Université Montpellier II **Analyse Fonctionnelle FMMA103**
M1 Mathématiques et Applications

Corrigé de l'examen
Janvier 2015, 3h

Exercice 1 1. Pour tout entier k l'espace $G_k = G \cap (E \times F_k)$ est un espace vectoriel, et c'est un fermé de $E \times F_k$ pour la topologie induite par $E \times F$. L'espace F_k étant de dimension finie, c'est un sous-espace de Banach de F, et donc $E \times F_k$ est un sous-espace de Banach de $E \times F$. Le sous-espace fermé G_k de $E \times F_k$ est donc un espace de Banach. La deuxième affirmation est une conséquence immédiate des définitions.

2. L'application $(\mathrm{pr}_1)_{|G_k} : G_k \to E$ étant continue entre deux espaces de Banach, d'après le théorème de l'application ouverte, soit $\mathrm{pr}_1(G_k)$ est maigre, soit $\mathrm{pr}_1(G_k) = E$.

3. On peut écrire $E = \cup_{k=0}^{\infty} T^{-1}(F_k)$. Comme E est un espace de Banach, c'est un espace de Baire, et une réunion d'ensemble maigres étant maigre, d'après le théorème de Baire il existe nécessairement un entier k tel que $T^{-1}(F_k)$ n'est pas maigre, donc tel que $T^{-1}(F_k) = E$ d'après 1. et 2. De plus, le graphe de T étant G_k, le théorème du graphe fermé montre que T est continue.

Exercice 2 1. D'après la continuité de T on a $||Tx|| \leq |||T|||\ ||x||$ pour tout $x \in E$. En prenant $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ on a $Tx = \sum_{i\in J} \lambda_i a_i$ d'où $|\sum_{i\in J} \lambda_i a_i| \leq |||T|||\ ||\sum_{i\in J} \lambda_i x_i||$.

2. (a) Un élément x de F peut s'écrire $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$, où J est une partie finie de I et les λ_i sont des scalaires. On pose alors $Sx = \sum_{i\in J} \lambda_i a_i$. Il faut vérifier que le scalaire Sx ne dépend pas du choix de l'écriture de x. Supposons donc que $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = \sum_{i\in K} \mu_i x_i$. D'après l'inégalité (2) on a

$$\left|\sum_{i\in J} \lambda_i a_i - \sum_{i\in K} \mu_i a_i\right| \leq c \left|\left|\sum_{i\in J} \lambda_i x_i - \sum_{i\in K} \mu_i x_i\right|\right| = 0.$$

Donc $\sum_{i\in J} \lambda_i a_i = \sum_{i\in K} \mu_i a_i$. De plus S est une forme linéaire, car pour tous vecteurs $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i\in K} \mu_i x_i$ dans E et tous scalaires λ, μ on a

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i\in J} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{i\in K} \mu\mu_i x_i$$

et

$$S(\lambda x + \mu y) = \sum_{i\in J} \lambda\lambda_i a_i + \sum_{i\in K} \mu\mu_i a_i = \lambda \sum_{i\in J} \lambda_i a_i + \mu \sum_{i\in K} \mu\mu_i a_i = \lambda Sx + \mu Sy.$$

Enfin, $|Sx| \leq c\ ||x||$ d'après (2). Donc S est une forme linéaire continue sur F de norme $\leq c$.

2. (b) Résulte de (a) et du théorème de Hahn-Banach.

Exercice 3 1. On a $|f_n| \leq |f|$, donc les fonctions f_n sont localement intégrables, et par conséquent définissent des distributions sur $\mathbb{R}$. Le théorème de la convergence dominée montre que la suite (f_n) converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. On a $|f^a(x)| \leq x^{-a}$ pour $x > 0$. La fonction $x \mapsto x^{-a}$ étant localement intégrable lorsque $a < 1$, d'après 1. la suite (f^a_n) converge vers f^a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: autrement dit

$$u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f^a_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f^a(x)\varphi(x)dx,$$

qui est une distribution d'ordre 0 puisque f^a est localement intégrable.

3. Si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-A,+A]$, l'intégrale à étudier peut s'écrire

$$\int_{1/n}^{A} [\varphi(x)-\varphi(0)] f^a(x)dx + \varphi(0) \int_{1/n}^{A} f^a(x)dx$$

où $|[\varphi(x)-\varphi(0)]f^a(x)| \leq x^{-a+1} \sup |D\varphi|$. La fonction $x \mapsto x^{-a+1}$ étant intégrable sur $[0,A]$, la première intégrale converge vers $\int_0^A [\varphi(x)-\varphi(0)]f^a(x)dx$ et se majore par $\sup |D\varphi| A^{2-a}/(2-a)$. Pour la seconde intégrale, une intégration par parties donne

$$J_n := \int_{1/n}^{A} x^{-a} \cos(\frac{\pi}{2x})dx = -\frac{2}{\pi}\left[\sin(\frac{\pi}{2x})x^{2-a}\right]_{1/n}^{A} + \frac{2}{\pi}(2-a)\int_{1/n}^{A} x^{1-a}\sin(\frac{\pi}{2x})dx.$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}n)n^{a-2} \to 0$ car $a<2$. La fonction $x \mapsto x^{1-a}\sin(\frac{\pi}{2x})$ étant intégrable sur $[0,A]$ (car $a<2$), J_n admet une limite :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2A})A^{2-a} + \frac{2}{\pi}(2-a)\int_0^A x^{1-a}\sin(\frac{\pi}{2x})dx.$$

Ceci prouve que la limite (3) existe. De plus, ce qui précède prouve qu'il existe une constante $C \geq 0$ (dépendante de A) telle que

$$|u(\varphi)| \leq C \ \left(\sup|\varphi| + \sup|D\varphi|\right)$$

pour tout φ à support dans $[-A,A]$. Donc u est une distribution d'ordre ≤ 1.

4. La fonction g_n étant $\mathcal{C}^1$ en dohors du point $x = 1/n$, sa dérivée au sens des distributions est

$$Dg_n = \sin(\frac{\pi}{2}n)\delta_{\frac{1}{n}} + \begin{cases} -\frac{\pi}{2x^2}\cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{pour } x > 1/n, \\ 0 & \text{pour } x < 1/n. \end{cases}$$

5. On en déduit

$$f_n^2 = -\frac{2}{\pi}\left[Dg_n - \sin(\frac{\pi}{2}n)\delta_{\frac{1}{n}}\right].$$

La fonction g est localement intégrable, donc la suite (g_n) converge vers g dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'après 1., et la suite (Dg_n) converge vers Dg. Comme $\lim_{n\to\infty}\delta_{\frac{1}{n}} = \delta_0$, on obtient

$$\lim_{p\to\infty} f_{4p+q}^2 = -\frac{2}{\pi}\left[Dg - \sin(\frac{\pi}{2}q)\delta_0\right] = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}Dg & \text{si } q \equiv 0 \bmod(2), \\ -\frac{2}{\pi}\left[Dg-\delta_0\right] & \text{si } q \equiv 1 \bmod(4), \\ -\frac{2}{\pi}\left[Dg+\delta_0\right] & \text{si } q \equiv 3 \bmod(4) \end{cases}$$

6. On en déduit que

$$\lim_{p\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{4p+q}^2(x)\varphi(x)dx = -\frac{2}{\pi}\left[Dg(\varphi) - \sin(\frac{\pi}{2}q)\varphi(0)\right].$$

La suite $\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\varphi(x)dx$ converge si, et seulement si, $\varphi(0)=0$: dans le cas contraire, elle admet trois valeurs d'adhérence.