

Habilitation à diriger des recherches

présentée à

l'Université Montpellier 2

Spécialité

Mathématiques appliquées

par

Pascal AZERAD

Titre

**Contributions à l'étude de quelques équations
aux dérivées partielles, en mécanique des
fluides et en génie côtier.**

Soutenue le 19 décembre 2007 devant le jury composé de :

Hedy Attouch	PR Montpellier 2	Président
Thierry Gallouët	PR Aix-Marseille 1	Rapporteur
Bijan Mohammadi	PR Montpellier 2	Examineur
Benoît Perthame	PR Paris 6	Rapporteur
Jean-Claude Saut	PR Paris 11	Rapporteur

Remerciements.

Ma gratitude va à Bijan Mohammadi, qui m'a encouragé à passer cette HDR. Hédy Attouch me fait l'honneur de présider mon jury, je l'en remercie vivement.

A Messieurs les Professeurs Gallouët, Perthame, Saut, rapporteurs, j'exprime ma reconnaissance sincère.

Enfin, je sais gré à Oana de sa disponibilité ces dernières années, où nos enfants Maria et Etienne réclamaient notre attention de tous les instants.

« ... Voilà ce que j'ai fait, ce que j'ai pensé, ce que je fus. J'ai dit le bien et le mal avec la même franchise. Je n'ai rien tu de mauvais, rien ajouté de bon ; et s'il m'est arrivé d'employer quelque ornement indifférent, ce n'a jamais été que pour remplir un vide occasionné par mon défaut de mémoire. J'ai pu supposer vrai ce que je savais avoir pu l'être, jamais ce que je savais être faux ... »

J. J. Rousseau, extrait des Confessions, livre 1, 1765, Neuchâtel.

Table des matières

1	Introduction.	4
2	Pendant la thèse.	4
2.1	Autour de l'approximation hydrostatique dans les fluides peu profonds.	4
2.1.1	Le problème de Stokes hydrostatique, [10, 17].	4
2.1.2	Elément fini mixte hydrostatique, [10, 17, 14, 13].	6
2.1.3	Un premier pas vers la justification de l'approximation hydrostatique, [17].	6
2.2	Autour de l'équation de transport linéaire.	6
2.2.1	La méthode STILS, [9, 11].	6
2.2.2	Inégalité de Poincaré courbe pour le transport, [8].	8
3	Depuis la thèse.	9
3.1	Analyse asymptotique des équations de Navier-Stokes.	9
3.1.1	L'existence et la convergence pour les équations primitives, [7, 6].	9
3.1.2	L'écoulement cône-plan, [5].	11
3.2	Modélisation, simulation numérique et optimisation d'ouvrages contre l'érosion du littoral.	13
3.2.1	L'optimisation d'épis ou brise-lames par l'équation de Helmholtz, [2].	14
3.2.2	L'optimisation de géotextiles en eaux peu profondes par modèle de réfraction-diffraction, [1].	15
3.3	Equations comportant des termes non locaux.	15
3.3.1	Equation avec terme stochastique de bruit blanc, [3].	15
3.3.2	Equation morphodynamique de dune, [16, 18] et perspectives.	17
4	Publications.	21
5	Bibliographie.	23

1 Introduction.

Le sujet de mes recherches trouve la plupart du temps son origine dans un problème physique réel et touche, de près ou de loin, la mécanique des fluides, plus précisément l'écoulement de l'eau dans les lacs ou les mers [6, 7, 10], l'érosion du littoral [1, 2, 4], ou encore l'écoulement du sang [5]. Ce fil conducteur m'a permis d'aborder des sujets variés : éléments finis mixtes [10, 13], équation de transport [8, 9, 11], analyse non linéaire [7, 6, 5], simulation numérique [9, 14, 13, 5], optimisation numérique [1, 2], équations non locales [3, 16] et de faire des allers-retours fréquents entre théorie et applications concrètes. Dans ce qui suit, je résume, commente et mets brièvement en perspective mes principaux articles. Je commence par rappeler rapidement les résultats de la thèse. Puis, je présente les travaux réalisés après la thèse, en les classant par thèmes. La numérotation renvoie à la liste de mes publications.

2 Pendant la thèse.

2.1 Autour de l'approximation hydrostatique dans les fluides peu profonds.

2.1.1 Le problème de Stokes hydrostatique, [10, 17].

J'ai débuté ma thèse sur le tard, après avoir enseigné plusieurs années en classe préparatoire à Besançon. J'avais demandé à assister aux Journées Numériques de Besançon en 1991 parce qu'elles étaient consacrées aux courants marins, sujet qui m'a toujours attiré. Je n'étais ni chercheur, ni doctorant, mais on m'accepta volontiers comme honnête homme. J'y fis la rencontre d'Olivier Besson, Professeur à l'Université de Neuchâtel (Suisse). Il travaillait alors sur la simulation numérique des courants dans le lac de Neuchâtel. Il me prit comme doctorant. Je commençai par regarder le problème de Stokes avec pression hydrostatique. Ce problème s'énonce ainsi, en vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et pression p :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} & = & f_1 \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} & = & f_2 \\ & \frac{\partial p}{\partial x_3} & = & g \\ & \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0 \\ & u_1 = u_2 = u_3 n_3 & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

C'est un problème singulier, car les vitesses verticales n'apparaissent plus sous la forme $-\Delta u_3$ mais seulement dans l'équation d'incompressibilité.¹ En allant assister à deux séminaires de Rolf Stenberg à Lausanne et Zürich, j'ai réalisé que les méthodes mixtes pouvaient s'écrire très simplement. La théorie classique de Brezzi-Babuška étant très indigeste pour le débutant que j'étais, j'ai alors réécrit et légèrement généralisé le théorème de Lax-Milgram-Babuška, de façon à unifier la cadre de toutes les méthodes d'éléments finis, mixtes ou non. En fait la condition classique de coercivité est la version dimension infinie de la définie positivité. C'est une condition *suffisante* pour qu'un problème variationnel soit bien posé. La bonne condition *nécessaire et suffisante* est la généralisation en dimension infinie de la non-dégénérescence. J'ai donné le nom de forme bilinéaire *persuasive* à cette propriété de stabilité, qui correspond à la condition inf-sup de Brezzi-Babuška, parfois aussi attribuée à Ladyzhenskaya.²

Définition 1 Soit U un espace de Banach, V un espace de Banach réflexif. Une forme bilinéaire a sur $U \times V$ est dite *persuasive* si

- (i) l'application $v \mapsto a(\cdot, v)$ est injective
- (ii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \geq C \|u\|$$

Le théorème s'énonce alors :

Théorème 1 Soit a bilinéaire continue sur $U \times V$. Le problème, étant donnée $f \in V'$, de trouver $u \in U$ tel que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

est bien posé si et seulement si a est *persuasive*.

Avec un choix adéquat d'espace fonctionnel pour les vitesses verticales, nous avons pu montrer que le problème était bien posé. Notons que par une méthode différente, des années plus tard, Tomas Chacon et Francisco Guillén [C] ont redémontré l'existence et l'unicité pour Stokes hydrostatique. Ils ont pu aussi montrer l'existence pour le système de Navier-Stokes stationnaire avec pression hydrostatique.

¹Cela explique la condition limite plus faible $u_3 n_3 = 0$, n_3 désignant la composante verticale de la normale.

²A mon avis, elle est due en fait à Nečas, [N, G1].

2.1.2 Élément fini mixte hydrostatique, [10, 17, 14, 13].

Suite au formalisme variationnel développé, il est naturel de chercher une discrétisation par éléments finis du problème. La régularité différente des vitesses horizontales, verticales et pression laisse augurer qu’il faut les discrétiser différemment afin de satisfaire la condition de persuasion. Il est souvent délicat de vérifier que les espaces choisis pour discrétiser vitesse et pression sont compatibles. Ici, il y a une difficulté supplémentaire avec les vitesses verticales. En appliquant la technique de macro-élément de Stenberg [St], j’ai pu fabriquer un élément fini $P_2 - P_1 - P_{0.5}$, où les vitesses horizontales sont polynômiales de degré 2, les vitesses verticales de degré 1 et les pressions sont localement hydrostatique (i.e. ne dépendent que de x_1, x_2), qui est stable et prouver une estimation d’erreur.

2.1.3 Un premier pas vers la justification de l’approximation hydrostatique, [17].

O. Besson, R. Laydi et R. Touzani avaient déjà obtenu l’existence et l’unicité pour le problème de Stokes hydrostatique par une méthode d’analyse asymptotique, en le considérant comme perturbation singulière du problème de Stokes usuel, lorsque le quotient d’aspect ϵ tend vers zéro, [BLT]. Puis Besson-Laydi [BL] ont résolu les équations de Navier-Stokes non linéaire stationnaires avec pression hydrostatique par la même approche d’analyse asymptotique. En remplaçant le terme d’advection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ par $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, où \mathbf{a} est un champ de vitesse à divergence nulle *donné*, j’ai traité dans ma thèse les équations d’Oseen instationnaires avec pression hydrostatique. J’ai prouvé l’existence, l’unicité de solutions faibles par l’analyse asymptotique, mais je n’ai pas réussi à l’époque à traiter le cas des équations de Navier-Stokes complètes (non linéaires instationnaires) car je ne parvenais pas à passer à la limite dans le terme d’advection *horizontal*, par défaut de compacité des vitesses horizontales (pour le terme d’advection vertical, on s’en sort parce que les vitesses verticales sont très petites). J’ai fini par résoudre ce problème des années plus tard, en collaboration avec Francisco Guillén (Séville). Je reviens sur ce travail dans la section 3.1.1.

2.2 Autour de l’équation de transport linéaire.

2.2.1 La méthode STILS, [9, 11].

Motivé par la simulation numérique des courants de densité, c’est-à-dire la simulation des vitesses dans les équations de Navier-Stokes incompressible à

densité variable, je me suis intéressé à l'équation de transport linéaire en domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec conditions limites entrantes et condition initiale, :

$$(\mathbf{A}) \quad \partial_t u + \mathbf{a}(x, t) \cdot \nabla_x u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)$$

$$u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma^- = \{x \in \partial\Omega; \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0\}$$

$$u(\cdot, t = 0) = h \quad \text{sur} \quad \Omega$$

où l'inconnue u est maintenant un scalaire passif, par exemple la densité du fluide et $\mathbf{a}(x, t)$ est un champ de vitesse à divergence nulle.³ Tout est né d'une conversation avec Pierre Perrochet, alors ingénieur hydrogéologue et maintenant Professeur au centre d'hydrogéologie de l'université de Neuchâtel. En simplifiant radicalement la méthode GLS (Galerkin Least Squares) [H], il avait expérimenté tout seul une méthode de résolution basée sur la formulation aux moindres carrés de l'équation d'advection, écrite dans l'espace-temps, qui rendait son algorithme formellement identique à celui d'un laplacien ! J'étais naturellement sceptique, mais comme j'avais déjà vu que, selon le cadre fonctionnel utilisé, le théorème de Lax-Milgram pouvait traiter des problèmes autres qu'elliptiques, je l'écoutai attentivement. En se plaçant dans l'espace-temps $Q = \Omega \times (0, T)$, tout devenait très clair. Le bord du domaine est $\partial Q = \partial\Omega \times (0, T) \cup \Omega \times \{0, T\}$, la normale sortante vaut $\nu = (\mathbf{n}, 0)$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$ et $\nu = (\mathbf{0}, 1)$ (resp. $(\mathbf{0}, -1)$) sur $\Omega \times \{T\}$ (resp. $\Omega \times \{0\}$). En posant $b = (\mathbf{a}, 1) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$, la frontière entrante $\partial Q^- = \{(x, t) \in \partial Q; \mathbf{b} \cdot \nu < 0\}$ devient $\partial Q^- = \Gamma^- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\}$.⁴ Si on note $\nabla = (\nabla_x, \partial_t)$, en modifiant convenablement le terme source f , l'équation d'advection (\mathbf{A}) s'écrit alors

$$b \cdot \nabla u = f, \quad u = 0 \text{ sur } \partial Q^-$$

Il m'a paru alors naturel de considérer les espaces fonctionnels du transport :

$$H(b, Q) = \{v \in L^2(Q); b \cdot \nabla v \in L^2(Q)\}$$

muni de la norme du graphe et d'écrire le problème de l'advection par un champ incompressible sous la forme variationnelle aux moindres carrés :

$$B(u, v) = \int_Q (b \cdot \nabla u) (b \cdot \nabla v) = \int_Q f (b \cdot \nabla v).$$

Tout cela a conduit à la méthode STILS (space-time integrated least squares), une méthode simple et stable de résolution en éléments finis de l'équation de

³cette hypothèse n'est pas nécessaire mais simplifie la présentation.

⁴noter que la condition initiale est alors intégrée dans la condition limite entrante.

transport. Nous avons publié notre travail dans [9] où nous l’illustrons par quelques simulations numériques de problèmes multi-dimensionnels délicats. La méthode STILS a été testée depuis de façon intensive dans la thèse de G. de Montmollin [dM, BG], dont j’ai été rapporteur.

Le fait de pouvoir traiter le théorème de Lax-Milgram aux équations hyperboliques est aussi un résultat intéressant en soi. J-L. Guermond a appliqué avec succès de façon systématique le théorème de Lax-Milgram-Babuška à des problèmes hyperboliques, voir [G1, G2].

2.2.2 Inégalité de Poincaré courbe pour le transport, [8].

Pour montrer la coercivité de la forme B , il fallait toutefois établir une inégalité de Poincaré “courbe” que j’ai démontrée [8, 17], en collaboration avec J. Pousin (INSA Lyon).

$$\forall u \in H(b, Q) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial Q^-, \|u\| \leq C \|b \cdot \nabla u\|$$

Le domaine Q n’est plus nécessairement borné, mais il faut que le champ de vitesse b soit *remplissant* i.e. que les caractéristiques du champ de vitesse issues du bord entrant ∂Q^- remplissent le domaine en temps fini borné, sauf éventuellement un ensemble de mesure nulle. Je donne aussi une condition suffisante simple pour que l’écoulement soit remplissant : il suffit que le champ de vitesse soit borné et qu’il possède une direction privilégiée (i.e. un vecteur fixe k tel que $b \cdot k \geq 1$) dans laquelle le domaine soit borné. Or pour le problème du transport instationnaire, c’est toujours le cas : il suffit de prendre la direction du temps $k = (\mathbf{0}, 1)$.

On peut essayer de généraliser la méthode à des champs de vitesses peu réguliers, à divergence éventuellement non nulle, en particulier pour essayer d’améliorer les résultats classiques de DiPerna-Lions, [PL]. Apparemment, tout se passe bien mais il y a un écueil caché ici, le célèbre lemme des commutateurs de Friedrichs qui empêche la densité des fonctions régulières dans les espaces anisotropes de transport. On ne peut plus démontrer grand chose sans cela. En particulier les contre-exemples de Depauw et Aizenman [De, Ai] montrent qu’il ne suffit pas que $b \in L^\infty(Q)$, $\operatorname{div} b \in L^\infty(Q)$ pour avoir l’unicité. Les conditions les plus générales à ce jour ont été obtenues par Ambrosio, [Am].

En résumé, pour situer les résultats obtenus par la méthode STILS par rapport à ceux obtenus sur le transport par C. Bardos basés sur la théorie des caractéristiques [B], on peut dire que le cadre fonctionnel est plus naturel, que le rôle de la norme du transport est bien mis en évidence (voir aussi à ce sujet le travail de Franck Boyer [Bo]) et donc que les preuves sont plus simples.

3 Depuis la thèse.

3.1 Analyse asymptotique des équations de Navier-Stokes.

3.1.1 L'existence et la convergence pour les équations primitives, [7, 6].

Blaise Pascal, dans son traité *de l'équilibre des liqueurs*, publié en 1663 à Paris relate l'expérience que son beau-frère a réalisée selon ses instructions au sommet du Puy de Dôme et énonce la loi selon laquelle la pression dans les fluides croît linéairement avec la profondeur (ou, ce qui revient au même, décroît linéairement avec l'altitude). Cette loi est rigoureusement exacte dans les fluides au repos car l'équation d'Euler s'écrit alors $\nabla P = \rho \mathbf{g}$, mais pourquoi est-elle vraie dans l'atmosphère, dans les océans, mers, lacs, ... ? La raison tient en ce que la plupart des fluides géophysiques tels que lacs, mers, océans, atmosphères, galaxies, vérifient la « loi des flaques » : le quotient d'aspect

$$\epsilon = \frac{\text{profondeur}}{\text{étendue horizontale}}$$

est très petit. Ainsi, à une homothétie près, l'océan atlantique nord est une flaque d'eau d'un mètre de long et de deux millimètres de profondeur environ (profondeur maximum 8.6 km, largeur maximum 4800 km, source Wikipedia). Comme le fluide est incompressible, cela entraîne que la vitesse verticale w est négligeable devant les vitesses horizontales u et v :

$$w \sim \epsilon(u, v).$$

Avec Francisco Guillén, de l'université de Séville que j'avais invité à Perpignan, nous avons pu effectuer l'analyse asymptotique des équations de Navier-Stokes instationnaires et justifier rigoureusement l'approximation hydrostatique quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Lions-Temam-Wang [LTW] avaient déjà obtenu l'existence de solutions au problème de Navier-Stokes avec pression hydrostatique (les équations dites *primitives* de l'océanographie). Mais ils n'avaient pas montré la *convergence* des solutions faibles des équations de Navier-Stokes vers les solutions faibles des équations de Navier-Stokes avec pression hydrostatique lorsque ϵ tend vers zéro. De plus leur travail supposait la profondeur strictement minorée, ce que nous ne faisons pas. Une difficulté majeure du travail concerne la régularité des vitesses verticales. En effet l'approximation hydrostatique consiste à remplacer l'équation :

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) - \nu \Delta w + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \mathbf{g}$$

par

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \mathbf{g}$$

La vitesse verticale n'apparaît plus sous la forme $\frac{\partial w}{\partial t}$ mais seulement dans l'équation d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ainsi que dans les termes d'advection de vitesse horizontale

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{et} \quad w \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Il faut donc choisir soigneusement les espaces fonctionnels pour les vitesses verticales. La seule hypothèse que nous faisons concerne la viscosité du fluide que nous considérons *anisotrope*. Nous remplaçons $\nu \Delta$ par

$$\nu_H \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et choisissons

$$\nu_V / \nu_H = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Cela peut paraître étrange, la viscosité étant une grandeur caractéristique de la loi de comportement du fluide reliant les contraintes aux taux de déformations, elle doit respecter les invariances par rotation et doit être rigoureusement isotrope. Cependant les équations de Navier-Stokes modélisent l'écoulement réel du fluide, y compris ses échelles les plus petites, or les écoulements géophysiques sont par essence turbulents et si on cherche l'écoulement à grande échelle, une modélisation, certes rudimentaire, consiste à prendre des viscosités turbulentes beaucoup plus grosses que la viscosité cinématique de l'eau. Ces viscosités turbulentes sont directement liées à la taille des tourbillons que l'on désire étudier. Ces viscosités turbulentes ne sont pas isotropes, puisque la hauteur des tourbillons est beaucoup plus petite que leur diamètre horizontal. Si L_V (resp. L_H) désigne une longueur caractéristique verticale (resp. horizontale), $\nu_H \sim L_H^2/T$, $\nu_V \sim L_V^2/T$ et comme $L_V \sim \epsilon L_H$ ainsi on retrouve bien $\nu_V \sim \epsilon^2 \nu_H$.

Une difficulté majeure du passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ est d'obtenir de la compacité pour les vitesses afin de contrôler les termes non linéaires d'advection. A cause du manque de contrôle des vitesses verticales, ni le lemme d'Aubin-Lions, ni le critère usuel des translations de Kolmogorov ne peuvent s'appliquer. Nous avons mis en évidence un critère de *compacité par perturbation*, qui améliore le critère classique des translations de Kolmogorov et nous permet d'obtenir la compacité, pour les vitesses horizontales seulement, qui nous avait manqué (voir alinéa 2.1.3).

3.1.2 L'écoulement cône-plan, [5].

A la Cité de l'espace à Toulouse, le visiteur est mis en présence d'un dispositif étrange. Un cylindre de révolution de grand diamètre et de hauteur faible est rempli de fluide. Le cylindre est en plexiglas transparent et est monté sur un axe vertical, de sorte que le visiteur peut le faire tourner à sa guise. Le fluide est parsemé de particules photoluminescentes qui rendent visible son écoulement. Lorsque l'on fait tourner le cylindre, à partir d'une certaine vitesse angulaire, l'écoulement s'organise en lignes circulaires concentriques. Le liquide tourne vraiment exactement comme le cylindre rigide. Puis au delà d'une certaine vitesse angulaire, l'écoulement se désorganise et devient turbulent. Ceci se produit graduellement, à partir de la périphérie, là où la vitesse centrifuge (et donc le nombre de Reynolds local) atteint son maximum. Il y a en particulier une zone $\rho < R_{critique}$ près de l'axe où le fluide garde son écoulement circulaire parfaitement azimutal. Pour $\rho \gg R_{critique}$, l'écoulement est turbulent.

Le dispositif cône-plan que nous avons étudié présente des traits analogues et il a été très peu étudié, en tout cas beaucoup moins que l'écoulement de Couette-Taylor. Son étude m'a été suggérée par le Docteur Marie-Agnès Azerad, spécialiste en hématologie à l'Institut Jules Bordet à Bruxelles. Il s'agit d'une chambre de perfusion utilisée pour étudier les propriétés rhéologiques du sang de patient, en particulier la faculté des plaquettes à coaguler en fonction de la contrainte de cisaillement pariétale (shear induced platelet aggregation) :

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Le liquide est confiné entre le cône $z = \rho \tan \alpha$, le plan $z = 0$ et le cylindre extérieur $\rho = R$. L'angle α est très petit, de sorte que $\epsilon := \tan \alpha$ est un petit paramètre. Le cône est en rotation, tandis que le plan et le cylindre sont fixes, voir fig. 1. Ce travail, effectué en collaboration avec E. Bänsch (alors Prof. au WIAS Berlin, maintenant Prof. à Erlangen) a permis d'établir les principales caractéristiques de l'écoulement. Le flot de base est azimutal là encore,

$$u_b = \frac{\omega z}{\epsilon} \mathbf{e}_\theta,$$

mais il comporte une couche limite singulière, car la vitesse est discontinue le long du cercle $\rho = R$, $z = R\epsilon$. Ce genre de difficulté survient aussi dans des écoulements plus classiques (Couette-Taylor, cavité entraînée) et avait été étudié dans ce cas par D. Serre [Se]. Pour surmonter cette difficulté, il faut soustraire un correcteur adéquat à la solution pour se ramener à un problème régulier. En général, on choisit la solution du problème de Stokes associé. Il

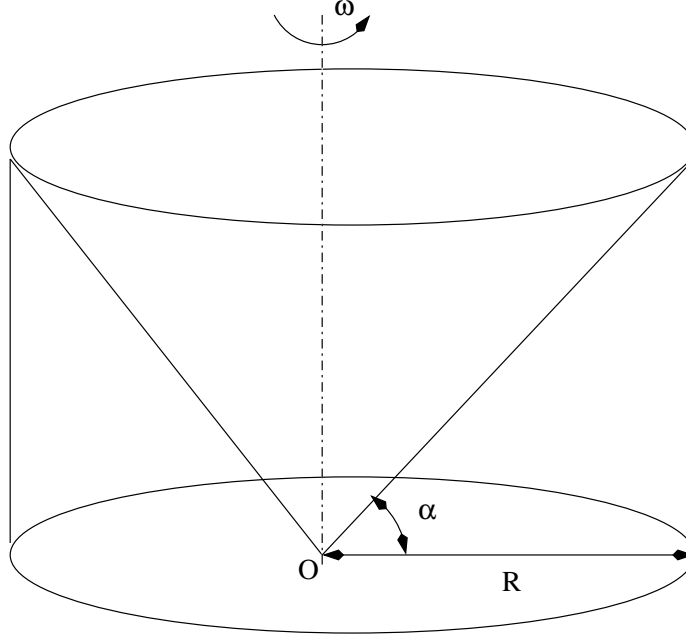


FIG. 1 – Le rhéomètre cône-plan, avec angle α grossi.

y a ici deux difficultés supplémentaires : l'écoulement de base azimuthal n'est PAS solution des équations de Navier-Stokes, ni même de Stokes et il viole la condition limite d'adhérence à la paroi extérieure du cylindre fixe $\rho = R$. Cependant, cet écoulement s'observe expérimentalement !

Nous avons démontré qu'il s'agit en quelque sorte d'une quasi-solution, valable dans une plage de nombre de Reynolds

$$1 \leq Re = \frac{R^2 \omega}{\nu} \leq \frac{2}{\epsilon}.$$

On retrouve le fait intuitif que la vitesse de rotation doit être suffisante pour que le flot soit azimuthal, mais pas trop grande sinon un flot secondaire radial se développe et l'écoulement se désorganise. Nous avons démontré la quasi-stabilité de l'écoulement de base au sens suivant. Pour toute solution faible (au sens de Leray-Hopf) u des équations de Navier-Stokes dans le domaine cône-plan, prenant la valeur initiale u_0 et vérifiant la condition limite d'adhérence aux parois, on a

$$\|u - u_b\|_{L^2(\Omega_r)} \leq C Re \epsilon^2 + \|u_0 - u_b\| \exp\left(-\frac{t}{Re \epsilon^2}\right)$$

Le domaine Ω_r désigne $\Omega \cap (\rho < r)$ est strictement compris dans Ω car l'écoulement de base u_b viole la condition limite d'adhérence à la paroi fixe

$\rho = R$. C'est donc une estimation d'énergie *locale* loin de la couche limite pariétale en $\rho = R$. Le nombre qui contrôle la qualité de l'approximation est ainsi $Re \epsilon^2$. Il avait été mis en évidence par les expériences physiques et par des développements asymptotiques formels [Sd]. La construction du correcteur est délicate, car la couche limite est elle-même singulière, i.e. d'épaisseur nulle sur le cercle $\rho = R$, $z = R\epsilon$. Nous utilisons la théorie classique du potentiel, en particulier la méthode de Perron pour le construire. Grâce à cette méthode de sous-solutions et sur-solutions, nous avons pu prouver que le correcteur était petit au voisinage du sommet du cône et bien localisé près de la paroi $\rho = R$, ceci nous permettant d'obtenir des estimations locales à distance positive de cette paroi.

Des simulations numériques réalisées avec un code de Navier-Stokes spécialement conçu pour les écoulements axisymétriques corroborent les résultats théoriques. A noter que l'existence et l'unicité pour les équations de Navier-Stokes axisymétriques a été montrée par Ladyzhenskaya [La] dans la cas où il n'y a pas de composante azimutale : $u_\theta = 0$ ⁵. Plus récemment Leonardi, Nečas, Mâlek, Pokorný [Le] ont démontré l'existence et l'unicité dans le cas où la distance du domaine à l'axe de révolution est strictement positive. L'existence et unicité de solutions pour l'écoulement cône-plan est donc un problème ouvert, puisqu'il ne rentre dans aucun de ces deux cas.

3.2 Modélisation, simulation numérique et optimisation d'ouvrages contre l'érosion du littoral.

Motivés par la proximité du littoral sableux du Languedoc-Roussillon et par l'observation du retrait de la plage, de la présence d'épîs (enrochements perpendiculaires au rivage⁶), brise-lames (enrochements parallèles au rivage) et de la nécessité de recharger périodiquement la plage en sable, je me suis intéressé au problème de l'érosion du littoral. Ce problème, d'importance et d'acuité croissante en raison, notamment, du réchauffement climatique et de l'urbanisation du littoral, concerne plus du quart du littoral français [le Monde],[CNRS]. A Perpignan déjà, j'avais eu la chance de rencontrer Jean-Paul Barusseau sédimentologue qui m'a initié au domaine et m'a dirigé vers Frédéric Bouchette, du laboratoire Géosciences Montpellier. Comme les techniques du génie côtier me paraissaient très empiriques et avaient souvent le gros inconvénient de guérir une portion du littoral mais en accentuant l'érosion sur le littoral adjacent, j'ai eu l'idée d'optimiser la forme des ouvrages d'art en espérant obtenir des formes nouvelles plus efficaces.

⁵no swirl, en anglais

⁶groins en anglais

Bijan Mohammadi s'est montré enthousiaste pour le projet et nous avons obtenu le soutien de l'ANR pour ce projet, baptisé COPTER (Conception Optimisation et Prototypages d'ouvrages de lutte contre l'ERosion en domaine littoral). Nous avons recruté un doctorant, Damien Isèbe. Les travaux qui suivent font partie de sa thèse.

L'idée directrice peut se résumer ainsi : l'efficacité des structures immergées, brise-lames ou épis, peut être grandement améliorée si l'on optimise leur placement, leur angle vis-à-vis du rivage, leur dimension, . . . plus généralement leur forme. L'optimisation doit être multi-critères, i.e. efficace pour différents régimes de houles (direction, hauteur, période). En fait il s'agit de la même technique que pour l'aéronautique : on optimise la forme ou le profil d'une aile d'avion afin de maximiser la portance et de minimiser la traînée, et cela à différents régimes de vols. Nous avons pour cela utilisé un outil principal : un optimiseur *global*, capable de trouver le minimum (lorsqu'il existe) de fonctionnelles

$$u \mapsto J(u)$$

à priori non-convexes pouvant posséder plusieurs minima locaux et ceci à un coût raisonnable par rapport aux méthodes stochastiques (algorithmes génétiques, ou algorithmes de recuit simulé type Metropolis). Précisons qu'ici u est la variable, appartenant à un espace de grande dimension en général, qui paramètre la forme de la structure (variable de contrôle). Le critère de coût $J(u)$ correspond par exemple, dans les applications envisagées, à l'énergie de la houle dans la bande littorale. Pour calculer $J(u)$ il faut donc d'abord calculer la houle dans le domaine, qui lui-même dépend de la forme de l'ouvrage, elle-même déterminée par u . L'évaluation de la fonctionnelle J est donc très coûteuse. Il importe donc que l'algorithme de minimisation n'exige pas un grand nombre d'évaluations de J . Cela fait tout l'intérêt de l'algorithme semi-déterministe élaboré par Bijan Mohammadi [M1] et testé intensivement par Benjamin Ivorra [I] dans des contextes multiples [Im1, Im2].

3.2.1 L'optimisation d'épis ou brise-lames par l'équation de Helmholtz, [2].

Afin d'étudier la faisabilité de la méthode, nous avons commencé par traiter le cas où la profondeur est constante. C'est bien sûr un cas académique, mais il peut s'appliquer à la conception optimale de digues portuaires ou de plates-formes « offshore ». La fonctionnelle utilisée correspond ici à l'énergie cinétique de la houle dans une bande littorale définie par l'utilisateur. La houle est calculée en résolvant l'équation de Helmholtz dans le domaine, en prenant des conditions limites de réflexion sur les structures émergées et une condition de radiation, du type Sommerfeld au large. Les calculs sont

réalisés avec le code commercial COMSOL3.2. Différentes formes, plus ou moins intuitives, sont obtenues, selon l'angle de la houle incidente. Nous obtenons par exemple le résultat tout à fait intuitif que l'angle d'une structure vis à vis de la houle incidente est un paramètre déterminant. Mais nous obtenons aussi le résultat moins intuitif qu'une structure faisant de légers zigzags est plus efficace qu'une structure rectiligne.⁷

3.2.2 L'optimisation de géotextiles en eaux peu profondes par modèle de réfraction-diffraction, [1].

Nous avons ensuite choisi résolument de nous attaquer à des problèmes industriels et nous avons pour cela contacté une entreprise leader dans ce domaine : BRLi (Bas-Rhône Languedoc Ingénierie). A titre d'exemple de son expertise, c'est elle qui est chargée d'aménager le site du Mont St Michel. Nous sommes intervenus pour optimiser le déploiement d'une solution de protection pour le lido de Sète à Marseillan. Par rapport au travail précédent, celui-ci intègre une bathymétrie réelle et le calcul de la houle se fait par un code métier libre (REF/DIF) développé par Kirby and Dalrymple au Center for Applied Coastal Research de l'université du Delaware, basé sur un modèle de houle valide pour les topographies lentement variables [K]. Au lieu de structures « dures » émergées telles que épis ou brise-lames, nous optimisons le placement de géotextiles *immergés*. Il s'agit de long boudins de textile synthétique remplis de sable qui sont immergés dans la zone proche du littoral. Ils sont invisibles depuis la côte et ne doivent pas gêner la navigation. Peu à peu ils sont colonisés par les coquillages et n'ont pas d'effet écologique négatif connu. Leur rôle est d'atténuer les fortes houles incidentes, responsables de l'érosion et de laisser passer les houles faibles à modérées, qui favorisent la sédimentation. Les échanges qui ont eu lieu entre BRLi et nous ont été extrêmement fructueux. L'optimiseur a permis d'obtenir un positionnement inattendu par les experts de BRLi. Il est prévu des essais en bassin à houle afin de valider ce résultat avant son déploiement effectif sur site.

3.3 Equations comportant des termes non locaux.

3.3.1 Equation avec terme stochastique de bruit blanc, [3].

Ce travail est le seul qui utilise la théorie des probabilités, en particulier le mouvement brownien et la théorie des équations aux dérivées partielles

⁷Ainsi, la forme fractale des littoraux naturels est peut-être la réponse optimale que la nature a trouvée elle-même pour minimiser l'érosion.

stochastiques, [W]. Il a été effectué en collaboration avec Mohamed Mellouk, M.C. de l'équipe Probabilités-Statistiques de notre institut. L'équation de la chaleur avec second-membre stochastique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \dot{W}(t, x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(t = 0, \cdot) = u_0$$

où $\dot{W}(t, x)$ désigne le bruit blanc à deux paramètres, a été étudiée par Walsh [W] qui a montré l'existence et l'unicité d'une solution continue $u := u(t, x, \omega)$ au sens où $u(t, x, \omega)$ est le seul processus stochastique continu adapté qui vérifie

$$u(t, x) = G(t, \cdot) * u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) W(ds, dy).$$

La seconde intégrale est une intégrale stochastique d'Itô et $G(t, x)$ désigne le noyau de la chaleur. Les preuves reposent fortement sur les propriétés de G qui est connu explicitement :

$$G(t, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

Nous avons étendu ces résultats à l'équation de la chaleur fractionnaire suivante, sous des hypothèses naturelles sur les fonctions $b(t, x, u)$ et $\sigma(t, x, u)$:

$$(E) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta_\lambda u(t, x) + b(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x, u(t, x)) \dot{W}(t, x),$$

où le laplacien fractionnaire $\Delta_\lambda u(t, x)$ est défini via la transformée de Fourier \mathcal{F} par :

$$\mathcal{F}(\Delta_\lambda v)(\xi) = -|\xi|^\lambda \mathcal{F}(v)(\xi).$$

Dans ce cas, la solution fondamentale $G_\lambda(t, x)$ de l'opérateur Δ_λ n'est pas connue explicitement. Cependant, elle s'exprime à l'aide de la transformée de Fourier :

$$G_\lambda(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^\lambda})(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi = \mathcal{F}(e^{-t|\cdot|^\lambda})(x).$$

Pour $\lambda \in]0, 2]$, la propriété la plus importante de G_λ est sa *positivité*, connue depuis les travaux de Paul Lévy (pour une preuve rapide, voir Droniou et

al. [Dr]). Par un schéma d'itérations de Picard, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution au sens suivant :

$$u(t, x) = G_\lambda(t, \cdot) * u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(t-s, x-y) b(s, y, u(s, y)) dy ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(t-s, x-y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy),$$

A l'aide du critère de Kolmogorov, nous prouvons de plus la régularité höldérienne de la solution en fonction de λ . Nous faisons l'hypothèse que $1 < \lambda \leq 2$. Le fait que $\lambda > 1$ est nécessaire pour avoir

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(t, x)^2 dx dt < \infty,$$

et pouvoir donner un sens à l'intégrale stochastique tandis que $\lambda \leq 2$ est nécessaire pour la positivité de G_λ .

3.3.2 Equation morphodynamique de dune, [16, 18] et perspectives.

Dans le but de mieux contrôler l'érosion littorale, nous avons cherché à modéliser directement l'évolution du fond marin $s = s(x, t)$. La fonction $z = s(x, t)$ désigne l'épaisseur de la couche de sédiment présente au dessus du substrat rocheux. Ainsi si $z = \eta(x, t)$ désigne l'altitude de la surface libre du fluide, la hauteur de la colonne d'eau est $h = \eta - s$, voir fig. 2. Pour simplifier, nous considérons d'emblée un écoulement unidimensionnel. Evidemment, c'est un premier pas, car les effets transverses (en anglais longshore) ne peuvent pas être négligés dans les écoulements littoraux. La loi fondamentale (loi d'Exner) est la conservation de la masse de sédiment :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

où q désigne le flux de sédiments. L'expérience montre que le flux q ne dépend que de la contrainte de cisaillement τ au fond :

$$\tau \approx \mu_T \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=s},$$

où μ_T désigne la viscosité dynamique turbulente du fluide. Maintenant, pour fermer le modèle, il faut exprimer τ comme fonction de s .

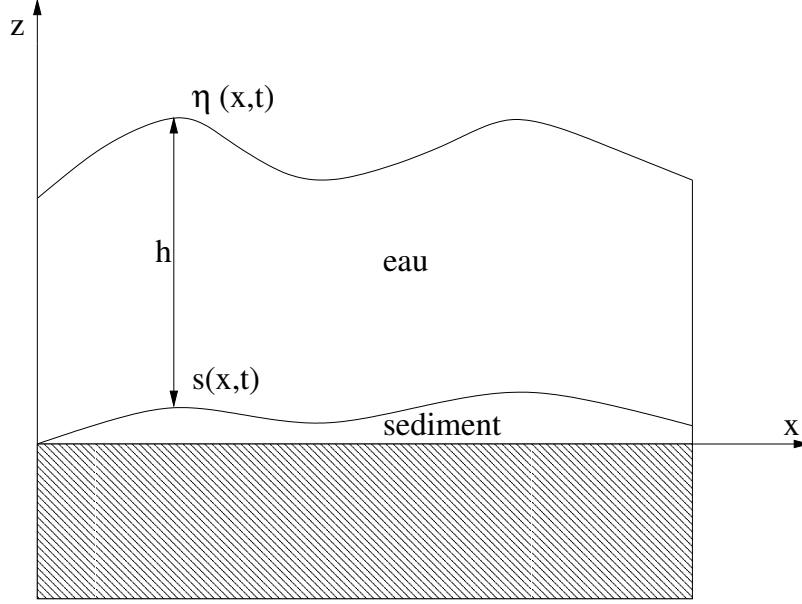


FIG. 2 – Le fond marin.

En se plaçant dans l'hypothèse du régime fluvial (nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{gh} \ll 1$), A.C. Fowler [F1, F2] a obtenu un modèle morphodynamique particulièrement séduisant :

$$(F) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{s^2}{2} + \int_0^{+\infty} \zeta^{-1/3} \frac{\partial s}{\partial x}(x - \zeta, t) d\zeta - \frac{\partial s}{\partial x} \right\} = 0$$

Ce modèle décrit tant l'évolution du lit d'une rivière que l'évolution d'un profil de dune lors d'un écoulement éolien. L'équation (F) possède un terme *non local* $\mathcal{I}[s](x, t)$ défini comme suit pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{I}[\varphi](x) := \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{3}} \varphi'(x - \zeta) d\zeta \right\} = \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{3}} \varphi''(x - \zeta) d\zeta.$$

En variable de Fourier, ce terme non local s'exprime ainsi :

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}[\varphi])(\xi) := -4\pi^2 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2} - i \operatorname{sign}(\xi) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) |\xi|^{\frac{4}{3}} \cdot \mathcal{F}(\varphi).$$

En conséquence, il est aisé de voir que le noyau $K(t, x)$ associé à l'opérateur $\mathcal{I} - \partial_{xx}^2$ n'est pas positif. En effet,

$$\mathcal{F}(K(t, \cdot))(\xi) = \exp \left(-4\pi^2 (|\xi|^2 - (a - ib \operatorname{sign}(\xi)) |\xi|^{4/3}) t \right).$$

où $a, b > 0$. On en déduit

$$|\mathcal{F}(K(t, \cdot))(\xi)| = \exp(-4\pi^2(|\xi|^2 - a|\xi|^{4/3})t).$$

Or si $K(t, \cdot) \geq 0$, on devrait avoir

$$|\mathcal{F}(K(t, \cdot))(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}} K(t, x) dx = \mathcal{F}(K(t, \cdot))(0) = 1.$$

Mais, pour les *basses fréquences* $0 < |\xi| < a^{3/2}$, on a $(|\xi|^2 - a|\xi|^{4/3}) < 0$ donc

$$|\mathcal{F}(K(t, \cdot))(\xi)| > 1.$$

En conséquence, l'équation linéarisée $\partial_t u + \mathcal{I}[u] - \partial_{xx}^2 u = 0$ ne vérifie pas le principe du maximum. Mais c'est ici un avantage, car on cherche à modéliser le phénomène d'*érosion*. Dans ce travail, sur le point d'être soumis, effectué en collaboration avec N. Alibaud (jeune chercheur alors ATER à notre institut et maintenant MC à Besançon) et D. Isèbe, nous avons montré l'existence, l'unicité, la stabilité de la solution de **(F)**, dans le cas où la donnée initiale est dans $L^2(\mathbb{R})$. En outre, l'équation possède un effet régularisant, malgré le terme non local anti-dissipatif.

La preuve repose sur la formulation Duhamel de l'équation

$$u(t, \cdot) = K(t, \cdot) * u_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x K(t-s, \cdot) * u^2(s, \cdot) ds. \quad (1)$$

et sur un point fixe de Banach-Picard. De plus, en utilisant une forme intégrale du terme non-local du type Lévy-Kintchine :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{I}[\varphi](x) = \frac{4}{9} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \varphi'(x)z}{|z|^{7/3}} dz,$$

nous avons pu exhiber des contre-exemples explicites au principe du maximum.

Nous présentons également quelques simulations numériques, obtenues par un schéma aux différences finies explicite, qui sont en accord avec nos résultats théoriques. À ce sujet, il est apparu que les équations non-locales devraient être discrétisées par des schémas spécifiques, à pas fractionnaires, pour permettre de traiter différemment les termes différentiels classiques et le terme non-local. Dans cet esprit, citons par exemple la méthode dite de Split-Step Fourier, que les physiciens utilisent pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Le terme non-local pourrait être calculé explicitement en variable de Fourier, puis, après synthèse, on pourrait utiliser un schéma numérique en

différences finies pour les termes locaux. Evidemment l'échantillonnage et la synthèse devraient être soigneusement pensés pour ne pas générer de modes parasites. Il y a là tout un sujet de recherches futures.

Enfin, dans un travail en cours de rédaction [18], en collaboration avec Borys Alvarez-Samaniego, post-doctorant que j'ai recruté dans le cadre du projet ANR COPTER, nous avons montré l'existence d'ondes progressives solutions classiques de l'équation de Fowler (**F**). Les solutions obtenues, qui ne s'expriment apparemment pas à l'aide des fonctions transcendentes usuelles, sont voisines du choc visqueux de Taylor, onde progressive solution analytique de l'équation de Burgers visqueux :

$$s(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{1}{4} \left(x - \frac{t}{2} \right) \right) \right).$$

Notons que ces ondes progressives ne tendent pas vers 0 en $-\infty$ et ne rentrent pas dans la théorie d'existence-unicité L^2 . Nous cherchons actuellement à étendre la théorie d'existence et d'unicité pour couvrir de telles fonctions.

4 Publications.

Articles dans revues internationales à comité de lecture.

1. D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra and B. Mohammadi, *Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection*. 16 p, to appear in International Journal for Numerical Methods in Engineering. (published on line 18/10/2007, DOI 10.1002/nme.2209).
2. D. Isèbe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette, *Optimal shape design of coastal structures minimizing water waves impact*. Coastal Engineering, vol. 55, no 1, pp. 35-46, 2008.
3. P. Azerad and M. Mellouk, *On a stochastic partial differential equation with non-local diffusion*. Potential Anal., vol. 27, no 2, pp. 183-197, 2007
4. D. Isèbe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette, *Design of passive defense structures in Coastal Engineering*. International Review of Mechanical Engineering, vol. 1, no 1, pp. 41-48, 2007
5. P. Azerad, E. Bänsch, *Asymptotic stability of the primary flow in a cone and plate viscometer*. J. Math. Fluid Mech. 2004, vol. 6, pp. 253-271, 2004.
6. P. Azerad, F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in geophysical fluid dynamics*, SIAM J. Math. Anal., vol. 33, no 4, pp. 847-859, 2001
7. P. Azerad, F. Guillén, *Equations de Navier-Stokes en bassin peu profond : l'approximation hydrostatique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, pp. 961-966, 99.
8. P. Azerad, J. Pousin, *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, pp. 721-727, 96.
9. P. Perrochet, P. Azerad, *Space-Time Integrated Least-Squares : solving a pure advection equation with a pure diffusion operator*, J. Comput. Phys., vol. 117, no 2, pp. 183-193, 95.
10. P. Azerad, *Analyse et approximation du problème de Stokes en bassin peu profond*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, pp. 53-58, 94.

Ouvrages collectifs avec comité de lecture.

11. P. Azerad, P. Perrochet and J. Pousin, *Space-Time Integrated Least-Squares : a simple, stable and precise finite element scheme to solve advection equations as if they were elliptic*, Progress in partial differential equations : the Metz surveys 4, M. Chipot, I. Shafir (Eds.), Pitman Research Notes in Math., pp. 161-174, 96.

Articles parus dans actes de congrès avec comité de lecture.

12. P. Azerad, D. Isèbe, B. Ivorra, B. Mohammadi and F. Bouchette, *Optimal shape design of coastal structures minimizing coastal erosion*, Proceedings of Workshop on Inverse Problems, P. Gaitan, S. Cristofol (Eds.), Marseille 2005, pp. 63-67.
13. P. Azerad, *Mathematical analysis and finite element strategy for 3D numerical simulation of Navier-Stokes equations in thin domains*, Proceedings of ECCOMAS 2000, E. Oñate, S. Idelsohn (Eds.), CdRom CIMNE, Barcelona, 2000, 8 p.
14. P. Azerad, O. Besson, and F. Guillén, *Fluid Flow in shallow domains : Mathematical Analysis and Numerical Simulation*, Proceedings of the IV Catalan days of Applied mathematics, M. Sanroma, C. Garcia (Eds.), Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, 98, pp. 9-16.
15. P. Azerad, O. Besson, *Numerical simulation of fluid flow in a stratified shallow lake*, Proceedings of the IX International Conference on Finite Elements in Fluids, M. Morandi Cecchi, K. Morgan, J. Periaux, B. A. Schrefler, O. C. Zienkiewicz (Eds.), pp. 1477-1486, Venice, 95.

Prépublication.

16. N. Alibaud, P. Azerad and D. Isèbe, *A non-monotone conservation law for dune morphodynamics.*, 2007, 26 p.

Thèse.

17. P. Azerad, *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport*, Thèse de doctorat ès sciences, Neuchâtel, 1995, en ligne sur <http://doc.rero.ch>, 103 p.

Articles en cours de rédaction.

18. P. Azerad, B. Alvarez-Samaniego, *Existence and stability of travelling wave solution of the Fowler equation.*

Les pièces 1, 2, 3, 5, 6, 16 sont jointes au dossier.

5 Bibliographie.

Références

- [Ai] AIZENMAN, M.; *On vector fields as generators of flows : a counterexample to Nelson's conjecture*, Ann. of Math. **107 (2)** (1978), 287–296.
- [B] BARDOS, C.; *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 185–233.
- [Am] AMBROSIO, L.; *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math., **158** (2004), 227–260.
- [BG] BESSON, O.; DE MONTMOLLIN, G.; *Space-time integrated least squares : a time-marching approach*. Internat. J. Numer. Methods Fluids **44 (5)** (2004), 525–543.
- [BL] BESSON, O.; LAYDI, M. R.; *Some estimates for the anisotropic Navier-Stokes equations and for the hydrostatic approximation*. RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **26 (7)** (1992), 855–865.
- [BLT] BESSON, O.; LAYDI, M. R.; TOUZANI, R.; *Un modèle asymptotique en océanographie*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310 (9)** (1990), 661–665.
- [Bo] BOYER, F.; *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation*. Differential Integral Equations **18 (8)** (2005), 891–934.
- [C] CHACÓN REBOLLO, T.; GUILLÉN GONZÁLEZ, F.; *An intrinsic analysis of existence of solutions for the hydrostatic approximation of Navier-Stokes equations*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330 (9)** (2000), 841–846.
- [De] DEPAUW, N.; *Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337 (4)** (2003), 249–252.
- [Dr] DRONIOU, J.; GALLOUËT, T.; VOVELLE J.; *Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation*, J. Evol. Equ., **3** (2003), 499–521.
- [F1] FOWLER, A.C.; *Dunes and drumlins*, Geomorphological fluid mechanics, eds. A. Provenzale and N. Balmforth, Springer-Verlag, Berlin, **211** (2001), 430–454.

- [F2] FOWLER, A.C.; *Evolution equations for dunes and drumlins*, Rev. R. Acad. de Cien, Serie A. Mat, **96 (3)** (2002), 377–387.
- [G1] ERN, A.; GUERMOND, J.L.; *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*. Mathématiques & Applications, 36. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [G2] GUERMOND, J. L.; *A finite element technique for solving first-order PDEs in L^P* . SIAM J. Numer. Anal. **42 (2)** (2004), 714–737.
- [H] HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L.P.; HULBERT, G.M.; *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : viii. The Galerkin/least squares method for advective-diffusive equations*, Comput. Mech. Appl. Mech. Eng. **73** (1989), 173–189.
- [I] IVORRA, B.; *Optimisation globale semi-déterministe et applications industrielles.*, *Thèse de l’université Montpellier 2*, 2006.
- [Im1] IVORRA, B.; RAMOS DEL OLMO, A.M.; MOHAMMADI, B.; *A semi-deterministic global optimization method. Application to a control problem of the Burgers equation, comparing with other methods*, J. Optim. Th. Appl., **135 (1)** (2007).
- [Im2] IVORRA, B.; MOHAMMADI, B., HERTZOG, D.E.; SANTIAGO, J.G.; *Semi-deterministic and genetic algorithms for global of microfluidic protein-folding devices*, Int. J. Num. Meth. Eng., **66 (2)** (2006), 319–333.
- [K] KIRBY, J.T; DALRYMPLE, R.A.; *A parabolic equation for the combined refraction diffraction of stokes waves by mildly varying topography*, J. Fluid Mech., **136** (1983), 443–466.
- [La] LADYŽENSKAJA, O. A.; *Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry*. (Russian) Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **7** 1968 155–177.
- [Le] LEONARDI, S.; MÁLEK, J.; NEČAS, J.; POKORNÝ, M. *On axially symmetric flows in \mathbf{R}^3* . Z. Anal. Anwendungen **18 (3)** (1999), 639–649.
- [LTW] LIONS, J.-L.; TEMAM, R.; WANG, S.; *On the equations of the large-scale ocean*. Nonlinearity 5 (1992), **no. 5**, 1007–1053.
- [Me] MEI, C.C.; *The applied dynamics of ocean surface waves*, vol. 1, World Scientific Publishing, (1989).
- [M1] MOHAMMADI, B.; SAIAC J.H.; *Pratique de la simulation numerique*, Dunod, (2003).
- [MP] MOHAMMADI, B.; PIRONNEAU, O; *Applied shape optimization for fluids*, Oxford University press, 2001.

- [dM] DE MONTMOLLIN, G ; Méthode STILS pour l'équation de transport : comparaisons et analyses. Etude d'un modèle de fermeture pour la loi de Darcy. *Ph D Dissertation, Université de Neuchâtel*, 2001.
- [N] NEČAS, J. ; *Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16 (3)** (1962) 305–326.
- [P] PASCAL, B. ; De l'équilibre des liqueurs, Paris, 1663 in œuvres complètes, coll. La Pléiade, Gallimard, 1998.
- [PL] DI PERNA, R.J. ; LIONS, P.L. ; *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** (1989), 511–547.
- [Sd] SDOUGOS, H.P. ; BUSSOLARI, S.R. ; DEWEY, C.F. ; *Secondary flow and turbulence in a cone-and-plate device*, J. Fluid Mech., **138** (1984), 379–404.
- [Se] SERRE, D. ; *Equations de Navier-Stokes avec données peu régulières*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. **Ser. 10** (1983), 543–559.
- [St] STENBERG, R. ; *Error analysis of some finite element methods for the Stokes problem*, Math. Comp. **54** (1990), 495–508.
- [W] WALSH, J. B. ; *An introduction to stochastic partial differential equations*. École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984, 265–439, Lecture Notes in Math., 1180, Springer, Berlin, 1986.
- [le Monde] journal Le Monde, Dimanche 12 août 2007, « L'érosion touche plus du quart du littoral français », page 7.
- [CNRS] Courrier du CNRS, « Alerte sur le littoral », juillet-août 2007.
- [le Monde, dossiers] « L'homme et l'océan, » Le Monde, Dossiers et Documents, Hors-Série, Août 2007.