \sum_{j=0}^{5} \omega_j (p(A_j) - p(B_j)),\ \omega_j > 0. \tag{3.24}$$

Puis on choisit v nul sur tous les sommets sauf en I_j où $v = \mathbf{A_0 A_j}$. On a

$$(\mathrm{div} v, p)_M = \int_{K_{j-1}} \nabla p \cdot v \mathrm{dx} + \int_{K_j} \nabla p \cdot v \mathrm{dx} = C(p_j - p_0).$$

où K_j désigne l'élément posé sur la face σ_j, et $C > 0$. D'après (3.23) ceci doit être nul donc

$$p(A_j) = p(A_0)\ i = 0, \ldots, 5.$$

En travaillant sur le premier étage, on obtient de même

$$p(B_i) = p(B_0),\ i = 0, \ldots, 5.$$

Enfin en portant dans (3.24) on obtient

$$p = constante$$

■

Des propositions 1, 2 et du théorème 5 on déduit le

Théorème 7 *La discrétisation par éléments finis hydrostatiques de (3.8) est bien posée.*

3.3.4 Estimation d'erreur.

Introduisons les espaces de Sobolev anisotropes

$$H^k(\partial_3, \Omega) = \left\{ w \in H^{k-1}(\Omega) |\ \partial_3 w \in H^{k-1}(\Omega) \right\}$$

D'après le théorème 2, nous pouvons assurer le

Théorème 8 *On a l'estimation d'erreur*

$$\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 + \|p - p_h\|_0 \leq C \inf_{(\phi_h, \chi_h, \psi_h) \in V_h \times W_h \times P_h} \{ \|u_1 - \phi_{1h}\|_1 + \|u_2 - \phi_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 \chi_h\|_0 + \|p - \psi_h\|_0 \}.$$

Si de plus $(u_1, u_2, u_3) \in H^3(\Omega)^2 \times H^3(\partial_3, \Omega)$, $p \in H^2(\Omega)$ *on obtient avec l' élément fini hydrostatique*

$$\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 + \|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 + \|p - p_h\|_0 = O(h). \tag{3.25}$$

Preuve. La première affirmation résulte du théorème 2.
Pour u_1, u_2, les résultats classiques d'approximation par interpolation (voir [16]) fournissent $\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_2 - u_{2h}\|_1 = O(h^2)$.
Pour u_3 il suffit de remarquer que $u_3 \in H^2(\Omega)$ et que $\|\partial_3 u_3 - \partial_3 u_{3h}\|_0 \leq \|u_3 - u_{3h}\|_1 = O(h)$.
D'autre part grâce à l'hypothèse hydrostatique p ne dépend que de x_1, x_2 donc il suffit de choisir $\psi_h(x_1, x_2)$ interpolant p sur Γ_s pour obtenir $\|p - \psi_h\|_0 = O(h^2)$. ∎

Remarque. L'estimation d'erreur précédente n'est pas optimale, c'est le terme dû à la vitesse verticale qui en corrompt l'ordre. □

Chapitre 4

Équations de Navier-Stokes en bassin peu profond.

Dans ce chapitre, nous traitons le cas des équations de Navier-Stokes instationnaires linéarisées, avec l'approximation hydrostatique. Nous n'avons pas pu obtenir de résultat d'existence dans le cas non-linéaire, faute de contrôle suffisant sur la vitesse verticale.
Nous notons la vitesse advective $\mathbf{a}(x,t)$ avec:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{cas non-linéaire.} \\ \mathbf{a} & \text{cas linéaire.} \end{cases} \end{gathered}$$

Rappelons les équations des modèles présentés au chapitre 2. Les notations sont les mêmes.

4.1 Modèle Renormalisé.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad (4.2)$$

$$\epsilon^2 \left\{\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_3 - \Delta_\nu u_3\right\} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \qquad (4.5)$$

$$\nu_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \qquad (4.6)$$

$$\mathbf{u}(.,t=0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad (4.7)$$

4.2 Modèle "Hydrostatique".

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.11}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{4.12}$$

$$\nu_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta_1, \quad \nu_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \tag{4.13}$$

$$u_1(.,t=0) = u_2(.,t=0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.14}$$

Remarque. L'absence de $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ des équations ne permet pas de préciser de condition initiale pour u_3. □

4.3 Espaces fonctionnels et notations utilisés.

$$\mathbf{L^p}(\Omega) = L^p(\Omega)^3.$$

Le produit scalaire de L^2 ou $\mathbf{L^2}$ est noté $(\cdot,\cdot)$, La norme $\|\cdot\|_0$.

$$\mathbf{H} = \left\{\varphi \in \mathbf{L^2}(\Omega);\ \operatorname{div}\varphi = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)\right\}$$

$$H_b^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_b\right\}$$

$$\mathcal{C}_b^\infty(\Omega) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\bar\Omega);\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_b\right\}.$$

$$H(\partial_3,\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega);\ \partial_3\varphi \in L^2(\Omega)\right\}$$

$$\|\varphi\|^2_{H(\partial_3,\Omega)} = \|\varphi\|_0^2 + \|\partial_3\varphi\|_0^2$$

$$H_0(\partial_3,\Omega) = \{\varphi \in H(\partial_3,\Omega);\ \varphi n_3 = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\}$$

De tels espaces de Sobolev anisotropes sont étudiés dans [57].

$$\mathbf{V}\,(resp.\,\mathbf{W}) = \left\{\mathbf{u} \in H_b^1 \times H_b^1 \times H_0^1\,(resp.\,H_0(\partial_3));\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\ p.p.\right\}$$

On se donne dans la suite

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in L^2(0,T;\mathbf{W}), \tag{4.15}$$

$$\text{avec de plus } a_3 \in L^2(0,T;L^3(\Omega)). \tag{4.16}$$

Remarque. On pourrait espérer que $H_0(\partial_3) \hookrightarrow L^3$, rendant l'hypothèse (4.16) superflue mais il n'en est rien. On peut en effet construire ψ dans $H_0(\partial_3)$, sans que ψ soit dans $L^3(\Omega)$. Il suffit de prendre par exemple une fonction

$$\psi(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1,x_2)\cdot x_3(h(x_1,x_2)-x_3),$$

où $\phi(x_1,x_2)$ est dans $L^2(\Omega)$ mais pas dans $L^3(\Omega)$. □

On se donne également

$$\theta_1,\, \theta_2 \in L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_s)). \tag{4.17}$$

Remarque. Les fonctions θ_1, θ_2 correspondent aux tractions horizontales du vent sur la surface du lac, il est donc naturel de les supposer essentiellement bornées. □ *Même en cas d'ouragan.*

Remarque. On a évidemment $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{W}$ avec injection dense. En effet

$$\mathcal{C}_b^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}_b^\infty(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathbf{V}.$$

□

Remarque. Nous avons donné à $\mathbf{a}$ la régularité minimale, afin d'englober autant que faire se peut le cas non-linéaire. □

Nous aurons besoin du

Lemme 3

$$\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla u_j)v_j = -\int_\Omega u_j(\mathbf{a}\nabla\cdot v_j) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in H_b^1\times H_b^1\times H_0(\partial_3)$$

Preuve. Il suffit d'intégrer par parties en utilisant que

$$\mathbf{a}\cdot\nabla u_j = \operatorname{div}(u_j\mathbf{a})$$

grâce à la divergence nulle de $\mathbf{a}$ et les conditions limites au bord du domaine. ■

Rappelant (chap. 2) que $\Delta_\nu \varphi = \mathrm{div}(\nu \nabla \varphi)$, où $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}$ définissons naturellement

$$\nabla_\nu \varphi = \nu^{1/2} \nabla \varphi.$$

Une simple intégration par parties permet d'établir le

Lemme 4 *Soient $u_i, v_i \in H^1_b$, $i = 1,2$ vérifiant $\nu_3 \partial_3 u_i = \theta_i$, $i = 1,2$, alors*

$$(-\Delta_\nu u_i, v_i) = (\nabla_\nu u_i, \nabla_\nu v_i) - < \theta_i, v_i >_{H^{-1/2}(\Gamma_s), H^{1/2}(\Gamma_s)} .$$

4.4 Forme faible renormalisée.

Supposons que (4.1-4.7) admette une solution suffisamment régulière, en intégrant par parties, en utilisant les conditions limites, initiales et les lemmes précédents, on obtient la formulation faible suivante:

Etant donnés $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(0,T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$, trouver $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$

$$\int_0^T (u_1, \frac{\partial v_1}{\partial t})\,\mathrm{dt} + \int_0^T (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1)\,\mathrm{dt} + f \cdot \int_0^T (u_2, v_1)\,\mathrm{dt} - \int_0^T (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1)\,\mathrm{dt}$$

$$+ \int_0^T (u_2, \frac{\partial v_2}{\partial t})\,\mathrm{dt} + \int_0^T (u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2)\,\mathrm{dt} - f \cdot \int_0^T (u_1, v_2)\,\mathrm{dt} - \int_0^T (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2)\,\mathrm{dt}$$

$$+\epsilon^2 \cdot \{ \int_0^T (u_3, \frac{\partial v_3}{\partial t})\,\mathrm{dt} + \int_0^T (u_3, \mathbf{a}\cdot\nabla v_3)\,\mathrm{dt} - \int_0^T (\nabla_\nu u_3, \nabla_\nu v_3)\,\mathrm{dt}\}$$

$$= -\int_0^T < \theta_1, v_1 >\,\mathrm{dt} - \int_0^T < \theta_2, v_2 >\,\mathrm{dt} \qquad (4.18)$$

$$\forall\, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{V});\ \mathbf{v}(T) = 0.$$

Il est bien connu [32]-[35]-[58] que (4.18) admet une solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon$ pour chaque $\epsilon > 0$. De plus $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{H})$ et $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathcal{C}(0,T)$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

4.5 Forme faible hydrostatique.

De même une formulation faible de (4.8-4.14) est:

Etant donnés θ_1, $\theta_2 \in L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_s))$, trouver $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{W})$

$$\int_0^T (u_1, \frac{\partial v_1}{\partial t})\,\mathrm{dt} + \int_0^T (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1)\,\mathrm{dt} + f\cdot\int_0^T (u_2, v_1)\,\mathrm{dt} - \int_0^T (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1)\,\mathrm{dt}$$
$$+ \int_0^T (u_2, \frac{\partial v_2}{\partial t})\,\mathrm{dt} + \int_0^T (u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2)\,\mathrm{dt} - f\cdot\int_0^T (u_1, v_2)\,\mathrm{dt} - \int_0^T (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2)\,\mathrm{dt}$$

$$= -\int_0^T <\theta_1, v_1>\,\mathrm{dt} - \int_0^T <\theta_2, v_2>\,\mathrm{dt} \qquad (4.19)$$
$$\forall\, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{W});\ \mathbf{v}(T) = 0.$$

Vérifions que tous les termes figurant dans la formulation ci-dessus ont bien un sens. Les seuls posant problème sont

$$\int_0^T (u_i, \mathbf{a}\cdot\nabla v_i),\ \mathrm{dt} \quad i = 1,2.$$

Or par le théorème d'injection de Sobolev

$$u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^6(\Omega)),$$

pour la même raison

$$a_j \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^3(\Omega)),\ j = 1,2$$

l'hypothèse (4.16) assurant la même qualité à a_3, d'autre part v_1, $v_2 \in \mathcal{C}^1(0,T;H^1 \times H^1)$ donc $\nabla v_1, \nabla v_2 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, l'inégalité de Hölder donne alors:

$$\int_0^T (u_i, \mathbf{a}\cdot\nabla v_i)\,\mathrm{dt} \le \int_0^T \|u_i\|_6 \|\mathbf{a}\|_3 \|\nabla v_i\|_2\,\mathrm{dt}$$
$$\le \|u_i\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \|\mathbf{a}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L^3}(\Omega))} \|\nabla v_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de la convergence lorsque $\epsilon \to 0$ d'une solution de (4.18) vers une solution du problème (4.19) . Nous utilisons la méthode de compacité [35], basée sur des estimations à priori d'énergie.
Nous aurons besoin pour cela d'une autre formulation faible, déduite de (4.18), que nous présentons ci-après.

4.6 Majorations à priori.

4.6.1 Forme faible spatiale.

En prenant des fonctions tests de la forme

$$\phi(t)\mathbf{v}(x),\ \phi \in \mathcal{D}(0,T),\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

dans (4.18), on obtient la formulation suivante.

Etant donnés $\theta_1,\ \theta_2 \in L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_s))$, trouver $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ tel que

$$\begin{aligned}
&\frac{d(u_1,v_1)}{dt} - (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) - f\cdot(u_2,v_1) + (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1) \\
&+\frac{d(u_2,v_2)}{dt} - (u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) + f\cdot(u_1,v_2) + (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2) \\
&+\epsilon^2\cdot\{\frac{d(u_3,v_3)}{dt} - (u_3, \mathbf{a}\cdot\nabla v_3) + (\nabla_\nu u_3, \nabla_\nu v_3)\} \\
=&< \theta_1, v_1 > + < \theta_2, v_2 >, \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T)\ \forall \mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbf{V}. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon$ désigne dans ce qui suit une solution du problème renormalisé.

4.6.2 Égalité d'énergie.

Prenant $\mathbf{v} := \mathbf{u}$ dans (4.20), par symétrie les termes de Coriolis disparaissent, du fait de la divergence nulle les termes non-linéaires également donc il reste

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \epsilon^2\|u_3\|^2\right) \\
&+ \|\nabla_\nu u_1\|^2 + \|\nabla_\nu u_2\|^2 + \epsilon^2\|\nabla_\nu u_3\|^2 \\
&= \int_{\Gamma_s} u_1\,\theta_1\ \mathrm{ds} \int_{\Gamma_s} u_2\,\theta_2\ \mathrm{ds} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Remarque. Ceci s'interprète comme un bilan d'énergie [1]: Énergie cinétique + Energie dissipée par viscosité = Energie fournie par le vent. □

Nous allons prouver la

Proposition 3 *$u_1, u_2, \epsilon u_3$ sont bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, et dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.*

[1] il s'agit en fait de densité de puissance

Preuve. Grâce à (4.17), on majore le second membre de (4.21) par

$$\|\theta_1\|_{-1/2}\|u_1\|_{1/2} + \|\theta_2\|_{-1/2}\|u_2\|_{1/2},$$

D'autre part l'inégalité de Poincaré verticale, applicable puisque $u_i = 0$ sur Γ_b, et la continuité de la trace donnent

$$\|u_i\|_{1/2} \leq C \cdot \|\partial_3 u_i\|_0 \; i = 1, 2.$$

De (4.21) on tire alors l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \epsilon^2\|u_3\|^2\right) + \nu_1(\|\partial_1 u_1\|_0^2 + \|\partial_1 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_1 u_3\|_0^2) \\
&+\nu_2(\|\partial_2 u_1\|_0^2 + \|\partial_2 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_2 u_3\|_0^2) + \nu_3(\|\partial_3 u_1\|_0^2 + \|\partial_3 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_3 u_3\|_0^2) \\
&\leq C(\|\theta_1\|_{-1/2}\|\partial_3 u_1\|_0 + \|\theta_2\|_{-1/2}\|\partial_3 u_2\|_0) \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité élémentaire

$$ab \leq 1/2(\eta a^2 + b^2/\eta), \; \forall a, b, \eta > 0 \qquad (4.23)$$

avec $\eta = \nu_3/C$ pour majorer le second membre de (4.22) et obtenir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \epsilon^2\|u_3\|^2\right) + \nu_1(\|\partial_1 u_1\|_0^2 + \|\partial_1 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_1 u_3\|_0^2) \\
&+\nu_2(\|\partial_2 u_1\|_0^2 + \|\partial_2 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_2 u_3\|_0^2) + \frac{\nu_3}{2}(\|\partial_3 u_1\|_0^2 + \|\partial_3 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_3 u_3\|_0^2) \\
&\leq C(\|\theta_1\|_{-1/2}^2 + \|\theta_2\|_{-1/2}^2) \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

où la constante C flotte au gré des équations. Utilisant à nouveau (4.17), on aboutit à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \epsilon^2\|u_3\|^2\right) \\
&+\sum_{i=1}^{2}\nu_i(\|\partial_i u_1\|_0^2 + \|\partial_i u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_i u_3\|_0^2) \\
&+\frac{\nu_3}{2}(\|\partial_3 u_1\|_0^2 + \|\partial_3 u_2\|_0^2 + \epsilon^2\|\partial_3 u_3\|_0^2) \leq C \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Le reste de la preuve suit une démarche classique [58], de (4.25) on tire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \epsilon^2\|u_3\|^2\right) \leq C$$

d'où, en intégrant et en tenant compte de la condition initiale de repos

$$\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2 + \epsilon^2\|u_3(t)\|^2 \leq C \cdot T, \; \forall t \in [0, T]$$

Donc $u_1, u_2, \epsilon u_3$ sont bornées dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

D'autre part, intégrons entre 0 et T l'inégalité (4.25):

$$\|u_1(T)\|^2 + \|u_2(T)\|^2 + \epsilon^2\|u_3(T)\|^2$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \nu_i \int_0^T (\|\partial_i u_1\|_0^2 + \|\partial_i u_2\|_0^2 + \epsilon^2 \|\partial_i u_3\|_0^2)\,\mathrm{dt}$$

$$+\frac{\nu_3}{2}\int_0^T (\|\partial_3 u_1\|_0^2 + \|\partial_3 u_2\|_0^2 + \epsilon^2 \|\partial_3 u_3\|_0^2)\,\mathrm{dt} \leq C \cdot T$$

Ainsi $u_1, u_2, \epsilon u_3$ sont bornées dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. ∎

On en déduit le

Corollaire 1 *$\partial_3 u_3$ est borné dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, u_3 est borné dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

Preuve. Par la proposition précédente, $\partial_1 u_1$ et $\partial_2 u_2$ sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, or $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ donc $\partial_3 u_3$ est borné dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Enfin l'inégalité de Poincaré verticale, applicable puisque $u_3 = 0$ sur Γ_s, donne

$$\|u_3\|_0 \leq C\,\|\partial_3 u_3\|_0$$

donc $\partial_3 u_3$ est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. ∎

4.7 Existence de la solution (cas linéarisé).

Les estimations précédentes nous permettent d'énoncer le

Théorème 9 *Pour $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_s))$, il existe une solution $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{W})$ du problème hydrostatique (4.19), obtenue comme limite d'une solution $\mathbf{u}^\epsilon$ du problème renormalisé (4.18).*

La démonstration de ce théorème s'effectue par un passage à la limite dans (4.18) que nous détaillons dans le paragraphe qui suit.

4.7.1 Passage à la limite.

Grâce à la proposition 3 et au corollaire 1, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, quand $\epsilon \to 0$:

$$(u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, \epsilon \cdot u_3^\epsilon) \rightharpoonup (u_1^\star, u_2^\star, w^\star) \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathbf{L^2}(\Omega))\ faible-\star. \quad (4.26)$$

$$(u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, \epsilon u_3^\epsilon) \rightharpoonup (u_1, u_2, w) \text{ dans } L^2(0,T;H_b^1 \times H_b^1 \times H_0^1)\ faible. \quad (4.27)$$

$$u_3^\epsilon \rightharpoonup u_3 \text{ dans } L^2(0,T;H_0(\partial_3))\ faible. \quad (4.28)$$

Puisque $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^1(0,T;L^2(\Omega))$, de (4.26)-(4.28) on tire

$$(u_1^\star, u_2^\star, w^\star) = (u_1, u_2, w) \in L^\infty(0,T;\mathbf{L^2}(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{V}).$$

D'autre part, comme $\operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon = 0$, $\forall \epsilon$, on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Donc $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{W})$.

Remarque. D'après le corollaire 1, u_3^ϵ est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, donc

$$\epsilon u_3^\epsilon \to 0 \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Avec (4.26-4.27), il vient $w = 0$. □

Considérons alors la forme faible (4.18), et fixons

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{V});\ \mathbf{v}(T) = 0.$$

Examinons la convergence de chacun des termes composant (4.18) lorsque $\epsilon \to 0$.

Par (4.26):

$$\int_0^T (u_i^\epsilon, \frac{\partial v_i}{\partial t})\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (u_i, \frac{\partial v_i}{\partial t})\,\mathrm{dt} \quad i = 1,2$$

$$\epsilon^2 \cdot \{\int_0^T (u_3^\epsilon, \frac{\partial v_3}{\partial t})\,\mathrm{dt} = \epsilon \cdot \int_0^T (\epsilon u_3^\epsilon, \frac{\partial v_3}{\partial t})\,\mathrm{dt} \to 0.$$

De même:

$$\int_0^T (u_2^\epsilon, v_1)\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (u_2, v_1)\,\mathrm{dt},$$

$$\int_0^T (u_1^\epsilon, v_2)\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (u_1, v_2)\,\mathrm{dt}.$$

Par (4.27):

$$\int_0^T (\nabla_\nu u_i^\epsilon, \nabla_\nu v_i)\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (\nabla_\nu u_i, \nabla_\nu v_i)\,\mathrm{dt} \quad i = 1,2$$

$$\epsilon^2 \cdot \int_0^T (\nabla_\nu u_3^\epsilon, \nabla_\nu v_3)\,\mathrm{d}t = \epsilon \cdot \int_0^T (\nabla_\nu \epsilon u_3^\epsilon, \nabla_\nu v_3)\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Pour les termes faisant intervenir l'advection, nous supposerons de plus $v_i \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0,T])$ $i = 1,2,3$, de sorte que $\mathbf{a} \cdot \nabla v_i \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$.

la régularité des fonctions test est à discrétion.

Par (4.26) à nouveau:

$$\int_0^T (u_i^\epsilon, \mathbf{a} \cdot \nabla v_i)\,\mathrm{d}t \to \int_0^T (u_i, \mathbf{a} \cdot \nabla v_i)\,\mathrm{d}t, \quad i = 1,2$$

De même:

$$\epsilon^2 \cdot \int_0^T (u_3^\epsilon, \mathbf{a} \cdot \nabla v_3)\,\mathrm{d}t = \epsilon \cdot \int_0^T (\epsilon u_3^\epsilon, \mathbf{a} \cdot \nabla v_3)\,\mathrm{d}t \to 0.$$

On conclut enfin par la densité de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0,T])^3 \cap \mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{V})$ dans $\mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{W})$ que $(u_1,u_2,u_3) \in L^2(0,T;\mathbf{W})$ est une solution faible du problème hydrostatique (4.19).
En effet $\mathcal{C}^1\,(0,T;\,\mathcal{C}_b^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_b^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)) \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}\times[0,T])^3 \cap \mathcal{C}^1(0,T;\mathbf{V})$.

4.8 Obtention de la pression.

Nous utilisons le lemme suivant sur les distributions à valeurs vectorielles dû à J. Simon [50] qui généralise le fameux lemme de G. de Rham [19]-[58]:

Lemme 5 *Soit $g \in \mathcal{D}'(]0,T[;(H^{-1}(\Omega))^3)$ tel que*

$$< g, v >_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3} = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3,\ \mathrm{div}\, v = 0.$$

Alors il existe $q \in \mathcal{D}'(]0,T[;L^2(\Omega))$ tel que

$$g = \nabla q.$$

Si de plus pour $s \in \mathbb{R}, 1 \le r \le \infty$, on a $g \in W^{s,r}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ alors on peut choisir $q \in W^{s,r}(0,T;L^2(\Omega))$.

De ce lemme nous allons déduire le

Théorème 10 *Il existe $p \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ telle que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\
\frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in (H_0^1(\Omega))^3$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. En prenant des fonctions tests de la forme

$$\phi(t)\mathbf{v}(x),\ \phi \in \mathcal{D}(0,T)$$

dans (4.19) on obtient la forme faible spatiale suivante

$$\begin{aligned}\frac{d(u_1,v_1)}{dt} - (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) - f\cdot(u_2,v_1) + (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1)\\ +\frac{d(u_2,v_2)}{dt} - (u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) + f\cdot(u_1,v_2) + (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2)\\ = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T). \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Posons

$$g = (\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_1 - \Delta_\nu u_1 - f u_2, \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{a}\cdot\nabla u_2 - \Delta_\nu u_2 + f u_1, 0).$$

On a $g \in \mathcal{D}'(]0,T[; (H^{-1}(\Omega))^3)$, et

$$< g, v >_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3} = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3,\ \operatorname{div} v = 0.$$

Par le lemme précédent, il existe donc $p \in \mathcal{D}'(]0,T[; L^2(\Omega))$ tel que $g = \nabla p$. Il reste à montrer que $g \in W^{-1,\infty}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$. Par définition:

$$W^{-1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega)) = \left\{ \phi_0 + \frac{d\phi_1}{dt} \mid \phi_i \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \right\}.$$

Or $u_i \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ donc

$$u_i \; et \; \frac{\partial u_i}{\partial t} \in W^{-1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

D'autre part $\|\Delta_\nu u_i\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla_\nu u_i\|_{L^2(\Omega)}$. Or $u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ donc $\|\nabla_\nu u_i\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$. Donc $\Delta_\nu u_i \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Lemme 6 *Soit* $\mathbf{X}$ *un Banach,*

$$L^1(0,T;\mathbf{X}) \subset W^{-1,\infty}(0,T;\mathbf{X})$$

En effet, soit $\psi \in L^1(0,T;\mathbf{X})$, posons $\varphi(t) = \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s$. Alors $\varphi \in L^\infty(0,T;\mathbf{X})$ donc $\psi = \frac{d\varphi}{dt} \in W^{-1,\infty}(0,T;\mathbf{X})$. □

Du lemme on déduit que $\Delta_\nu u_i \in W^{-1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Considérons maintenant les termes $\mathbf{a}\cdot\nabla u_i = \operatorname{div}(u_i\mathbf{a})$. En vertu du théorème

d'injection de Sobolev $u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^6(\Omega))$. Pour la même raison $a_j \in L^2(0,T;L^3(\Omega))$ $j = 1,2$. Par l'hypothèse (4.16), $a_3 \in L^2(0,T;L^3(\Omega))$. Donc par l'inégalité de Hølder:

$$u_i a_j \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),\ j = 1,2.$$

Ainsi

$$\operatorname{div}(u_i \mathbf{a}) \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset W^{-1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

par le lemme précédent. Tous les termes constituant g sont donc dans $W^{-1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))$. ∎

Remarque. On ne peut se dispenser de l'hypothèse (4.16). Sans celle-ci on a seulement $a_3 \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $u_i \in L^2(0,T;L^6(\Omega))$, donc par Hølder

$$u_i a_3 \in L^1(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \not\subset L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

□

4.9 Sens de la condition initiale et unicité.

Définissons

$$W_H = \left\{(u_1,u_2) \in H_b^1 \times H_b^1 \mid \exists u_3 \in H_0(\partial_3);\ \mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3) \in W\right\}$$

Cet espace est en fait le projeté horizontal de W. Munissons le de la semi-norme produit sur $H_b^1 \times H_b^1$.

Proposition 4 *W_H est un espace de Hilbert.*

Preuve. Considérons $(u_1^n, u_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans W_H. Grâce à la divergence nulle on a: $\partial_3(u_3^n - u_3^m) = -\partial_1(u_1^n - u_1^m) - \partial_2(u_2^n - u_2^m)$. Donc $(u_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H_0(\partial_3)$. Ainsi il existe $u_3 \in H_0(\partial_3)$ tel que $u_3^n \to u_3$. D'autre part $\operatorname{div}\mathbf{u}^n = 0$, $\forall n$. Donc en faisant $n \to \infty$, on obtient pour $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$: $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, $\forall n$. ∎

Nous étudions maintenant la continuité de $\mathbf{u}_H = (u_1,u_2)$. Pour cela nous aurons besoin de la

Proposition 5

$$\frac{d\mathbf{u}_H}{dt} \in L^1(0,T;W_H')$$

Preuve. On a $\mathbf{u}_H = (u_1, u_2) \in L^2(0,T;W_H)$, donc

$$\frac{d\mathbf{u}_H}{dt} \in \mathcal{D}'(]0,T[;W_H).$$

Pour $t \in (0,T)$, notons $\Phi(t)$ la forme linéaire

$$\mathbf{v}_H = (v_1, v_2) \in W_H \mapsto (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) + f\cdot(u_2, v_1) - (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1)$$

$$+(u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) - f\cdot(u_1, v_2) - (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2) + <\theta_1, v_1> + <\theta_2, v_2> \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $\Phi(t) \in W_H'$ et que $\Phi \in L^1(0,T;W_H')$. En effet, par Hölder

$$|(u_i, \mathbf{a}\cdot\nabla v_i)| \leq \|u_i\|_6 \|\mathbf{a}\|_3 \|\nabla v_i\|_2$$

$$\leq C\|u_i\|_{H_b^1}\|\mathbf{a}\|_3\|v_i\|_{H_b^1}, \quad i = 1,2.$$

D'autre part, par continuité de la trace

$$|<\theta_i, v_i>| \leq \|\theta_i\|_{-1/2}\|v_i\|_{1/2}.$$

$$\leq C\|\theta_i\|_{-1/2}\|v_i\|_{H_b^1}.$$

Les autres termes ne posant pas de difficulté, on obtient

$$\|\Phi(t)\|_{W_H'} \leq C(\|\mathbf{a}\|_3\|\mathbf{u}_H\|_{W_H} + \|\mathbf{u}_H\|_{W_H} + \|\theta_1\|_{-1/2} + \|\theta_2\|_{-1/2}).$$

Comme $\mathbf{a} \in L^2(0,T;\mathbf{L^3}(\Omega))$ et $\mathbf{u}_H \in L^2(0,T;W_H)$

$$\|\mathbf{a}\|_3\|\mathbf{u}_H\|_{W_H} \in L^1(0,T).$$

De plus $\|\mathbf{u}_H\|_{W_H} \in L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$ et $\|\theta_i\|_{-1/2} \in L^\infty(0,T) \subset L^1(0,T)$. Ainsi $\|\Phi(t)\|_{W_H'} \in L^1(0,T)$, autrement dit

$$\Phi \in L^1(0,T;W_H').$$

Soit $\mathbf{w}_H = (w_1, w_2) \in W_H$, l'application

$$\mathbf{v}_H = (v_1, v_2) \in W_H \mapsto (\mathbf{w}_H, \mathbf{v}_H) = (w_1, v_1)_{L^2} + (w_2, v_2)_{L^2} \in \mathbb{R}$$

est linéaire continue, donc par la théorie des distributions à valeurs vectorielles

$$(\frac{d\mathbf{u}_H}{dt}, \mathbf{v}_H) = \frac{d(u_1, v_1) + (u_2, v_2)}{dt} \in \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \mathbf{v}_H \in W_H.$$

En prenant des fonctions tests de la forme

$$\psi(t)\mathbf{v}(x),\ \psi \in \mathcal{D}(0,T),\ \mathbf{v} \in \mathbf{W}$$

dans (4.19) on obtient la forme faible spatiale suivante

$$\frac{d(u_1, v_1) + (u_2, v_2)}{dt} = (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) + f\cdot(u_2, v_1) - (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1)$$

$$+(u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) - f\cdot(u_1, v_2) - (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T). \quad (4.30)$$

Avec la définition de Φ

$$(\frac{d\mathbf{u}_H}{dt}, \mathbf{v}_H) = < \Phi(t), \mathbf{v}_H >_{W_H', W_H} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \mathbf{v}_H \in W_H,$$

donc $(\frac{d\mathbf{u}_H}{dt}, \mathbf{v}_H) \in L^1(0,T)$, et

$$\frac{d\mathbf{u}_H}{dt} \in L^1(0,T; W_H').$$

■

Comme $\mathbf{u}_H \in L^2(0,T;W_H)$, la proposition précédente donne, après modification éventuelle sur une partie négligeable de $(0,T)$,

$$\mathbf{u}_H \in \mathcal{C}(0,T;W_H').$$

Proposition 6 *Pour tout $(v_1, v_2) \in W_H$ la fonction*

$$t \mapsto (u_1(t), v_1) + (u_2(t), v_2)$$

est absolument continue sur $[0,T]$.

Preuve. En effet par la proposition précédente

$$\frac{d(u_1, v_1) + (u_2, v_2)}{dt} \in L^1(0,T).$$

■

On peut dès lors préciser le sens de la condition initiale. La forme faible spatiale (4.30) s'écrit:

$$\frac{d(u_1,v_1)}{dt} - (u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) - f\cdot(u_2,v_1) + (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1) - <\theta_1, v_1>$$

$$+\frac{d(u_2,v_2)}{dt} - (u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) + f\cdot(u_1,v_2) + (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2) - <\theta_2, v_2>$$

$$= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T) \quad \forall \mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3) \in W$$

Prenant $\psi \in \mathcal{C}^1[0,T]$, vérifiant $\psi(0) = 1$ et $\psi(T) = 0$. Par absolue continuité de $(u_1(t),v_1) + (u_2(t),v_2)$

$$\int_0^T \mathrm{dt}\, \left(\frac{d(u_1,v_1)}{dt} + \frac{d(u_2,v_2)}{dt}\right) \psi$$

$$= -\int_0^T \mathrm{dt}\, ((u_1,v_1) + (u_2,v_2))\ \psi'(t) + (u_1(0),v) + (u_2(0),v)$$

$$= \int_0^T \mathrm{dt}\, \{(u_1, \mathbf{a}\cdot\nabla v_1) - f\cdot(u_2,v_1) + (\nabla_\nu u_1, \nabla_\nu v_1) - <\theta_1, v_1>\}\ \psi$$

$$+ \int_0^T \mathrm{dt}\, \{(u_2, \mathbf{a}\cdot\nabla v_2) + f\cdot(u_1,v_2) + (\nabla_\nu u_2, \nabla_\nu v_2) - <\theta_2, v_2>\}\ \psi$$

En comparant avec la forme faible spatio-temporelle (4.19), il vient

$$(u_1(0),v_1) + (u_2(0),v_2) = 0,\ \forall \mathbf{v} = (v_1,v_2) \in W_H$$

Donc

$$u_1(0) = u_2(0) = 0 \text{ dans } W_H'.$$

Remarque. Pour la vitesse verticale u_3, on ne peut rien dire en général de la continuité, ni a fortiori de la condition initiale. □

4.9.1 Unicité de la solution.

On suppose de plus pour simplifier

$$\mathbf{a} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega).$$

Cette régularité supplémentaire permet d'établir comme précédemment que

$$\frac{d\mathbf{u}_H}{dt} \in L^2(0,T;W_H'). \tag{4.31}$$

On a alors le

Théorème 11 *Le problème hydrostatique linéarisé (4.19) admet une solution unique* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{W})$

Preuve. Avec (4.31),

$$\mathbf{u}_H \in L^2(0,T;W_H) \text{ et } \frac{d\mathbf{u}_H}{dt} \in L^2(0,T;W_H').$$

Par le lemme 1.2 p 261 de Temam [58],

$$\frac{d\|u\|_0^2}{dt} = 2 < u', u > \text{ et } \mathbf{u}_H \in \mathcal{C}(0,T;\mathbf{L^2}(\Omega)).$$

Donc la fonction

$$t \mapsto \|u_1(t)\|_0^2 + \|u_2(t)\|_0^2$$

est continue sur $[0,T]$, après modification éventuelle sur une partie négligeable.
Supposons l'existence de deux solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et montrons qu'elle coïncident. Posons $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. En prenant $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dans la forme faible spatiale (4.30), en tenant compte des simplifications pour raison de symétrie et de divergence nulle, on obtient

$$\frac{d(w_1,w_1)}{dt} + \frac{d(w_2,w_2)}{dt} + (\nabla_\nu w_1, \nabla_\nu w_1) + (\nabla_\nu w_2, \nabla_\nu w_2) = 0 \quad \text{dans} \mathcal{D}'(0,T).$$

Donc

$$\frac{d\|w_1\|_0^2}{dt} + \frac{d\|w_2\|_0^2}{dt} \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

Donc

$$\|w_1(t)\|_0^2 + \|w_2(t)\|_0^2 \leq \|w_1(0)\|_0^2 + \|w_2(0)\|_0^2 = 0.$$

Ainsi

$$(w_1(t), w_2(t)) = 0, \ \forall t \in [0,T]$$

Comme $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$, $\forall t \in [0,T]$, il résulte

$$\partial_3 w_3 = 0, \ \forall t \in [0,T]$$

Avec les conditions limites, cela donne

$$w_3 = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

■

Complément.

Si la solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon$ vérifie par exemple la condition de régularité supplémentaire u_i^ϵ, $i = 1, 2$ bornées dans $L^2(0,T;H^2)$ et si u_3^ϵ est seulement supposé bornée dans $L^2(0,T;L^2)$, alors $u_i u_3 \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, par les injections de Sobolev et on peut même prouver l'existence d'une solution au problème non-linéaire. En effet ou prouve aisément que

$$\frac{d\mathbf{u}^\epsilon{}_H}{dt} \text{ bornée dans } L^1(0,T;W'_H).$$

Par le lemme de compacité en temps de Simon [49] p.85, on déduit que u_i^ϵ, $i = 1, 2$ est relativement compact dans $L^2(0,T;L^2)$, ce qui permet de passer à la limite dans les termes non-linéaires.

Partie II

Le transport.

Chapitre 5

Les moindres carrés dans l'espace-temps.

Dans ce chapitre, nous résolvons l'équation d'advection scalaire multidimensionelle linéaire, transiente ou stationnaire en la remplaçant par une équation du type diffusion, dont la formulation faible est contrôlée par une forme coercitive dans un espace fonctionnel approprié. La formulation diffusive est obtenue grâce à la méthode des moindres carrés appliquée dans l'espace-temps. La coercitivité repose sur une généralisation "courbe" de l'inégalité de Poincaré, que nous présentons au chapitre suivant. Nous étudions l'équivalence surprenante entre la formulation parabolique, comme problème de diffusion *anisotrope*, et la formulation hyperbolique, comme problème d'advection.
Cette formulation permet de construire un schéma numérique simple, stable et efficace pour les problèmes convectifs que nous analysons sommairement. Commençons par

5.1 Une idée simple sur un exemple simple.

Considérons l'équation d'advection.

$$\nu u_x + u_t = 0,\ (x,t) \in]0,1[\times]0,1[\tag{5.1}$$

avec les conditions initiales et aux limites sur la frontière à flux entrant ($\nu > 0$)

$$u(x,0) \quad = g(x), \quad x \in]0,1[$$

$$u(0,t) \quad = h(t), \quad t \in]0,1[$$

multiplions par l'adjoint $-(\nu\partial_x + \partial_t)$

Elevons au carré l'opérateur différentiel $\nu\partial_x + \partial_t$ pour obtenir l'équation de diffusion.

$$\nu^2 u_{xx} + 2\nu u_{xt} + u_{tt} = 0, \ (x,t) \in]0,1[\times]0,1[\tag{5.2}$$

avec la condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0,t) &= h(t), \quad t \in]0,1[\end{aligned}$$

Le problème est que pour une équation *parabolique*, il faut une condition limite sur tout le bord du domaine, alors que pour une équation *hyperbolique*, il faut seulement une condition limite sur le bord à flux entrant.
Le fait étonnant est qu'avec des conditions limites adéquates, les deux problèmes sont équivalents. De plus, comme nous allons voir, la méthode de Galerkin standard appliquée à l'équation de diffusion fournit un bon algorithme pour l'équation d'advection.

5.2 Principe des méthodes aux moindres carrés pour les EDP.

Des applications variées de la méthode des moindres carrés aux EDP sont présentées par exemple dans [24]. La méthode des moindres carrés permet en effet de "convexifier" des problèmes non coercitifs. L'idée de base est la même qu'en dimension finie: on transforme un système non dégénéré

$$A \cdot x = b$$

forme normale.

en un système défini positif

$$A^T A \cdot x = A^T b.$$

Récemment la méthode des moindres carrés a permis d'améliorer la fameuse méthode SUPG *(Streamline Upwind Petrov Galerkin)* [15] en la méthode GLS *Galerkin Least Squares* [28]. Dans un même esprit les

célèbres méthodes *Streamline Diffusion* et *Discontinuous Galerkin* [29, 30] ont muté pour donner la méthode CSD *Characteristic Streamline Diffusion* [25].
Le principe commun à ces méthodes est de *stabiliser* le problème en ajoutant une petite quantité de résidu quadratique des termes advectifs. Considérons par exemple l'équation-type

$$\mathcal{A}u \equiv \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } \Omega \tag{5.3}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma^- \tag{5.4}$$

où $\Gamma^- = \{x \in \Gamma | \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0\}$ désigne la frontière à flux entrant.
Une formulation faible de ce problème aux limites est:

$$B(u, \phi) = L(\phi), \; \forall \phi \in V \tag{5.5}$$

où

$$V = \{\phi \in H^1 | \, \phi = 0 \text{ on } \Gamma^-\},$$

$$L(\phi) = \int_\Omega f\phi,$$

$$B(u, \phi) = \int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u)\phi.$$

Soit V_h un sous espace de dimension finie de V (par exemple obtenu par une discrétisation en éléments finis, la méthode de *Galerkin* revient à:

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } B(u_h, \phi) = L(\phi), \; \forall \phi \in V_h.$$

Malheureusement, il est bien connu le schéma résultant est instable et donne lieu à des oscillations parasites (voir par exemple [29]).
Les méthodes (GLS, CSD) présentant une meilleure stabilité sont définies par les formes bilinéaires et linéaires

les instabilités classiques des schémas centrés pour les problèmes advectifs.

$$B_S(u_h, \phi) = L_S(\phi),$$

$$B_S(u_h, \phi) \equiv B(u_h, \phi) + \tau(\mathcal{A}u_h, \mathcal{A}\phi),$$

$$L_S(\phi) \equiv L(\phi) + \tau(f, \mathcal{A}\phi).$$

Le désavantage est qu'il faut maintenant choisir le paramètre τ.
De plus ce n'est pas la méthode des moindres carrés stricto sensu, définie elle par les formes

$$B_{LS} \equiv (\mathcal{A}u_h, \mathcal{A}\phi),$$

$$L_{LS}(\phi) \equiv (f, \mathcal{A}\phi).$$

Nous allons voir que cette méthode est plus simple et aussi efficace que les méthodes GLS, CSD. Nguyen and Reynen [40] sont les premiers à notre connaissance à avoir appliqué simplement la méthode des moindres carrés dans l'espace-temps, mais leur article ne semble pas avoir trouvé l'écho qu'il méritait.

5.3 Le cadre spatio-temporel.

L'analyse précédente concerne un problème stationnaire. Nous traitons maintenant le cas instationnaire. Considérons l'équation-type:

$$\mathcal{A}u \equiv u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\tag{5.6}$$

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma^- \times]0,T[\tag{5.7}$$

$$u(.,t=0) = h \quad \text{sur } \Omega \tag{5.8}$$

Comme il n'y a pas de raison de traiter la variable temps différemment des variables spatiales, introduisons les objets spatio-temporels suivants (voir fig. 5.1):
Le domaine $Q = \Omega \times]0,T[$
Le bord $\partial Q = \partial\Omega \times]0,T[+ \Omega \times (\{T\} - \{0\})$
La normale sortante $\tilde{\mathbf{n}} = \begin{cases} (\mathbf{n},0) & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[, \\ (0,1) & \text{sur} \quad \Omega \times \{T\}, \\ (0,-1) & \text{sur} \quad \Omega \times \{0\} \end{cases}$
La vitesse advective $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, 1)$
La frontière-influx $G^- = \{(x,t) \in \partial Q \,|\, \tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} < 0\} = \Gamma^- \times]0,T[+ \Omega \times \{0\}$

Le gradient $\widetilde{\nabla} \equiv (\nabla, \partial_t)$. Maintenant le problème est "stationnaire":

$$\mathcal{A}u \equiv \tilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\nabla} u = f \quad \text{dans } Q \tag{5.9}$$

$$u = \tilde{g} \quad \text{sur } G^- \tag{5.10}$$

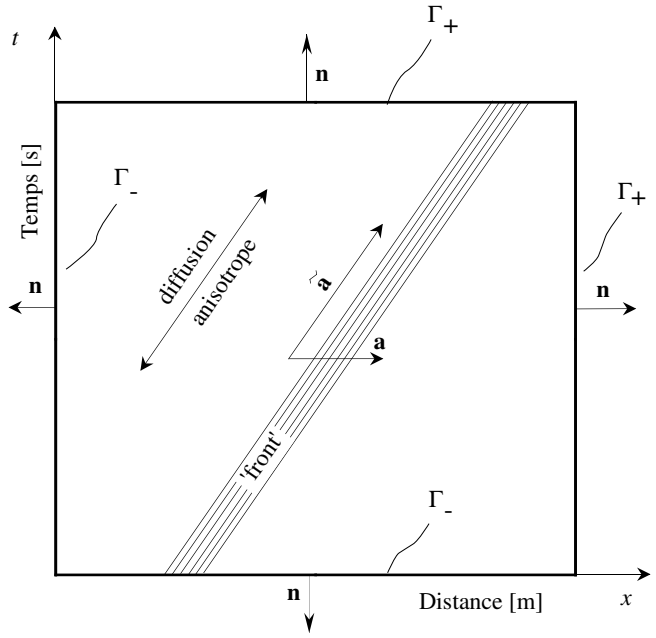


Figure 5.1: domaine, frontière influx, normale sortante spatio-temporels.

Remarque. Le cadre spatio-temporel unifie condition sur le bord entrant et condition initiale. □

L'idée est maintenant de conjuguer méthode aux moindres carrés et formulation spatio-temporelle pour donner la méthode STILS (Space Time Integrated Least Squares method) [44, 43, 6].

5.4 la méthode STILS (moindres carrés intégrés dans l'espace-temps).

5.4.1 Forme variationnelle aux moindres carrés.

A partir de maintenant, nous nous plaçons dans l'espace-temps. Reécrivons l'équation (5.9) sous la forme équivalente:

$$\pi(u) = 1/2 \int_Q (\mathcal{A}u - f)^2 \rightarrow \min. \tag{5.11}$$

où les u admissible doivent remplir la condition de Dirichlet sur le bord éclairé (5.10). Le minimum zéro correspond à la solution de (5.9-5.10). La condition de stationnarité se traduit par la forme faible: *Euler-Lagrange*

$$\delta\pi = \int_Q (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\nabla} u - f)\delta(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\nabla} u) = \int_Q (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\nabla} u - f)(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\nabla}\delta u) = 0 \quad (5.12)$$

Omettant le tilde pour alléger la notation, notant $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]$ le produit tensoriel dont les coefficients sont $a_i a_j$, un peu d'algèbre linéaire permet de vérifier que

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Donc

$$\delta\pi = \int_Q ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u - f\mathbf{a}) \cdot \nabla\delta u = 0. \quad (5.13)$$

Intégrant par parties:

$$\int_{\partial Q} \delta u([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u - f\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} - \int_Q \nabla \cdot ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u - f\mathbf{a})\delta u = 0. \quad (5.14)$$

Grâce à la condition de Dirichlet, $\delta u = 0$ sur G^-:

$$\int_{G \setminus G^-} \delta u([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u - f\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} - \int_Q \nabla \cdot ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u - f\mathbf{a})\delta u = 0. \quad (5.15)$$

δu étant arbitraire, le minimum est caractérisé par:

$$\nabla \cdot ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u) = \nabla \cdot f\mathbf{a} \quad \text{dans } Q \quad (5.16)$$

$$u = g \quad \text{sur } G^- \quad (5.17)$$

$$([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u) \cdot \mathbf{n} = f\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } G \setminus G^- \quad (5.18)$$

L'équation (5.16) est clairement du type *diffusion*, le tenseur de "conductivité" étant $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]$, différent de zéro seulement dans la direction d'advection:

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}.$$

Avec la méthode STILS la *diffusion anisotrope* apparaît naturellement, si on compare avec son introduction un peu "artificielle" dans les méthodes SUPG, GLS, CSD. La condition limite (5.18) du type Neumann généralisé fait intervenir la *conormale* de l'opérateur de diffusion:

$$([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\nabla u) \cdot \mathbf{n} = ([\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]\mathbf{n}) \cdot \nabla u.$$

De plus cette condition vient *naturellement* de la formulation variationnelle STILS.

5.4.2 Advection = diffusion anisotrope.

Ω désigne désormais un domaine n-dimensionnel (éventuellement spatio-temporel). Sans restreindre la généralité, nous prenons une condition limite de Dirichlet homogène en modifiant convenablement le terme source f. Nous étudions l'équivalence entre la formulation advective

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a}\cdot\nabla u & = f & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma^- \end{array} \tag{5.19}$$

et la formulation diffusive

$$\begin{array}{rcll} \nabla\cdot([\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}]\nabla u) & = & \nabla\cdot f\mathbf{a} & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma^- \\ ([\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}]\nabla u)\cdot\mathbf{n} & = & f\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma\setminus\Gamma^- \end{array} \tag{5.20}$$

Nous avons besoin d'espaces fonctionnels spécialement adaptés au transport [18]:

$$H(\mathbf{a},\Omega) = \left\{ u\in L^2(\Omega) |\, \mathbf{a}\cdot\nabla u \in L^2(\Omega)\right\}$$

muni de la norme du graphe

$$|||u|||^2 = \|u\|_0^2 + \|\mathbf{a}\cdot\nabla u\|_0^2,$$

où $\|.\|_0$ designe la norme L^2. En outre on suppose

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0.$$

De plus $\mathbf{a}\cdot\nabla u = \operatorname{div} u\mathbf{a} \in L^2(\Omega)$ est pris au sens des distributions. Pour traiter la condition de Dirichlet homogène, nous définissons

$$H_0(\mathbf{a},\Omega,\Gamma^-) = \left\{ u\in H(\mathbf{a},\Omega) |\, u = 0 \text{ sur } \Gamma^-\right\}$$

Remarque. Pour que cette définition soit parfaitement rigoureuse, on doit utiliser une application "trace" sur $H(\mathbf{a},\Omega)$, construite dans [18, 22]. On peut aussi utiliser la trace sur $H(\operatorname{div},\Omega)$ [58], car du fait de $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ on a

$$H(\mathbf{a},\Omega) = \left\{ u\in L^2(\Omega) |\, \operatorname{div} u\mathbf{a} \in L^2(\Omega)\right\}$$

Le plus simple est de définir ces espaces différemment par densité, ce que nous faisons au chapitre suivant. Pour un domaine de frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ces définitions sont équivalentes [9, 18]. □

La forme faible du problème diffusif (5.20) est alors:
Trouver $u \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$ tel que $\forall \phi \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$,

$$\int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u)(\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) = \int_\Omega f(\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) \tag{5.21}$$

De la théorie des équations linéaires hyperboliques [18], nous savons qu'il y a une et une seule solution au problème advectif (5.19). Si cette solution est dans L^2, elle sera aussi solution du problème diffusif (5.21), comme on le voit aisément en effectuant le produit scalaire L^2 de (5.19) par $\mathbf{a} \cdot \nabla \phi$ pour un $\phi \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$ arbitraire.
Nous donnons ci-dessous une condition suffisante pour que le problème de diffusion (5.21) soit bien posé, à savoir l'inégalité de Poincaré "courbe" que nous étudions au chapitre suivant:

$$\exists C \text{ tel que } \forall \phi \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-),\ \|\phi\|_0 \leq C \|\mathbf{a} \cdot \nabla \phi\|_0 \tag{5.22}$$

Théorème 12 *Si $f \in L^2(\Omega)$ et si l'inégalité de Poincaré "courbe" (5.22) est satisfaite, le problème (5.21) est bien posé.*

Preuve. Sur $V = H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$, définissons la forme bilinéaire

$$B(\phi, \psi) = \int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi)(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi),$$

et la forme linéaire

$$L(\psi) = \int_\Omega f(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi).$$

Elles sont naturellement continues sur V, et la forme bilinéaire est coercitive grâce à l'inégalité (5.22):

$$B(u, u) = \|\mathbf{a} \cdot \nabla u\|_0^2 \geq C |||u|||^2.$$

Par le lemme de Lax-Milgram, le problème (5.21) admet une solution unique et $|||u||| \leq C \|f\|_0$. ∎

La méthode STILS consiste à appliquer ce théorème à un sous-espace de dimension finie V_h de $H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$, construit grâce à un maillage en éléments finis de Ω. En plus de la stabilité de la méthode, on obtient aisément une estimation d'erreur en norme de "convection"

$$|||u - u_h||| = inf_{w \in V_h} |||u - w||| = O(h^p)$$

par le lemme de Céa et la théorie standard de l'interpolation [16], où p est le degré des polynômes utilisés, en particulier pour des éléments spatio-temporels Q_1 cela donne l' estimation d'erreur $|||u-u_h||| = O(h)$, du même ordre que celle obtenue dans [28].

Le chapitre suivant est consacré à l'inégalité de Poincaré "courbe". Nous prouvons en particulier le

Théorème 13 *Si la vitesse advective* $\mathbf{a}$ *est bornée et de classe* C^1 *au voisinage de* Ω*, si* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} \geq \alpha > 0$ *pour un vecteur unitaire fixe* $\mathbf{k}$ *et si* Ω *est borné dans la direction* $\mathbf{k}$ *alors l'inégalité de Poincaré "courbe" est vraie.*

Remarque. Si le problème est *instationnaire* et si la vitesse advective $\mathbf{a}$ est C^1, l' inégalité est vraie. Il suffit de prendre $\mathbf{k} = (\mathbf{0}, 1)$! □

L'important est que les lignes de courant du flot associé à $\mathbf{a}(x,t)$ *ne soient pas trop "sauvages", que le flot soit "laminaire" en quelque sorte.*

5.4.3 Retour à l'exemple.

Considérons à nouveau l'équation d'advection scalaire transiente (5.1) avec une vitesse constante ν et l'équation de diffusion associée (5.2).
$\mathbf{a} = (\nu, 1)$, $[\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}] = \begin{pmatrix} \nu^2 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}$
La frontière à flux sortant est

$$\{x = 1\}\times]0, T = 1[+]0, x = 1[\times\{T = 1\},$$

La normale sortante est, suivant la portion du bord considérée

$$\mathbf{n} = (1,0) \text{ ou } (0,1).$$

La conormale est (ν^2, ν) colinéaire à $(\nu, 1)$ ainsi la condition limite naturelle (5.18) devient

$$\nu u_x + u_t = 0$$

Dans ce cas, les hypothèses du théorème 13 sont vérifiées, validant ainsi la mise en oeuvre de la méthode STILS.

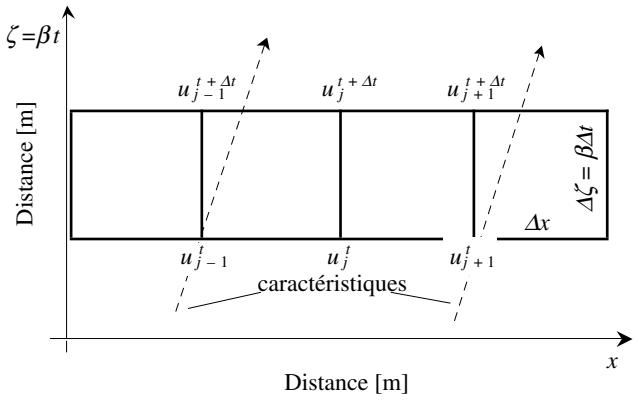


Figure 5.2: Tranche spatio-temporelle.

5.5 Comportement numérique.

Nous restreignons notre analyse à l'exemple 1D (i.e. 2D en espace-temps). Pour la discrétisation, nous prenons des éléments Q_1. Pour pouvoir changer le pas de temps sans devoir remailler le domaine, nous posons

$$\zeta = \beta t$$

et résolvons le problème dans le plan (x, ζ) avec $\Delta x = \Delta\zeta$. Pour mettre les équations sous forme adimensionnelle , nous utilisons le nombre de Courant

$$Cr = \nu.\Delta t/\Delta x = \nu/\beta.$$

5.5.1 La discrétisation de Galerkin.

En dimension 2 or 3 d'espace, le système spatio-temporel est onéreux à résoudre, car le nombre d'inconnues est élevé. En particulier en dimension spatiale 3, il faut mailler un domaine spatio-temporel de dimension 4. Nous évitons ces difficultés en discrétisant par tranches successives (voir fig. 5.2) $\Omega\times]t, t+\Delta t[$, pour aboutir à un système en $(u^t, u^{t+\Delta t})$. La matrice de rigidité par élément est:

$$\begin{pmatrix} Cr^2/3+Cr/2+1/3 & -Cr^2/3+1/6 & -Cr^2/6-Cr/2-1/6 & Cr^2/6-1/3 \\ * & Cr^2/3-Cr/2+1/3 & Cr^2/6-1/3 & -Cr^2/6+Cr/2-1/6 \\ * & * & Cr^2/3+Cr/2+1/3 & -Cr^2/3+1/6 \\ * & * & * & Cr^2/3-Cr/2+1/3 \end{pmatrix}$$

La j^e équation est typiquement:

$$\begin{array}{rccc} & (1-2Cr^2)u_{j-1}^{t+\Delta t} & +4(1+Cr^2)u_j^{t+\Delta t} & +(1-2Cr^2)u_{j+1}^{t+\Delta t} \\ = & (1+3Cr+Cr^2)u_{j-1}^{t} & +2(2-Cr^2)u_j^{t} & +(1-3Cr+Cr^2)u_{j+1}^{t} \end{array}$$

Remarque. C'est un schéma implicite, mais il nécessite seulement l'inversion d'une matrice tridiagonale. Avec un développement de Taylor, on obtient aisément que c'est un schéma du second-ordre. □

l'erreur de discrétisation est du troisième degré en Δx, Δt

Cette équation a déja été obtenue dans [40].

5.5.2 L'analyse de Fourier-von Neumann et la matrice d'amplification.

La réponse de l'équation discrète à une harmonique simple $e^{i\cdot kx}$ est donnée par l'amplification complexe:

$$\gamma = \frac{2 - Cr^2 + (1+Cr^2)\cos\theta - \mathbf{i}\cdot 3Cr\sin\theta}{2 + 2Cr^2 + (1-2Cr^2)\cos\theta}$$

où θ appelé angle de phase vaut $k \cdot \Delta x$.
Le schéma est inconditionnellement stable: $|\gamma| \leq 1$, $\forall\theta, Cr$.
Nous avons calculé l'amortissement et le déphasage après une oscillation complète dans la table (5.1), où le retard de phase (en unité de longueur d'onde) est

$$\Delta = 1 - \arccos(\Re(\gamma/|\gamma|))/\theta Cr,$$

l'amortissement après une oscillation est

$$G = |\gamma|^{2\pi/\theta Cr}.$$

Ceci montre que STILS se comporte convenablement au moins dans la région des discrétisations spatiales réalistes $\theta \leq \pi/4$, et se comporte aussi bien que les autres méthodes pour $Cr \leq 1$ (bien qu'étant un peu moins précise) [45]. Elle se révèle meilleure pour $Cr > 1$ (simplement parce que les autres méthodes explosent alors!). Mais l'analyse de Fourier n'est qu'un aspect des choses.

L'étude de la matrice d'amplification donne un éclairage complémentaire. L'algorithme d'avance en temps conduit au système linéaire

$$Su^{t+\Delta t} = Ru^t,$$

Cr	θ	Δ	G
0.2	$\pi/4$	0.0061	0.9717
	$\pi/2$	0.0544	0.7462
	$3\pi/4$	0.2923	0.2707
0.5	$\pi/4$	0.0251	0.9237
	$\pi/2$	0.0977	0.5220
	$3\pi/4$	0.2479	0.0910
0.9	$\pi/4$	0.0690	0.8447
	$\pi/2$	0.1825	0.4030
	$3\pi/4$	0.2371	0.1074
1.2	$\pi/4$	0.1096	0.7803
	$\pi/2$	0.2485	0.3775
	$3\pi/4$	0.2926	0.1703
1.6	$\pi/4$	0.1663	0.7009
	$\pi/2$	0.3288	0.3795
	$3\pi/4$	0.3880	0.2708
2.0	$\pi/4$	0.2211	0.6371
	$\pi/2$	0.3976	0.4000
	$3\pi/4$	0.4721	0.3618

Tableau 5.1: Amortissement et déphasage.

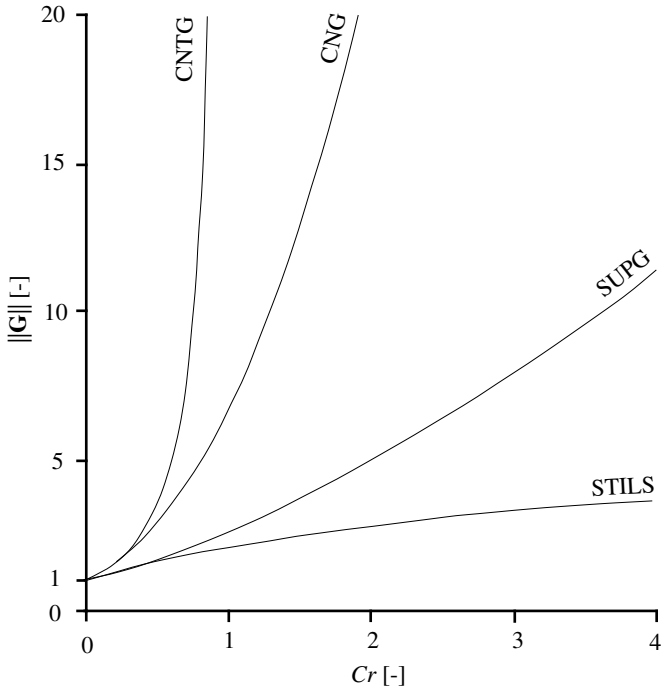


Figure 5.3: Norme de la matrice d'amplification.

posant $G = S^{-1}R$ nous obtenons:

$$u^{t+\Delta t} = Gu^t.$$

G est la matrice d'amplification du schéma. Son spectre contrôle l'amplification des erreurs de troncature au cours des itérations. P. Perrochet [44] a calculé la norme spectrale $\|G\|$ en fonction de Cr pour les schémas standards CNG (Crank-Nicolson), SUPG, CNTG (Crank-Nicolson-Taylor-Galerkin) [45], avec des maillages de plus de 20 éléments, que nous avons reporté dans la figure (5.3). Notre schéma montre de bonnes propriétés.

5.6 Exemples de simulations numériques.

La simplicité conceptuelle de STILS se reflète aussi dans sa programmation, le code étant similaire à celui d'un laplacien, avec pour seule différence la procédure d'assemblage de la matrice de rigidité, dont le terme général est $(\mathbf{a}\cdot\nabla\phi_i, \mathbf{a}\cdot\nabla\phi_j)$ au lieu de $(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$. Nous donnons en appendice, un exemple de code.

Nous référons à [44] pour des exemples issus de problèmes hydrogéologiques, où STILS se révèle particulièrement performant, notamment dans les cas délicats d'écoulements en milieu karstique. Nous reproduisons ci-après les simulations conduites par Pierre Perrochet, hydrogéologue à l'EPF Lausanne.

Injection dans un milieu hétérogène fissuré.

Considérons un domaine vertical composé de deux couches à haute perméabilité ($K = 10^{-3}m/s$) connectées par une fissure à travers une couche quasi-imperméable ($K = 10^{-8}m/s$), voir fig. 5.4. Ce domaine en (x, z) est discrétisé en 20x20 éléments biquadratiques ($\Delta x = \Delta z = 1m$) et la fissure au moyen d'éléments quadratiques 1D à haute transmissivité ($Ke = 10^{-2}m^2/s$ où e désigne l'ouverture de la fissure. La figure 5.4 montre le champ de vitesse $\mathbf{a}$, laplacien stationnaire, engendré par les conditions de flux nul sur les faces latérales et de charge hydraulique imposée aux coins inférieurs ($\Psi = 100m$) et supérieurs ($\Psi = 50m$). On fixe une concentration $u = 1$ (resp. $u = 0$) de polluant au coin inférieur gauche (resp. droit). La figure 5.5 illustre le domaine 3D spatio-temporel. La figure 5.6 représente les solutions après 10000s et 20000s obtenues après seulement 5 et 10 pas de temps ($\Delta\zeta = 2m, \Delta t = 2000s, \beta = 10^-3m/s$).

Les tentatives pour simuler ce problème avec le schéma d'ordre plus élevé CNTG (Crank-Nicolson-Taylor-Galerkin) ont échoué, malgré des pas de temps jusqu'à 500 fois plus faibles. En comparaison les oscillations numériques parasites visibles sur la fig. 5.6 sont stables et ne dépassent pas 7-8%, ce qui est tout à fait acceptable vu la difficulté du problème. Ces résultats réalistes permettent une interprétation raisonnable. Comme des quantités égales de fluide entrent par les deux coins inférieurs, on constate bien qu'après environ 20000s le mélange est atteint: passé cette durée la fissure agit comme une source ponctuelle avec $u = 0.5$, et le front dans la couche supérieure est beaucoup plus régulier à cause de l'effet de mélange.

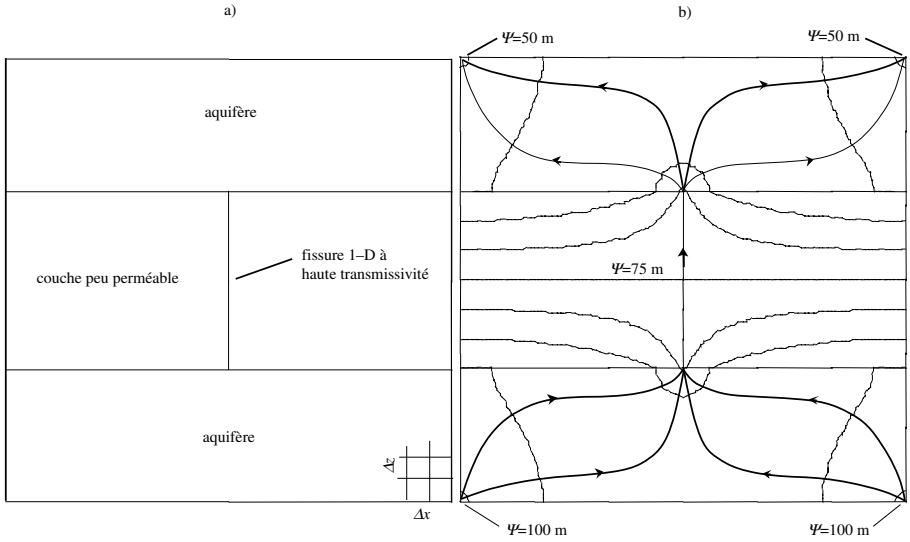


Figure 5.4: (a) Aquifères séparés par une roche fissurée. (b) Equipotentielles Ψ et lignes de courant de l'écoulement.

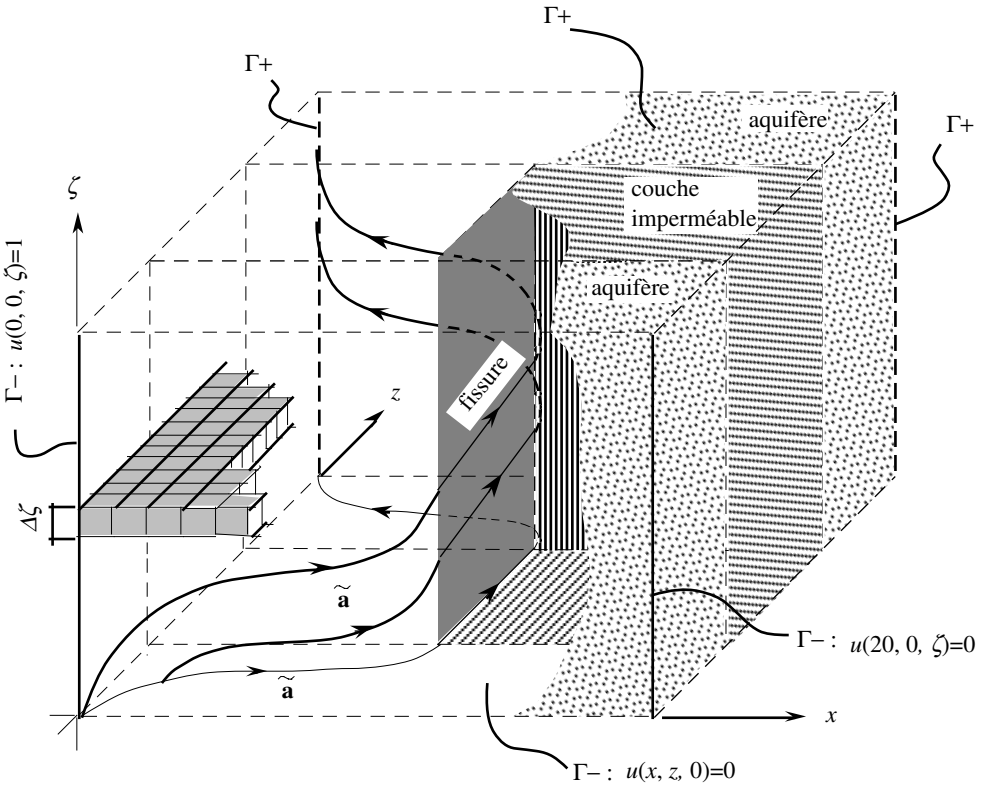


Figure 5.5: Représentation 3D du milieu et des caractéristiques.

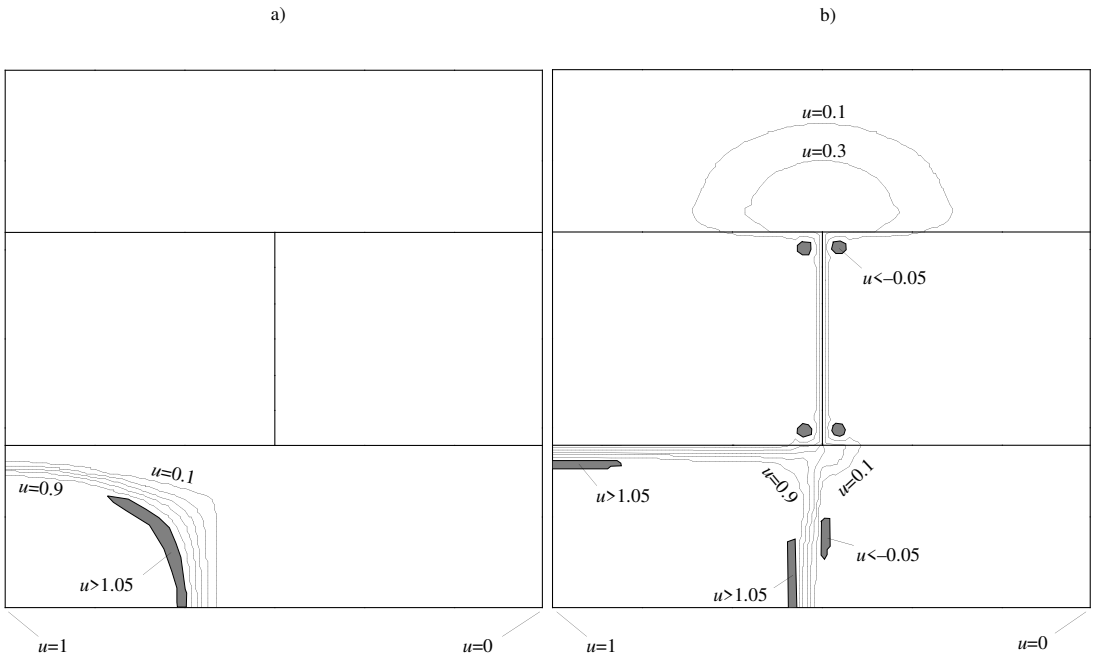


Figure 5.6: Solutions après (a) 5 pas de temps = 10 000s, (b) 10 pas de temps = 20 000s.

Chapitre 6

Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport.

Il est possible de donner à l'équation de transport un traitement variationnel analogue à celui des équations elliptiques. Pour obtenir une forme bilinéaire coercitive, nous introduisons un espace de Sobolev approprié, des fonctions tests spécialement adaptées au transport et nous travaillons dans l'espace-temps. La méthode repose sur une inégalité de Poincaré "courbe", dont nous étudions la validité.

6.1 Cadre fonctionnel.

6.1.1 Espaces de Sobolev obliques.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière C^1 par morceaux. Soit V un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$. Soit $\mathbf{a} : V \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1. On définit $H(\mathbf{a}, \Omega)$ comme le complété de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ muni de la norme

$$|||u|||^2 = \|u\|_0^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla u\|_0^2,$$

où $\|.\|_0$ désigne la norme L^2. Le vecteur $\mathbf{n}$ désignant la normale sortante est défini sauf peut-être sur une partie négligeable $\mathcal{N}$, on note

$$\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{N};\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0\},$$

(resp. Γ^+) la frontière à flux entrant (resp. sortant), supposées de mesure strictement positive, et Γ^0 la frontière à flux nul. On définit

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-) = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma^- \right\}.$$

On désigne par $H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$ (resp. $H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^+)$) la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$ (resp. $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)$) dans $H(\mathbf{a}, \Omega)$.

Remarque. On peut définir ces espaces différemment, comme au chapitre précédent, en utilisant un opérateur de trace comme dans [9, 22, 18] et les définitions en sont équivalentes pour un domaine de frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux. □

6.1.2 Écoulement remplissant.

Soit l'écoulement ou *flot* associé au champ $\mathbf{a}$, décrit par les trajectoires ou *courbes intégrales maximales* $\xi : (s, x) \in [\sigma_x, \tau_x] \times \bar{\Omega} \mapsto \xi(s, x) \in \bar{\Omega}$ solutions de

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \mathbf{a}(\xi) \tag{6.1}$$

$$\xi(0, x) = x \tag{6.2}$$

Définition 1 Un écoulement est appelé Ω-*remplissant* si il existe $T > 0$, une partie négligeable $\mathcal{P}$ pour la mesure de Lebesgue sur Ω, tels que pour tout x de $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{P}$ il existe $x_0 \in \Gamma^-$ et $0 \leq t \leq T$ tels que

$$x = \xi(t, x_0).$$

Remarque. Cette définition peut se reformuler ainsi: les trajectoires issues du bord à flux entrant remplissent $\bar{\Omega}$, sauf peut-être une partie négligeable, en une durée finie, bornée par un nombre fixe T. □

Une condition suffisante de régularité est donnée par la

Proposition 7 *si le champ* $\mathbf{a}$ *est* C^1 *et borné sur un voisinage* V *de* $\bar{\Omega}$*, s'il existe une direction donnée par un vecteur unitaire fixe* $\mathbf{k}$*, un nombre* $\alpha > 0$ *tels que*

$$\forall x \in \bar{\Omega},\ \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{k} \geq \alpha \tag{6.3}$$

et que le domaine soit borné dans cette direction alors l'écoulement est Ω-remplissant.

Preuve. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué dans V, tout point x de $\bar{\Omega}$ est situé sur une courbe intégrale maximale.
Le domaine est borné dans la direction $\mathbf{k}$. Notons

$$\mathrm{diam}_{\mathbf{k}}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega}\{(x-y)\cdot\mathbf{k}\}.$$

On a

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} \geq \alpha > 0,$$

donc il existe $\sigma_x \leq 0$ tel que $x_0 = \xi(\sigma_x, x) \in \partial\Omega$, avec $|\sigma_x| \leq \mathrm{diam}_{\mathbf{k}}(\Omega)/\alpha$.
Prouvons que le complémentaire du sous-ensemble

$$\{x \in \bar{\Omega} |\, \xi(\sigma_x, x) \in \Gamma^-\}$$

est de mesure nulle. Comme le domaine est supposé C^1 par morceaux, l'ensemble des points $\mathcal{N}$ où la normale n'est pas définie est de mesure nulle. Supposons donc $x_0 \in \partial\Omega \setminus \mathcal{N}$.
Pour h assez petit,

$$\frac{\xi(\sigma_x + h, x) - \xi(\sigma_x, x)}{h} \cdot \mathbf{n} < 0,$$

d'où, en faisant $h \to 0$, $\mathbf{a}(x_0)\cdot\mathbf{n} \leq 0$. Donc $x_0 \in \Gamma^- \cup \Gamma^0$.
Enfin par le lemme de Sard, on montre comme dans [9] prop. 2.3 p.194, que

$$\{x \in \bar{\Omega} |\, \xi(\sigma_x, x) \in \Gamma^0\}$$

est négligeable. ■

Remarque. Le domaine n'étant pas a priori borné, l'hypothèse que le champ $\mathbf{a}$ soit borné est nécessaire pour éviter que les courbes intégrales ne "s'échappent à l'infini" sans pouvoir sortir de Ω. □

Remarque. La régularité du champ sert à assurer l'existence de courbes intégrales maximales. En fait il suffirait que $\mathbf{a}$ soit lipschitzien, par exemple. On pourrait même se contenter d'une régularité de type Sobolev et de solutions renormalisées (voir [20]). □

6.1.3 Inégalité de Poincaré courbe.

Les définitions précédentes nous permettent d'énoncer le

Théorème 14 *Pour un écoulement Ω-remplissant, gouverné par un champ à divergence nulle, il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-),\ \|u\|_0 \leq C\|\mathbf{a}\cdot\nabla u\|_0. \tag{6.4}$$

L'idée naturelle de preuve consiste à redresser globalement le champ de vecteurs gouvernant le flot et d'appliquer ensuite l'inégalité classique de Poincaré dans une direction donnée. Cette idée simple peut être réalisée [56] et nous donnons cette démonstration plus loin, mais nous présentons d'abord une démonstration "hilbertienne" qui se généralise pour le cas de champs $\mathbf{a}$ moins réguliers.

Preuve. Soit $x \in \Gamma^-$, alors $\sigma_x = 0$ et τ_x représente la durée de la trajectoire issue de x. La régularité de l'écoulement entraîne $\tau_x \leq T < \infty$. Par la méthode des caractéristiques, à l'aide de la proposition 7, on prouve le

Lemme 7 *Il existe $\rho \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^+) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ tel que $\mathbf{a}\cdot\nabla\rho = -2$ dans Ω. De plus $\|\rho\|_\infty \leq 2T$.*

On raisonne ensuite par densité. Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$.

$$\|\mathbf{a}\cdot\nabla u\|_0 = \sup_{\phi\in \mathrm{L}^2\setminus\{0\}} \{\frac{\int_\Omega \phi\mathbf{a}\cdot\nabla u \mathrm{dx}}{\|\phi\|_0}\}.$$

Soit ρ fourni par le lemme 7, quitte à régulariser on peut supposer que $\rho \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)$. Prenons alors $\phi = \rho u$. On a

$$(\rho u)\mathbf{a}\cdot\nabla u = 1/2(\rho\mathbf{a}\cdot\nabla u^2).$$

Puis, en intégrant par parties sur Ω, les termes de bord disparaissent à cause de la nullité de ρ sur Γ^+, de u sur Γ^-, de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ sur Γ^0. Comme div$\mathbf{a} = 0$, le choix de ρ conduit à

$$1/2\int_\Omega \rho\mathbf{a}\cdot\nabla u^2 \,\mathrm{dx} = \int_\Omega u^2 \,\mathrm{dx} = \|u\|_0^2$$

D'autre part on sait que la norme $\|\rho u\|_0$ est majorée par $\|\rho\|_\infty\|u\|_0$, on en déduit

$$\frac{\|u\|_0^2}{\|\rho\|_\infty\|u\|_0} \leq \frac{\int_\Omega \phi\mathbf{a}\cdot\nabla u \,\mathrm{dx}}{\|\phi\|_0} \leq \|\mathbf{a}\cdot\nabla u\|_0.$$

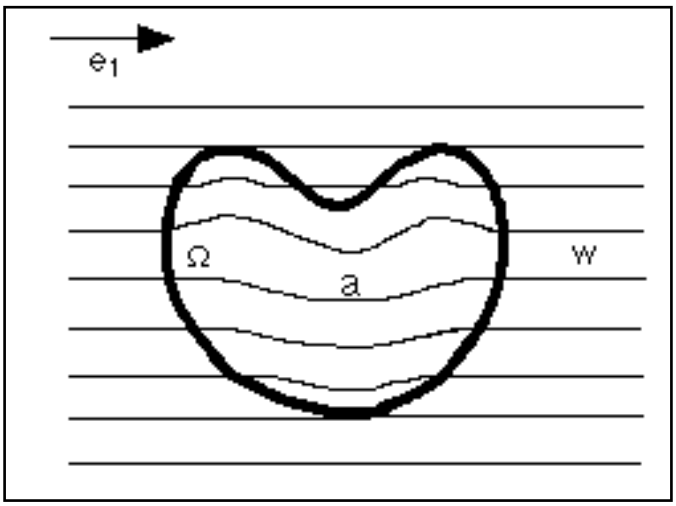


Figure 6.1: Le flot prolongé.

Ainsi (6.4) est démontrée avec $C = \|\rho\|_\infty$. ■

Donnons maintenant une démonstration plus géométrique du théorème. Pour simplifier l'exposé, on prend comme premier vecteur de base

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{k}.$$

Étape 1: Prolongement du champ à $\mathbb{R}^n$.
On utilise pour cela une partition de l'unité subordonnée au voisinage V de $\bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}^c$ définie par une fonction $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$, telle que $\lambda \equiv 1$ sur $\overline{\Omega}$ et $\lambda \equiv 0$ hors de V. On pose alors

$$\mathbf{w}(x) = \lambda(x)\,\mathbf{a}(x) + (1 - \lambda(x))\,\mathbf{e_1}.$$

Le champ $\mathbf{w}$ est défini sur $\mathbb{R}^n$, et il prolonge $\mathbf{a}$. En particulier ses courbes intégrales prolongent celles de $\mathbf{a}$ hors de $\overline{\Omega}$, ne modifiant en aucune façon les frontières à flux entrant, sortant, nul. Enfin l'hypothèse (6.3) est préservée:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{e_1} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{e_1} + (1 - \lambda) \text{ est compris entre 1 et } \alpha$$

Étape 2: Construction du difféomorphisme redressant.
Comme Ω est borné dans la direction $\mathbf{e_1}$, il existe un hyperplan normal $(x_1 = c)$ tel que:

$$(x_1 = c) \cap \overline{\Omega} = \emptyset.$$

Paramétrons les caractéristiques par leur impact sur cet hyperplan en désignant par

$$s \mapsto \xi(s, \mathbf{b})$$

la courbe intégrale maximale passant par $x = (c, \mathbf{b})$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par maximalité, de plus

$$\lim_{s \to \pm\infty} \xi_1 = \pm\infty,$$

car

$$\frac{d\xi_1}{ds} = w_1 \geq \alpha > 0.$$

Avec le théorème de différentiabilité du flot [2], on en déduit que:

$$\begin{array}{rcl} \xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} & \to & \mathbb{R}^n \\ (s, \mathbf{b}) & \mapsto & \xi(s, \mathbf{b}) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global, redressant le champ $\mathbf{w}$:

$$\xi_*(\frac{\partial}{\partial s}) = \mathbf{w},$$

autrement dit, dériver par rapport à s dans les coordonnées $(s, \mathbf{b})$ revient à dériver dans la direction $\mathbf{w}$.

Étape 3: Changement de variable pour se ramener au cas rectiligne. Grâce au difféomorphisme ξ, les lignes de champ de $\mathbf{w}$ sont les lignes de coordonnées $\mathbf{b} = Cte$, $s \in \mathbb{R}$. Notant $\hat{u} = u \circ \xi$, les nouvelles coordonnées

$$\hat{x} = (s, \mathbf{b}) \in \hat{\Omega} \mapsto x = \xi(s, \mathbf{b}) \in \Omega,$$

cela signifie que:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x_1}}(\hat{x}) = \mathbf{a} \cdot \nabla u(x).$$

L' inégalité à prouver s'exprime alors par:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{u}^2 \left| \frac{D(x)}{D(\hat{x})} \right| \, \mathrm{d}\hat{\mathrm{x}} \leq C \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x_1}} \right)^2 \left| \frac{D(x)}{D(\hat{x})} \right| \, \mathrm{d}\hat{\mathrm{x}} \tag{6.5}$$

Contrôlons le jacobien $\frac{D(x)}{D(\hat{x})} = \mathrm{Jac}(\xi)$ dans Ω. On sait que [9]:

$$\frac{d\mathrm{Jac}(\xi)}{ds}(s, \mathbf{b}) = \mathrm{div}\mathbf{a} \cdot \mathrm{Jac}(\xi)(s, \mathbf{b}).$$

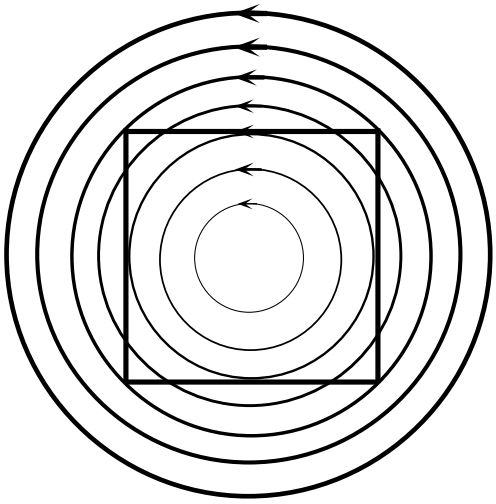


Figure 6.2: Flot en vortex dans un carré.

Or $\mathrm{Jac}(\xi)(0,\mathbf{b}) = 1$ donc

$$\mathrm{Jac}(\xi)(t,\mathbf{b}) = \exp\{\int_0^t \mathrm{div}\mathbf{a}(s,\mathbf{b})\,\mathrm{ds}\}$$

si $\mathbf{a}$ est supposé incompressible, on a $\mathrm{Jac}(\xi) \equiv 1$. L'inégalité (6.5) devient alors:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{u}^2\,\mathrm{d\hat{x}} \leq C \int_{\hat{\Omega}} (\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x_1}})^2\,\mathrm{d\hat{x}}$$

qui n'est autre que l'inégalité de Poincaré usuelle dans la direction $\mathbf{e_1}$ [61]. ■

Remarque. Si $\mathrm{div}\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)$, le raisonnement demeure valide. □

Remarque. Si les hypothèses de la proposition 7 sont vérifiées, la constante de l'inégalité 6.4 est majorée par $2\,\mathrm{diam}_{\mathbf{k}}(\Omega)/\alpha$, ce qui est connu pour l'inégalité de Poincaré usuelle (lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{e_1}$). □

On peut donner des contre-exemples lorsque (6.3) n'est pas vérifiée: soit $\mathbf{a} = (-y, x)$, une fonction radiale $u = u(r)$, nulle pour $r \geq 1/2$ et valant l'unité pour $r \leq 1/4$ par exemple. Manifestement $\mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$, violant ainsi (6.4). Voir fig. 6.2.
On a la propriété étonnante:

Proposition 8 *Un écoulement* instationnaire *gouverné par un champ C^1 à divergence nulle dans un voisinage V de $\bar{\Omega}$ est Ω-remplissant.*

Preuve. Il suffit de prendre $\mathbf{k} = (\mathbf{0}, 1)$. ∎

Nous pouvons maintenant énoncer, sous forme légèrement plus générale, le théorème 12 démontré au chapitre précédent:

Théorème 15 *Si l'écoulement est Ω-remplissant, alors le problème (5.21) est bien posé.*

6.2 Équivalence entre les formulations advective et diffusive.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, pour l'équation

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a} \cdot \nabla u & = f & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma^- \end{array} \tag{6.6}$$

nous examinons maintenant l'équivalence entre les formulations faibles suivantes:

Trouver $u \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$ tel que $\forall \phi \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$,

$$\int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u)(\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) = \int_\Omega f(\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) \tag{6.7}$$

et

Trouver $u \in H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$ tel que $\forall \phi \in L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u)\phi = \int_\Omega f\phi \tag{6.8}$$

Remarque. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la méthode STILS correspondant à (6.7) revient à chercher le minimum parmi les fonctions admissibles de

$$\pi(u) = 1/2 \int_\Omega (\mathcal{A}u - f)^2 \to \min.$$

En revanche, la formulation faible de Galerkin standard (6.8), n'étant pas symétrique, ne correspond pas à un principe de minimum. □

Tout d'abord toute solution de (6.8) est aussi solution de (6.7). De plus, si le problème advectif (6.8) est bien posé dans $L^2(\Omega)$, cela signifie que

$$\|u\|_0 \leq C\|f\|_0 = \|\mathbf{a} \cdot \nabla u\|_0.$$

Ainsi l'inégalité de Poincaré courbe est une *condition nécessaire* au caractère bien posé dans $L^2(\Omega)$ de l'équation d' advection (6.6). Donc si l'équation d' advection est bien posée dans $L^2(\Omega)$, par le théorème 12 STILS aussi et conduit à la même solution.

Réciproquement, a priori le problème diffusif (6.7) est à interpréter en un sens plus faible que le problème advectif original, en particulier il se pourrait que

$$1/2 \int_\Omega (\mathcal{A}u - f)^2$$

admette un minimum non nul, de la même façon qu'en dimension finie le système aux moindres carrés

$$A^T A \cdot x = A^T b$$

peut avoir des solutions alors que

$$A \cdot x = b$$

n'en a pas. Ceci est d'ailleurs plutôt un avantage pour STILS, qui peut éventuellement avoir une solution sans que l'équation d'advection en ait. Mais on montre le

Théorème 16 *Si l'écoulement est Ω-remplissant, alors l'équation d'advection (5.9)-(5.10) admet une unique solution dans $H_0(\mathbf{a}, \Omega, \Gamma^-)$.*

Preuve. Il suffit de prouver la densité de

$$\left\{\mathbf{a} \cdot \nabla\phi,\ \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)\right\}$$

dans $L^2(\Omega)$. Soit $\psi \in L^2(\Omega)$ orthogonal à $\left\{\mathbf{a} \cdot \nabla\phi,\ \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)\right\}$, montrons que $\psi \equiv 0$.
L'orthogonalité se traduit par:

$$\int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla\phi)\psi = 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-). \tag{6.9}$$

Prenons en particulier $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et intégrons par parties

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(\phi \cdot \mathbf{a})\psi = 0.$$

Ceci signifie que

$$< \nabla\psi, \phi \cdot \mathbf{a} >= 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme $\nabla\psi$ est une distribution d'ordre 1, que $\mathbf{a}$ est de classe C^1, la distribution $\mathbf{a} \cdot \nabla\psi$ est bien définie et vérifie

$$< \mathbf{a} \cdot \nabla\psi, \phi >= 0.$$

Donc la distribution $\mathbf{a} \cdot \nabla\psi = 0 \in L^2(\Omega)$, ainsi, par la définition donnée au chapitre précédent,

$$\psi \in H(\mathbf{a}, \Omega).$$

On peut donc [18, 22] considérer sa trace sur le bord Γ^+, le bord étant supposé $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Prenant maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$ non nul sur Γ^+, intégrant à nouveau (6.9) par parties conduit à

$$\int_{\Gamma^+} \phi\psi \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = 0.$$

Comme ψ est arbitraire sur Γ^+, que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} > 0$ sur Γ^+, cela entraîne

$$\psi_{|\Gamma^+} = 0.$$

inégalité de Poincaré courbe pour l'écoulement dual.

Appliquant enfin l'inégalité de Poincaré courbe pour le champ $-\mathbf{a}$ issu de Γ^+, il résulte

$$\psi \equiv 0.$$

■

Remarque. La condition (6.3) doit être vérifiée jusqu'au bord du domaine, sinon il peut ne pas y avoir de solution dans $L^2(\Omega)$: prenons par exemple $\mathbf{a} = (y, 0)$, alors l'équation $y\partial_x u = 1$ dans le carré $]0,1[^2$ avec $u = 0$ sur $\Gamma^- = \{x = 0\}$ admet une unique solution $u = x/y$ *qui n'est pas dans* $L^2(\Omega)$. Voir fig. 6.3. □

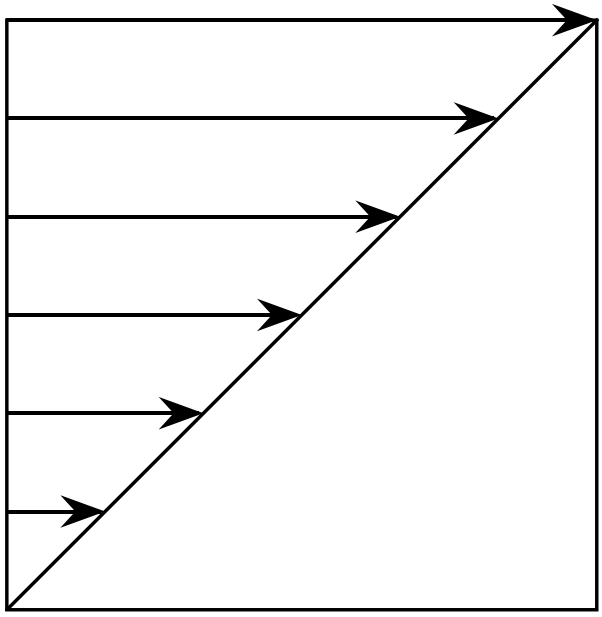


Figure 6.3: Ecoulement de Couette.

Annexe A

Nous utilisons dans les programmes suivants les routines de la bibliothèque FEK (Finite Element Kernel) développée à la Hebrew University of Jerusalem par l'équipe de M. Bercovier.

A.1 Élément fini hydrostatique.

La brique $Q0.5$.

```
      subroutine b4shap (x1,x2,x3,r,s,t,shp,dl,dg,det,iopt,eps,ierr)
ccbegin
c
c-----------------------------------------------------------------------
c     call b4shap (x1,x2,x3,r,s,t,shp,dl,dg,det,iopt,eps,ierr)
c
c
c     usage
c     =====
c
c     quadrilateral element, in three dimensions.
c     linear shape functions in x1 and x2, constant in x3.
c
c     purpose
c     -------
c
c     finds shape function local and global derivatives and jacobian
c     of transformation, at a point specified by the coordinates (r,s,t)
c     in the reference element (t = 0.0).
c
ccdoc
c     input arguments
c     ---------------
c
c     x1       = vector of length 8 containing first coordinates
c                of element nodal points.
c     x2       = vector of length 8 containing second coordinates
```

```
c                of element nodal points.
c     x3       = vector of length 8 containing third coordinates
c                of element nodal points.
c     r        = user specified first coordinate.
c     s        = user specified second coordinate.
c     t        = user specified third coordinate (= 0.0).
c     mndp     = row dimension of dadg and dadl in calling program.
c     iopt     = option paramater (see note 1).
c     eps      = criterion for checking zero determinant.
c
c     output arguments
c     ----------------
c
c     shp      = vector of length 4 containing shape functions.
c     dl       = matrix of order 4 x 3 containing local derivatives.
c     dg       = matrix of order 4 x 3 containing global derivatives.
c     det      = jacobian of transformation.
c     ierr     = error flag see note 2.
c
c     notes
c     -----
c
c     1. iopt = 0 shape functions only.
c               1 local derivatives.
c               2 local derivatives + jacobian.
c               3 local derivatives + jacobian + global derivatives.
c               -1 , -2 and -3 outputs the shape functions as well.
c
c     2. ierr = 0 successful execution
c               1 zero jacobian.
c              -1 negative jacobian.
c
c-----------------------------------------------------------------------
ccend
c
      implicit none
c
      real*8 x1,x2,x3,r,s,t,shp,dl,dg,det,eps
      integer iopt,ierr
      dimension x1(8),x2(8),x3(8),shp(4),dl(4,3),dg(4,3)
c
      real*8 shape,dadl,a,b,zero,un,us2
      real*8 rp,rm,sp,sm,tp,tm,c1,c2,c3,c
      integer ielt,i,j,k,ioptl
      dimension shape(8),dadl(8,3)
      dimension a(3,3),b(3,3)
c
      data zero,us2,un / 0.0d0,0.5d0,1.d0/
c
      ierr = 0
      ielt = 8
```

```
      rp =  us2*(un + r)
      rm =  us2*(un - r)
      sp =  us2*(un + s)
      sm =  us2*(un - s)
      tp =  us2*(un + zero)
      tm =  us2*(un - zero)
      if (iopt .gt. 0) go to 10
c
c     shape functions
c
      shp(1) = rm*sm
      shp(2) = rp*sm
      shp(3) = rp*sp
      shp(4) = rm*sp
c
      shape(1) = rm*sm*tm
      shape(2) = rp*sm*tm
      shape(3) = rp*sp*tm
      shape(4) = rm*sp*tm
      shape(5) = rm*sm*tp
      shape(6) = rp*sm*tp
      shape(7) = rp*sp*tp
      shape(8) = rm*sp*tp
      if (iopt .eq. 0) return
c
c     local derivatives
c
   10 ioptl = iabs (iopt)
      dl(1,1) = -us2*sm
      dl(2,1) =  us2*sm
      dl(3,1) =  us2*sp
      dl(4,1) = -us2*sp
c
      dl(1,2) = -us2*rm
      dl(2,2) = -us2*rp
      dl(3,2) =  us2*rp
      dl(4,2) =  us2*rm
c
      dl(1,3) = zero
      dl(2,3) = zero
      dl(3,3) = zero
      dl(4,3) = zero
c
      dadl(1,1) = -us2*sm*tm
      dadl(2,1) =  us2*sm*tm
      dadl(3,1) =  us2*sp*tm
      dadl(4,1) = -us2*sp*tm
      dadl(5,1) = -us2*sm*tp
      dadl(6,1) =  us2*sm*tp
      dadl(7,1) =  us2*sp*tp
      dadl(8,1) = -us2*sp*tp
```

```
c
      dadl(1,2) = -us2*rm*tm
      dadl(2,2) = -us2*rp*tm
      dadl(3,2) =  us2*rp*tm
      dadl(4,2) =  us2*rm*tm
      dadl(5,2) = -us2*rm*tp
      dadl(6,2) = -us2*rp*tp
      dadl(7,2) =  us2*rp*tp
      dadl(8,2) =  us2*rm*tp
c
      dadl(1,3) = -us2*rm*sm
      dadl(2,3) = -us2*rp*sm
      dadl(3,3) = -us2*rp*sp
      dadl(4,3) = -us2*rm*sp
      dadl(5,3) = -dadl(1,3)
      dadl(6,3) = -dadl(2,3)
      dadl(7,3) = -dadl(3,3)
      dadl(8,3) = -dadl(4,3)
      if (ioptl .eq. 1) return
c
c     jacobian matrix a
c
      do i = 1,3
         c1   = zero
         c2   = zero
         c3   = zero
         do j = 1,8
            c1   = c1 + dadl(j,i)*x1(j)
            c2   = c2 + dadl(j,i)*x2(j)
            c3   = c3 + dadl(j,i)*x3(j)
         end do
         a(i,1)  = c1
         a(i,2)  = c2
         a(i,3)  = c3
      end do
c
c     invert jacobian
c
      do i = 1,3
         j    = i + 1
         if (j .eq. 4) j = 1
         k    = j + 1
         if (k .eq. 4) k = 1
         b(i,i)= a(j,j)*a(k,k) - a(k,j)*a(j,k)
         b(i,j)= a(k,j)*a(i,k) - a(i,j)*a(k,k)
         b(j,i)= a(j,k)*a(k,i) - a(j,i)*a(k,k)
      end do
c
c     find determinant of jacobian matrix.
c
      det = a(1,1)*b(1,1) + a(1,2)*b(2,1) + a(1,3)*b(3,1)
```

```
c
c     check determinant of jacobian
c
      if (abs(det) .lt. eps) go to 70
      if (det .gt. zero) go to 45
      ierr = -1
      call erfac (4hb4sp,ierr)
   45 if (ioptl .eq. 2) return
c
c     find global derivatives
c
      do i = 1,3
         do j = 1,4
            c    = b(i,1)*dl(j,1) + b(i,2)*dl(j,2)
     1             + b(i,3)*dl(j,3)
            dg(j,i) = c/det
         end do
      end do
      return
c
c     zero jacobian
c
   70 continue
      ierr = 1
      call erfac (4hb4sp,ierr)
      end
```

A.2 Le code STILS.

```
      PROGRAM STYLE
C
C=================================================================
C     PROBLEM
C     -------
C
C     THE PROBLEM IS TO SOLVE THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION :
C     U_{t}  + aU_{x} = 0 REPLACING IT BY
C     U_{tt} + 2aU_{tx} + a^{2}U_{xx}  = 0  on (0,1)x(0,1)
C       ATTENTION X1 = x, X2 = t
C*****************************************************************
C     THE INITIAL-BOUNDARY CONDITIONS ARE:
C U(x,0) = f(x); U(0,t) = g(t)
C
C=================================================================
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1600),B(200),MDIAG(200),BOUND(200),Y(200)
      DIMENSION X(2,200),IEN(4,200),IA(200)
      DIMENSION STIFF(4,4),BE(4),LM(4),XX(4),YY(4)
```

```
C-------------------------------------------------------------
C     OPEN FILE FOR INITIAL INFORMATION AND RESULTS
C-------------------------------------------------------------
C
      open (unit=1,file='co.dat',status='old')
      open (unit=2,file='el.dat',status='old')
      open (unit=4,file='topo.dat',status='new')
      open (unit=7,file='resul.dat',status='new')
      open (unit=8,file='bound.dat',status='new')
C-------------------------------------------------------------
C     READ ADVECTIVE VELOCITY
C-------------------------------------------------------------
      print*,'ENTER ADVECTIVE VELOCITY'
      read*, alfa
C-------------------------------------------------------------
C     READ NODAL COORDINATES AND BOUNDARY CONDITION CODE
C-------------------------------------------------------------
      nfixb = 0
      read(1,*) NUMNP
      do 10 k=1,NUMNP
       read(1,*) nd, x(1,k), x(2,k)
if ((x(1,k) .eq. 0.D0) .OR. (x(2,k) .eq. 0.D0))   then
  ia(k) = 1
  nfixb = nfixb + 1
else
 ia(k) = 0
endif
10    continue
C-------------------------------------------------------------
C     READ IN FIXED BOUNDARY CONDITIONS
C
C     NEGATIVE NUMBER IN IA FOR FIXED BOUNDARY CONDITION
C
C-------------------------------------------------------------
C
        ifix = 0
DO 30 nd =1, NUMNP
if (ia(nd) .eq. 1) then
    ifix = ifix + 1
                  if (x(1,nd) .eq. 0.D0) then
         bound(ifix) = 1.D0
         else
 bound(ifix) = 0.D0
            endif
                  if ( abs(bound(ifix)).gt.1.e-8 ) ia(nd) = -ifix
                  write (8,2030) ND ,bound(ifix)
2030              format(i5,10x,f10.5)
endif
30 CONTINUE
C
C     NUMBERING OF EQUATIONS
```

```
C
      NEQ = 0
      DO 150 J=1,NUMNP
         IF (IA(J) .LT. 0) GO TO 150
         IF (IA(J) .GT. 0) GO TO 140
         NEQ = NEQ + 1
         IA(J) = NEQ
         GO TO 150
  140    IA(J) = 0
  150 CONTINUE
C
C-----------------------------------------------------------------
C     READ IN ELEMENT CONNECTIONS
C-----------------------------------------------------------------
C
      iel = 4
      read(2,*) NELEM
      DO 180 N=1,NELEM
         READ  (2,*) ND,(IEN(I,N),I=1,IEL)
  180 CONTINUE
C
C-----------------------------------------------------------------
C     FIND THE STRUCTURE OF THE MATRIX
C-----------------------------------------------------------------
C-------------------------CODE SYMETRIE MATRICE-----------------
      NSYM = 0
      CALL ICLEAR (MDIAG,NEQ)
      CALL FRWSKI (IA,IEN,1,IEL,MDIAG,NELEM)
      CALL FSTSKI (NSYM,MDIAG,NEQ,NA)
C
C-----------------------------------------------------------------
C     COMPUTE AND ASSEMBLE LOCAL MATRICES AND RIGHT-HAND SIDES
C-----------------------------------------------------------------
C
      CALL CLEAR (A,NA)
      CALL CLEAR (B,NEQ)
C
      DO 500 N=1,NELEM
C
C        FIND COORDINATES DEFINING ELEMENT NE AND
C        ELEMENT CONNECTION VECTOR LM.
C
         DO 170 I=1,IEL
            ND = IEN(I,N)
            XX(I) = X(1,ND)
            YY(I) = X(2,ND)
            LM(I) = IA(ND)
  170    CONTINUE
C
C        CONSTRUCT ELEMENT STIFFNESS MATRIX
C
```

```
         CALL ESTIFF (alfa,STIFF,BE,LM,IEL,XX,YY)
C
C        ELIMINATE FIXED BOUNDARY VALUES AT ELEMENT LEVEL.
C
         CALL FXVGNG (STIFF,BE,LM,IEL,IEL,BOUND)
C
C        ASSEMBLE TOTAL STIFFNESS MATRIX AND RIGHT-HAND SIDE
C
         CALL ADDSPI (3,A,B,MDIAG,STIFF,BE,LM,IEL,IEL)
C
  500 CONTINUE
C
C-----------------------------------------------------------------
C     SOLVE THE LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS
C-----------------------------------------------------------------
C
      CALL SLVSPI (A,B,B,MDIAG,NEQ,1,IERR)
C
C-----------------------------------------------------------------
C     OUTPUT SOLUTION
C----------------------------------------------------------------
C
      DO 200 I=1,NUMNP
         INT = IA(I)
         IF (IA(I) .GT. 0) THEN
            Y(I) = B(INT)
         ELSE IF (IA(I) .LT. 0) THEN
            Y(I) = BOUND(-INT)
         ELSE IF (IA(I) .EQ. 0) THEN
            Y(I) = 0.
         END IF
  200 CONTINUE
      LIG = nint( sqrt(dble(numnp)))
      WRITE (7,2070) ( (Y(I),I=1+(J-1)*LIG ,J*LIG),J=1,LIG)
2070  FORMAT(11(F7.3))
C-----------------FERMETURE DES FICHIERS-------------------------
      close(1)
      close(2)
      close(4)
      close(7)
      close(8)
      END
C
C----------------------------------------------------------------
C---------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ESTIFF (A,STIFF,BE,LM,IEL,R,Z)
C--------------------------------------------------------------
C     CONTRUCT ELEMENT STIFFNESS AND RIGHT-HAND SIDE
C--------------------------------------------------------------
C
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      PARAMETER (EPS=1.E-6)
      DIMENSION STIFF(4,4),BE(4),LM(4),R(*),Z(*)
      DIMENSION SHAPE(4),DADL(4,2),DADG(4,2),GAUS(2)
      DATA GAUS /.57735026918963,-.57735026918963/
C
      CALL CLEAR (BE,IEL)
      CALL CLEAR (STIFF,IEL*IEL)
C
C     INTEGRATION ON 2 X 2 POINTS
C
      DO 400 J=1,2
      DO 400 JJ=1,2
C
C        FIND SHAPE FUNCTIONS LOCAL AND GLOBAL DERIVATIVES AND
C        JACOBIAN OF TRANSFORMATION , AT POINTS GAUS(2) IN THE
C        REFERENCE ELEMENT.
C
         CALL Q4SHAP (R,Z,GAUS(J),GAUS(JJ),IEL,SHAPE,DADL,DADG,DET,-3
     1               ,EPS,IERR)
C
         DO 300 K = 1,IEL
            DO 200 L = 1,IEL
               STIFF(K,L) = STIFF(K,L) + DET*(DADG(K,2)*DADG(L,2)
     1                                   + A*(DADG(K,2)*DADG(L,1)
     2    +    DADG(K,1)*DADG(L,2)
     3    +    A*DADG(K,1)*DADG(L,1)))
  200       CONTINUE
C
C           STORE FORCES IN BE
C
            IF (LM(K) .LE. 0) GO TO 300
            BE(K) = BE(K) + DET*SHAPE(K)*(0.D0)
  300    CONTINUE
  400 CONTINUE
      END
```

Bibliographie

[1] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, North-Holland Elsevier, 1990.

[2] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.

[3] A. Assemien, *Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes pour des écoulements de faible épaisseur*, PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon I, 1993.

[4] A. Assemien, G. Bayada, and M. Chambat, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow*, tech. rep., Equipe d'Analyse Numérique Lyon-St Etienne, 1991.

[5] P. Azérad, *Analyse et approximation du problème de stokes dans un bassin peu profond*, C.R. Acad. Sci. Paris, 318 (1994), pp. 53–58.

[6] P. Azérad, P. Perrochet, and J. Pousin, *Space-time integrated least-squares: a simple, stable and precise finite element scheme to solve advection equations as if they were elliptic*, in Journées de Metz 1995, M. Chipot, ed., Pitman. to appear.

[7] P. Azérad and J. Pousin, *Inégalité de poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport*, soumis à C.R. Acad. Sci. Paris, (1995).

[8] I. Babuška, *Error bound for the finite element method*, Num. Math., 16 (1971), pp. 322–333.

[9] C. Bardos, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d'approximation; applications à l'équation de transport*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 3 (1970), pp. 185–233.

[10] O. Besson and M. R. Laydi, *Some estimates for the anisotropic navier-stokes equations and for the hydrostatic approximation*, M2AN - Mod. Math. Ana. Num., 26 (1992), pp. 855–865.

[11] O. Besson, M. R. Laydi, and R. Touzani, *Un modèle asymptotique en océanographie*, C.R. Acad. Sci. Paris, 310 (1990), pp. 661–665.

[12] J. L. Borges, *Fictions*, Gallimard.

[13] F. Brezzi, *On the existence,uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers*, R.A.I.R.O. Ana. Num., 8 (1974), pp. 129–151.

[14] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.

[15] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, *Streamline upwind/ petrov-galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations*, Comput. Meths Appl. Mech. Engrg., 32 (1982), pp. 199–259.

[16] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Elsevier, 1978.

[17] V. Comincioli, *Fortran 77, introduzione e applicazioni numeriche*, McGraw-Hill, 1991.

[18] R. Dautray and J. L. Lions, *Analyse mathématique et problèmes aux limites*, vol. 9, Masson, 1988.

[19] G. de Rham, *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, 1960.

[20] R. J. Diperna and P. L. Lions, *Equations différentielles ordinaires et equations de transport avec des coefficients irreguliers*, in Séminaire Equations aux dérivées partielles 88-89, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1989.

[21] R. J. DiPerna and P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces*, Invent. math., 98 (1989), pp. 511–547.

[22] G. Geymonat and P. Leyland, *Transport and propagation of a perturbation of a flow of a compressible fluid in a bounded region*, Arch. Rat. Mech. Anal., 103 (88), pp. 53–81.

[23] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, 1986.

[24] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, 1984.

[25] P. Hansbo, *The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems*, Comput. Meths Appl. Mech. Engrg., 96 (1992), pp. 239–253.

[26] E. Hopf, *Über die anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen grundgleichungen*, Math. Nachr., 4 (1951), pp. 213–231.

[27] L. Hormander, *Non-linear Hyperbolic Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Lund, 1987.

[28] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 73 (1989), pp. 173–189.

[29] C. Johnson, *Numerical solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.

[30] ——, *A new approach to algorithms for convection problems which are based on exact transport + projection*, Comput. Meths Appl. Mech. Engrg., 100 (1992), pp. 45–62.

[31] A. Kufner, O. John, and S. Fučik, *Function spaces*, Noordhoff, Leyden, 1977.

[32] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon Breach, 2nd ed., 1969.

[33] J. Leray, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris, 11 (1994), pp. 287–290.

[34] P. Lesaint, *Introduction aux systèmes de friedrichs et à l' équation de transport.* notes de cours.

[35] J. L. Lions, *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.

[36] ——, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Mathematics 323, Springer, 1973.

[37] ——, *On some problems connected with navier-stokes equations*, in Nonlinear Evolution Equations, M. Crandall, ed., Academic Press, 1978, pp. 59–84.

[38] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, CEREMADE Université Paris-Dauphine, 1995. preliminary version.

[39] J. Nečas, *Sur une méthode pour résoudre les edp du style elliptique voisine de la variationnelle*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4 (1962), pp. 305–326.

[40] H. Nguyen and J. Reynen, *A space-time least squares finite element scheme for advection- diffusion equations*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 42 (1984), pp. 331–342.

[41] J. T. Oden and J. N. Reddy, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer-Verlag, 1983.

[42] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[43] P. Perrochet and P. Azérad, *Space-time integrated least-squares: Advection = anisotropic diffusion*, in Journées de Besançon 1995, J. Crolet, ed., Pitman. to appear.

[44] ——, *Space-time integrated least-squares: Solving a pure advection equation with a pure diffusion operator*, J. Comput. Phys., 117 (1995), pp. 183–193.

[45] L. Quartapelle, *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes equations*, Birkhaeuser, 1993.

[46] J. E. Roberts and J. M. Thomas, *Handbook of numerical analysis*, in Mixed and hybrid methods vol II, Finite Element Method (part 1), North-Holland Elsevier, 1991, pp. 527–637.

[47] E. Sarasin and L. du Pasquier, *Les seiches du lac de neuchâtel*, Bull. soc. sc. nat. Neuchâtel, (1895), pp. 3–9.

[48] P. J. Shopov, *Basis for finite element schemes for an inhomogeneous fluid*, Math. Balkan., 4 (1990), pp. 113–128.

[49] J. Simon, *Compact sets in the space $l^p(o,t;b)$*, Ann. Mat. Pura Appl., 146 (1987), pp. 65–97.

[50] ——, *Sur les fluides visqueux incompressibles et non homogènes*, C.R. Acad. Sci. Paris, 309 (1989), pp. 447–452.

[51] ——, *Non-homogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 21 (1990), pp. 1093–1117.

[52] ——, *Sobolev, besov and nikolskii fractional spaces: imbeddings and comparisons for vector valued spaces on an interval*, Ann. Mat. Pura Appl., 157 (1990), pp. 117–148.

[53] R. Stenberg, *On some three-dimensional finite elements for incompressible media*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 63 (1987), pp. 261–269.

[54] ——, *Error analysis of some finite element methods for the stokes problem*, Math. Comp., 54 (1990), pp. 495–508.

[55] G. Strang, *Linear Algebra and its application*, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 3rd ed., 1998.

[56] U. Suter, *communication personnelle.*

[57] R. Temam, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*, Ann. Mat. Pura ed Applicata, (1968), pp. 191–379.

[58] ——, *Navier-Stokes equations*, North-Holland Elsevier, 1985.

[59] A. Valli, *An existence theorem for non-homogeneous inviscid incompressible fluids*, in Differential Equations, C. Dafermos and al., eds., Marcel Dekker, New York, 1989, pp. 691–698.

[60] A. Valli and W. M. Zajaczkowski, *About the motion of nonhomogeneous ideal incompressible fluids*, Nonlinear Anal., 12 (1988), pp. 43–50.

[61] W. Velte, *Direkte methoden der variationsrechnung*, Teubner, Stuttgart, 1976.

[62] R. K. Zeytounian, *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens*, Springer-Verlag, 1994.

Les mathématiques sont simples,
c'est nous qui sommes compliqués.

Dr Teddy