Corrigé de l'examen
Mai 2015, 3h

Exercice 1 1. Pour tout $n \geq 1$ on a $y_n = \sum_{k=0}^{n} y_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k$, d'où $|y_n| \leq 2||y||$; pour $n = 0$ on a $|y_0| \leq ||y||$. Ces inégalités prouvent la continuité de la forme linéaire $y \mapsto y_n$.

2. Soit (y^k) une suite de E convergeant vers 0, telle que la suite (Ty^k) converge vers $z \in E$. Montrons que $z = 0$: vue le théorème du graphe fermé, ceci prouvera la continuité de T. Posons $y^k = (y_n^k)$ et $z^k = Ty^k = (z_n^k)$; on a $z_n^k = \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j}^k$. D'après 1., $\lim_{k\to\infty} y_n^k = 0$ pour tout n, d'où $z_n = \lim_{k\to\infty} z_n^k = 0$ et $z = 0$.

3. On a $||z|| = \sup_{l\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=0}^{l} z_n\right| = \sup_{l\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j+k\leq l} x_j y_k\right|$. L'inégalité exprime donc la continuité de T, et on peut prendre $c = |||T|||$.

4. On a $\sum_{j+k\leq l} x_j y_k = \sum_{j=0}^{l} x_j (\sum_{k=0}^{l-j} y_k)$, et on peut choisir successivement $y_0, \ldots, y_l$ tels que $x_l y_0 = |x_l|, x_{l-1}(y_0 + y_1) = |x_{l-1}|, \ldots, x_0(\sum_{k=0}^{l} y_k) = |x_0|$. Alors $|\sum_{k=0}^{l-j} y_k| = 1$ pour tout $0 \leq j \leq l$, et si on prend de plus $y_k = 0$ pour $k > l$ on obtient $\sum_{j=0}^{l} |x_j| \leq c$ d'après 3. Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|$.

Exercice 2