

La méthode du point col en dimension quelconque

Application à la conjecture du volume du nœud 5_2

Nicolas SUBSOL

Encadré par :
Stéphane BASEILHAC

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

Année universitaire 2025-2026

Résumé : On présentera la méthode du point col, une extension de la méthode de Laplace aux intégrales à valeurs complexes. On établira sa variante la moins restrictive, la méthode de Perron, avant de la généraliser en dimension quelconque. On appliquera enfin ces résultats à la démonstration de la conjecture du volume pour le nœud 5_2 .

Table des matières

1	Méthodes classiques	3
1.1	Méthode de Laplace	3
1.2	Méthode de la phase stationnaire	8
2	Méthodes du point col	11
2.1	Méthode de la plus grande pente	13
2.2	Méthode de Perron	16
2.3	Exemples	24
3	Méthode du point col en dimension quelconque	31
3.1	Définitions et résultats préliminaires	32
3.2	Méthode du point col généralisée	40
3.3	Exemples	46
4	La conjecture du volume pour le nœud 5_2	53
4.1	Notions et résultats indispensables	53
4.1.1	Éléments de théorie des nœuds	54
4.1.2	Géométrie hyperbolique et volume du complémentaire	56
4.1.3	Invariant de Kashaev et conjecture du volume	57
4.2	Le développement asymptotique de $\langle K \rangle_N$	59
4.3	Mise sous forme intégrale du problème	78
4.4	Démonstration	83
	Références	90

Introduction

L'étude asymptotique des intégrales de la forme $\int_{\mathcal{C}} f(x) e^{\lambda \varphi(x)} dx$ intéresse les mathématiciens depuis longtemps. Au-delà de son intérêt purement théorique, ce type d'intégrale apparaît en effet régulièrement en physique. Les cas réel et imaginaire pur, correspondant respectivement aux méthodes de Laplace et de la phase stationnaire, sont connus depuis le XIX^e siècle. Le cas complexe général, en revanche, a longtemps résisté. Plusieurs méthodes partielles existaient déjà sous le nom de méthode du point col, mais ce n'est qu'au cours du XX^e siècle, qu'une théorie unifiée sur $\mathbb{C}$ a été établie. Ce n'est que très récemment que cette méthode a été étendue en dimension quelconque, sur $\mathbb{C}^N$. Une application concrète de cette généralisation est la démonstration de la conjecture du volume pour le cas particulier du nœud 5_2 . Après avoir exprimé l'invariant de Kashaev sous la forme d'une intégrale double, on applique la méthode du point col pour en obtenir un équivalent asymptotique, qui coïncide précisément avec le volume du complémentaire du nœud.

Ce rapport est rédigé dans le cadre d'un stage de recherche de niveau Licence 3 à l'Institut Montpellierain Alexander Grothendieck. Il se propose d'explorer la méthode du point col à

travers trois chapitres, avant d'en appliquer les résultats à la conjecture du volume dans une quatrième partie. Dans un premier temps, nous illustrons cette méthode dans les cas réel et imaginaire pur. Puis, en suivant les travaux d'O'Sullivan [1], Wong [3] et Fedoryuk [2], nous prolongeons la méthode à l'ensemble des complexes. Nous nous appuyons ensuite sur l'article de Pinna et Viola [4] pour généraliser ce résultat aux intégrales multiples sur $\mathbb{C}^N$. Enfin, dans une quatrième partie, après avoir introduit la conjecture du volume, nous la démontrons dans le cas particulier du nœud 5_2 en s'inspirant des travaux de Ohtsuki [5].

1 Méthodes classiques

Dans cette section, on se propose d'étudier les 2 situations particulières dans lesquelles l'étude de $I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} f(x) e^{\lambda \varphi(x)} dx$ est grandement simplifiée.

1.1 Méthode de Laplace

On commence par le cas où φ est à valeurs réelles : l'intégrale est alors dominée par un phénomène de concentration exponentielle au voisinage du maximum de φ .

Théorème 1.1.

Méthode de Laplace

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle (pas nécessairement borné). Supposons que :

- $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue
- Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b e^{\lambda_0 \varphi(x)} |f(x)| dx$ converge.
- φ admet un maximum global strict en un point $x_0 \in]a, b[$,
- $\varphi''(x_0) < 0$.
- $f(x_0) \neq 0$

Alors, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda \varphi(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(x_0)|}}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |I(\lambda)| &\leq \int_a^b e^{\lambda \varphi(x)} |f(x)| dx \\ &\leq e^{(\lambda - \lambda_0) \varphi(x_0)} \int_a^b e^{\lambda_0 \varphi(x)} |f(x)| dx \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc I est bien définie.

Puisque x_0 est un maximum local à l'intérieur de l'intervalle, $\varphi'(x_0) = 0$. Par la formule

de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x_0 , on a :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{=} -\frac{-\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Il existe donc $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]a, b[$ et pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \leq -\frac{-\varphi''(x_0)}{4}(x - x_0)^2$$

On pose :

$$J(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(x_0)} I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx$$

On sépare l'intégrale en deux parties :

$$J(\lambda) = \int_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx + \int_{[a, b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx$$

On effectue le changement de variable $x = x_0 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$ dans la première intégrale :

$$\int_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(u) du$$

où $g_\lambda(u) = e^{\lambda(\varphi(x_0 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}}) - \varphi(x_0))} f(x_0 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}}) \mathbf{1}_{[-\delta\sqrt{\lambda}, \delta\sqrt{\lambda}]}(u)$.

— À $u \in \mathbb{R}$ fixé, pour λ assez grand, $u \in [-\delta\sqrt{\lambda}, \delta\sqrt{\lambda}]$ et la formule de Taylor-Young donne :

$$\lambda \left(\varphi \left(x_0 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}} \right) - \varphi(x_0) \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} -\frac{-\varphi''(x_0)}{2} u^2$$

Comme f est continue en x_0 , on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g_\lambda(u) = e^{\varphi''(x_0)u^2/2} f(x_0)$$

— Pour tout $u \in [-\delta\sqrt{\lambda}, \delta\sqrt{\lambda}]$, on a :

$$|g_\lambda(u)| \leq e^{-\frac{\varepsilon}{4}u^2} \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f(x)|$$

La fonction de majoration est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\varphi''(x_0) < 0$ et f est continue sur le segment $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(u) du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{-\varphi''(x_0)}{2}u^2} f(x_0) du = f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(x_0)}}$$

Ainsi :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx = f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(x_0)}}$$

De plus, comme x_0 est maximum global strict, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout

$x \in [a, b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) - \eta$. Pour $\lambda > \lambda_0$, on a donc une majoration de la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a, b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx \right| &\leq \int_{[a, b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{(\lambda - \lambda_0)(\varphi(x) - \varphi(x_0))} e^{\lambda_0(\varphi(x) - \varphi(x_0))} |f(x)| dx \\ &\leq e^{(\lambda - \lambda_0)(\varphi(x_0) - \eta)} \int_{D_\delta} e^{\lambda_0(\varphi(x) - \varphi(x_0))} |f(x)| dx \end{aligned}$$

Comme l'intégrale majorante est finie, on obtient :

$$\int_{[a, b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_0))} f(x) dx = \mathcal{O}(e^{-\eta\lambda})$$

Donc :

$$J(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(x_0)\lambda}}$$

Et finalement, on obtient :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\varphi''(x_0)|}}$$

■

On peut étendre le résultat lorsque ce maximum est atteint à l'une des bornes du domaine. On retrouve un résultat analogue à un facteur $\frac{1}{2}$ près, dû à la contribution d'un seul côté du point critique.

Corollaire 1.2.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle (pas nécessairement borné). Supposons que :

- $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue
- Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b e^{\lambda_0\varphi(x)} |f(x)| dx$ converge.
- φ admet un maximum global strict en un point $x_0 \in \{a, b\}$
- $\varphi'(x_0) = 0$
- $\varphi''(x_0) < 0$.
- $f(x_0) \neq 0$

Alors, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda|\varphi''(x_0)|}}$$

Démonstration. Supposons que $x_0 = a$.

On prolonge les fonctions φ et f par symétrie sur l'intervalle $[2a - b, b]$. Posons :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ \varphi(2a - x) & \text{si } x \in [2a - b, a[\end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ f(2a - x) & \text{si } x \in [2a - b, a[\end{cases}$$

- $\tilde{f}$ est continue sur $[2a - b, b]$ car $\lim_{x \rightarrow a^-} \tilde{f}(x) = f(a) = \tilde{f}(a)$.
- $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. En effet, pour $x < a$, $\tilde{\varphi}'(x) = -\varphi'(2a - x)$ et $\tilde{\varphi}''(x) = \varphi''(2a - x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} \tilde{\varphi}'(x) = -\varphi'(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{\varphi}'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \tilde{\varphi}''(x) = \varphi''(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{\varphi}''(x)$.
- Puisque φ admet un maximum global strict en a sur $[a, b]$, par parité de la construction, $\tilde{\varphi}$ admet un maximum global strict en a sur $[2a - b, b]$. Le point $x_0 = a$ est à l'intérieur de cet intervalle.
- Soit $\tilde{I}(\lambda) = \int_{2a-b}^b e^{\lambda \tilde{\varphi}(x)} \tilde{f}(x) dx$.
On a avec le changement de variable $y = 2a - x$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\lambda) &= \int_{2a-b}^a e^{\lambda \varphi(2a-x)} f(2a-x) dx + \int_a^b e^{\lambda \varphi(x)} f(x) dx \\ &= \int_a^b e^{\lambda \varphi(y)} f(y) dy + \int_a^b e^{\lambda \varphi(x)} f(x) dx \\ &= 2I(\lambda) \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité est donc respectée.

On applique la méthode de Laplace 1.1 :

$$\tilde{I}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda \tilde{\varphi}(a)} \tilde{f}(a) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{\varphi}''(a)|}}$$

Ainsi :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda \varphi(a)} f(a) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(a)|}} = e^{\lambda \varphi(a)} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda |\varphi''(a)|}}$$

Si le maximum global strict est atteint $x_0 = b$, le raisonnement est identique, on prolonge les fonctions sur l'intervalle $[a, 2b - a]$.

■

Il reste enfin le cas où ce maximum est atteint au bord de l'intervalle sans que la dérivée s'y annule : la décroissance de l'intégrande n'est alors plus gaussienne mais exponentielle simple.

Proposition 1.3.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle (pas nécessairement borné). Supposons que :

- $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue
- Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b e^{\lambda_0 \varphi(x)} |f(x)| dx$ converge.
- φ admet un maximum global strict en un point $x_0 \in \{a, b\}$
- $\varphi'(x_0) \neq 0$
- $\varphi''(x_0) < 0$.
- $f(x_0) \neq 0$

Alors, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(x_0)} \frac{f(x_0)}{\lambda|\varphi'(x_0)|}$$

Démonstration. Supposons que $x_0 = a$.

On a donc $\varphi'(a) \leq 0$, mais par hypothèse $\varphi'(a) \neq 0$, donc $\varphi'(a) < 0$.

Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au point a , on a :

$$\varphi(x) - \varphi(a) \underset{x \rightarrow a}{=} \varphi'(a)(x - a) + o(x - a)$$

Alors, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $[a, a + \delta] \subset [a, b]$ et pour tout $x \in [a, a + \delta]$:

$$\varphi(x) - \varphi(a) \leq \frac{\varphi'(a)}{2}(x - a)$$

On pose :

$$J(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(a)} I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(a))} f(x) dx$$

On a :

$$J(\lambda) = \int_{[a, a+\delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(a))} f(x) dx + \int_{[a, b] \setminus [a, a+\delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(a))} f(x) dx$$

On effectue le changement de variable $x = a + \frac{u}{\lambda}$ dans la première intégrale :

$$\int_{[a, a+\delta]} e^{\lambda(\varphi(x) - \varphi(a))} f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} g_\lambda(u) du$$

où $g_\lambda(u) = e^{\lambda(\varphi(a + \frac{u}{\lambda}) - \varphi(a))} f(a + \frac{u}{\lambda}) \mathbf{1}_{[0, \delta\lambda]}(u)$.

— À $u \in \mathbb{R}^+$ fixé, pour λ assez grand, $u \in [0, \delta\lambda]$ et la formule de Taylor-Young donne :

$$\lambda \left(\varphi \left(a + \frac{u}{\lambda} \right) - \varphi(a) \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi'(a)u$$

Comme f est continue en a , on a pour tout $u \geq 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g_\lambda(u) = e^{\varphi'(a)u} f(a)$$

— Pour tout $u \in [0, \delta\lambda]$, d'après la majoration locale de φ , on a :

$$|g_\lambda(u)| \leq e^{\frac{\varphi'(a)}{2}u} \sup_{x \in [a, a+\delta]} |f(x)|$$

La fonction de majoration est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi'(a) < 0$ et f est continue sur le segment $[a, a + \delta]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_\lambda(u) du = \int_0^{+\infty} e^{\varphi'(a)u} f(a) du = f(a) \left[\frac{e^{\varphi'(a)u}}{\varphi'(a)} \right]_0^{+\infty} = \frac{f(a)}{-\varphi'(a)} = \frac{f(a)}{|\varphi'(a)|}$$

Ainsi :

$$\int_{[a, a+\delta]} e^{\lambda(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x) dx \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\lambda |\varphi'(a)|}$$

Le traitement de la seconde intégrale sur $[a, b] \setminus [a, a + \delta]$ est identique à la preuve de 1.1. La contribution de cette intégrale est un $\mathcal{O}(e^{-\eta\lambda})$.

Donc :

$$J(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\lambda |\varphi'(a)|}$$

Et finalement :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(a)} \frac{f(a)}{\lambda |\varphi'(a)|}$$

Si le maximum est atteint en $x_0 = b$, la preuve est identique. ■

1.2 Méthode de la phase stationnaire

Après avoir traité le cas où φ est à valeurs réelles, on s'intéresse maintenant au cas dual où φ est purement imaginaire, c'est-à-dire $\varphi = i\phi$ avec ϕ réelle. L'exponentielle $e^{i\lambda\phi(x)}$ étant alors de module constant égal à 1, la concentration de l'intégrale provient alors d'un phénomène d'oscillations destructives, sauf au voisinage des points où la phase ϕ est stationnaire.

Théorème 1.4.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment. Supposons que :

- $\varphi : [a, b] \rightarrow i\mathbb{R}$ est une fonction imaginaire pure, on note $\varphi(x) = i\phi(x)$
- $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $\phi'(x_0) = 0$ et $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}, \phi'(x) \neq 0$.
- $\phi''(x_0) \neq 0$
- $f(x_0) \neq 0$

Alors, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda\phi(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\phi''(x_0))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\phi''(x_0)|}}$$

Démonstration. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, supposons que $\phi''(x_0) > 0$.

Soit $\eta > 0$ tel que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset]a, b[$.

Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\chi(x) = 1$ sur $[x_0 - \eta/2, x_0 + \eta/2]$ et $\chi(x) = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

On a :

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x) \chi(x) dx + \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x) (1 - \chi(x)) dx = A(\lambda) + B(\lambda)$$

Sur $[a, b] \setminus]x_0 - \eta/2, x_0 + \eta/2[$, la fonction ϕ' ne s'annule pas par hypothèse. On pose alors :

$$h(x) = \frac{f(x)(1 - \chi(x))}{\phi'(x)}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \frac{1}{i\lambda} \int_a^b h(x) \frac{d}{dx} \left(e^{i\lambda\phi(x)} \right) dx \\ &= \frac{1}{i\lambda} \left[h(x) e^{i\lambda\phi(x)} \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b h'(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx \end{aligned}$$

Comme h et h' sont continues (donc bornées) sur le segment $[a, b]$ et que $|e^{i\lambda\phi(x)}| = 1$, il en résulte que :

$$B(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

(On pourrait même montrer que c'est un $\mathcal{O}(1/\lambda^k)$ pour tout k par itérations successives).

Par la formule de Taylor avec reste intégral pour ϕ à l'ordre 2 en x_0 , on a :

$$\phi(x) = \phi(x_0) + g(x)(x - x_0)^2$$

où $g(x) = \int_0^1 (1-s)\phi''(x_0 + s(x - x_0))ds$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Comme $\phi''(x_0) > 0$, on a $g(x_0) = \frac{\phi''(x_0)}{2} > 0$ et donc par continuité, quitte à rétrécir η , $g(x) > 0$ sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$.

Posons :

$$\xi : \begin{cases} [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x - x_0)\sqrt{g(x)} \end{cases}$$

Comme ξ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\xi'(x_0) = \sqrt{g(x_0)} > 0$, le théorème d'inversion locale affirme que sur un voisinage de x_0 , ξ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme dans un voisinage de $\xi(x_0) = 0$. On note $K = \xi([x_0 - \eta, x_0 + \eta])$.

On effectue le changement de variable $u = \xi(x)$ (donc $dx = (\xi^{-1})'(u)du$) :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_K f(\xi^{-1}(u)) \chi(\xi^{-1}(u)) (\xi^{-1})'(u) e^{i\lambda\phi(\xi^{-1}(u))} du \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \int_K f(\xi^{-1}(u)) \chi(\xi^{-1}(u)) (\xi^{-1})'(u) e^{i\lambda u^2} du \end{aligned}$$

On note $G(u) = f(\xi^{-1}(u)) \chi(\xi^{-1}(u)) (\xi^{-1})'(u)$. On a par la formule de Taylor-Young :

$G(u) = G(0) + uR(u)$ avec R continue. Donc :

$$\begin{aligned} \int_K G(u) e^{i\lambda u^2} du &= G(0) \int_K e^{i\lambda u^2} du + \int_K uR(u) e^{i\lambda u^2} du \\ &= G(0) \int_K e^{i\lambda u^2} du + \left[R(u) \frac{e^{i\lambda u^2}}{2i\lambda} \right]_K - \frac{1}{2i\lambda} \int_K R'(u) e^{i\lambda u^2} du \\ &= G(0) \int_K e^{i\lambda u^2} du + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Comme $\chi(x_0) = 1$ et $(\xi^{-1})'(0) = \frac{1}{\xi'(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{\phi''(x_0)/2}} = \sqrt{\frac{2}{\phi''(x_0)}}$, on obtient :

$$G(0) = f(x_0) \sqrt{\frac{2}{\phi''(x_0)}}$$

L'intégrale restante, par changement de variable $v = u\sqrt{\lambda}$, tend vers l'intégrale de Fresnel sur $\mathbb{R}$ entier :

$$\int_K e^{i\lambda u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda}K} e^{iv^2} dv \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4}$$

Donc :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda\phi(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\phi''(x_0)}}$$

Idem pour $\phi''(x_0) < 0$, d'où l'expression générale :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda\phi(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\phi''(x_0))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\phi''(x_0)|}}$$

■

Comme pour la méthode de Laplace, ce théorème s'étant au cas où ce point se trouve au bord du domaine.

Corollaire 1.5.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment. Supposons que :

- $\varphi : [a, b] \rightarrow i\mathbb{R}$ est une fonction imaginaire pure, on note $\varphi(x) = i\phi(x)$
- $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- il existe $x_0 \in \{a, b\}$ tel que $\phi'(x_0) = 0$ et $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}, \phi(x) \neq 0$.
- $\phi''(x_0) \neq 0$
- $f(x_0) \neq 0$

Alors, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda\phi(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\phi''(x_0))} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda|\phi''(x_0)|}}$$

Démonstration. Supposons que $x_0 = a$. Exactement comme pour le corollaire de la méthode de Laplace, on prolonge les fonctions ϕ et f par symétrie sur l'intervalle $[2a - b, b]$.

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ \phi(2a - x) & \text{si } x \in [2a - b, a[\end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ f(2a - x) & \text{si } x \in [2a - b, a[\end{cases}$$

Soit $\tilde{I}(\lambda) = \int_{2a-b}^b e^{i\lambda\tilde{\phi}(x)} \tilde{f}(x) dx$.

La méthode de la phase stationnaire 1.4 est applicable :

$$\tilde{I}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{f}(a) e^{i\lambda\tilde{\phi}(a)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\tilde{\phi}''(a))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde{\phi}''(a)|}}$$

Or comme via le changement de variable $y = 2a - x$, on a :

$$\tilde{I}(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(y)} f(y) dy + \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x) dx = 2I(\lambda)$$

On obtient :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(a) e^{i\lambda\phi(a)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\phi''(a))} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda|\phi''(a)|}}$$

Idem si $x_0 = b$.

■

2 Méthodes du point col

On souhaite maintenant étudier le cas général sur $\mathbb{C}$ des intégrales de la forme :

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda\varphi(z)} dz$$

où f et $\varphi := u + iv$ sont des fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Seulement, dans le plan complexe, on se retrouve avec une combinaison de variation d'amplitude (Laplace) et de phase (phase stationnaire) via la décomposition $e^{\lambda\varphi(z)} = e^{\lambda \text{Re}(\varphi(z))} \cdot e^{i\lambda \text{Im}(\varphi(z))}$. L'objectif des méthodes du point col est alors de déformer le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ de sorte à se ramener au cas réel, donc à la méthode de Laplace. Pour cela, on souhaite trouver les "maxima" de $u = \text{Re}(\varphi)$. Cependant, comme φ est holomorphe, par le principe du maximum, u n'admet aucun maximum ni minimum local strict à l'intérieur de U . Ses seuls points critiques sont donc des points cols.

Définition 2.1.

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

On dit que $z_0 \in U$ est un **point col** de φ d'ordre $m - 1$ (avec $m \geq 2$) si :

$$\varphi'(z_0) = 0, \quad \varphi''(z_0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Dans le cas particulier où $m = 2$, on dit que z_0 est un point col **non dégénéré**.

Les points cols engendrent une topologie très spécifique dans leurs voisinages.

Proposition 2.2.

Autour d'un point col z_0 d'ordre $m - 1$, les courbes de niveau $\text{Re}(\varphi(z)) = \text{Re}(\varphi(z_0))$ divisent localement le plan complexe en $2m$ secteurs alternés de même ouverture angulaire $\frac{\pi}{m}$:

- m secteurs appelés **vallées**, de bissectrices $\theta_k = \frac{\pi - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}$ pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$, où $\text{Re}(\varphi(z)) < \text{Re}(\varphi(z_0))$.
- m secteurs appelés **collines**, où $\text{Re}(\varphi(z)) > \text{Re}(\varphi(z_0))$.

Démonstration. Puisque φ est holomorphe au voisinage de z_0 et y admet un point col d'ordre $m - 1$, son développement de Taylor-Young en z_0 donne :

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \mathcal{O}(|z - z_0|^{m+1})$$

Posons $\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} = \rho e^{i\alpha}$ et $z - z_0 = r e^{i\theta}$ avec $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ et $\rho, r \in \mathbb{R}_+^*$.

On a : $\varphi(z) - \varphi(z_0) = \rho r^m e^{i(m\theta + \alpha)} + \mathcal{O}(r^{m+1})$.

Donc :

$$\text{Re}(\varphi(z)) - \text{Re}(\varphi(z_0)) = \rho r^m \cos(m\theta + \alpha) + \mathcal{O}(r^{m+1})$$

Ainsi, pour r suffisamment petit, le signe de la différence $\text{Re}(\varphi(z)) - \text{Re}(\varphi(z_0))$ est dicté par le signe de $\cos(m\theta + \alpha)$.

- Frontières : Le cosinus s'annule lorsque $m\theta + \alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, et les angles $\alpha_k = \frac{\pi}{2m} - \frac{\alpha}{m} + k\frac{\pi}{m}$ pour $k \in \{0, \dots, 2m - 1\}$ correspondent aux directions des $2m$ tangentes en z_0 des courbes de niveau $\text{Re}(\varphi(z)) = \text{Re}(\varphi(z_0))$. Ces demi-droites sont séparées d'un angle régulier de π/m et elles sont bien définies par le théorème des fonctions implicites.
- Vallées : Entre ces limites, il y a exactement m intervalles d'ouverture $\frac{\pi}{m}$ sur lesquels $\cos(m\theta + \alpha) < 0$. Sur ces secteurs de bissectrice $\theta_k = \frac{\pi - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}$ pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$, on a $\text{Re}(\varphi(z)) < \text{Re}(\varphi(z_0))$. Ce sont donc des vallées qui descendent depuis le col.
- Collines : Il y a exactement m autres intervalles d'ouverture $\frac{\pi}{m}$ sur lesquels $\cos(m\theta + \alpha) > 0$. Sur ces secteurs, $\text{Re}(\varphi(z)) > \text{Re}(\varphi(z_0))$, formant les collines qui montent depuis le col.

■

Ainsi, on souhaite déformer $\mathcal{C}$ de telle sorte qu'il passe par un col tout en restant dans les

vallées. On distingue alors deux méthodes différentes : la méthode de la plus grande pente, qui consiste à déformer $\mathcal{C}$ pour qu'il suive exactement la courbe de pente maximale d'une vallée, et la méthode de Perron, qui nécessite seulement que $\mathcal{C}$ soit globalement contenu dans une vallée.

2.1 Méthode de la plus grande pente

Intéressons-nous premièrement à la méthode de la plus grande pente. Le but est de trouver une courbe le long de laquelle la partie réelle de la phase, $u = \operatorname{Re}(\varphi)$, décroît le plus rapidement possible depuis le point col, afin de concentrer l'intégrale.

Comme φ est holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann imposent :

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Les vecteurs ∇u et ∇v sont donc orthogonaux, et puisque la direction de plus grande pente de u est donnée par $\pm \nabla u$, elle est donc tangente aux courbes de niveau de $v = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Définition 2.3.

Soit φ une fonction holomorphe admettant un point col en z_0 .

On appelle **chemin de plus grande pente** issu de z_0 une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$ telle que :

- $\gamma(0) = z_0$
- $\operatorname{Im}(\varphi(\gamma(t))) = \operatorname{Im}(\varphi(z_0))$
- $\forall t \neq 0, \operatorname{Re}(\varphi(\gamma(t))) < \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$

Autrement dit, $\mathcal{C}$ est une courbe partant de z_0 qui plonge dans une vallée en suivant strictement une ligne de niveau de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Pour connaître la direction de franchissement du col, on a besoin des angles que forment les tangentes des courbes de plus grande pente avec l'axe des réels.

Proposition 2.4.

Soit φ une fonction holomorphe admettant un point col en z_0 d'ordre $m - 1$.

Écrivons $\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les angles θ_k de tangente des m chemins de plus grande descente issus de z_0 sont exactement les bissectrices des m vallées :

$$\theta_k = \frac{\pi - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m} \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, m-1\}$$

Démonstration. En reprenant les notations de la démonstration de 2.2, on a :

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) = \rho r^m e^{i(m\theta + \alpha)} + \mathcal{O}(r^{m+1})$$

Pour des r suffisamment petits, on a :

$$\Delta u(r, \theta) = \operatorname{Re}(\varphi(z)) - \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) \sim \rho r^m \cos(m\theta + \alpha)$$

$$\Delta v(r, \theta) = \operatorname{Im}(\varphi(z)) - \operatorname{Im}(\varphi(z_0)) \sim \rho r^m \sin(m\theta + \alpha)$$

Or un chemin de plus grande pente annule les variations imaginaires, ce qui exige localement $\Delta v(r, \theta) = 0$. Donc $\sin(m\theta + \alpha) = 0$, d'où $m\theta + \alpha = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

De plus, un tel chemin doit plonger dans la vallée, ce qui exige $\Delta u(r, \theta) < 0$. Donc $\cos(m\theta + \alpha) = \cos(n\pi) = (-1)^n < 0$. Ainsi, n est impair.

Posons $n = 2k + 1$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$m\theta_k + \alpha = \pi + 2k\pi \iff \theta_k = \frac{\pi - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}$$

On retrouve bien l'expression des bissectrices des vallées. ■

On peut enfin appliquer la méthode de Laplace pour obtenir notre approximation.

Théorème 2.5.

Méthode de la plus grande pente

Soient f et φ deux fonctions holomorphes sur un ouvert U .

Soit $\mathcal{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Supposons qu'il existe un contour $\mathcal{C}'$, homotope à $\mathcal{C}$ dans U , vérifiant :

- $\mathcal{C}'$ traverse un point col non dégénéré z_0 de φ (c'est-à-dire $\varphi'(z_0) = 0$ et $\varphi''(z_0) \neq 0$).
- Au voisinage de z_0 , $\mathcal{C}'$ coïncide exactement avec un chemin de plus grande descente traversant z_0 avec un angle de tangente θ .
- Pour tout $z \in \mathcal{C}' \setminus \{z_0\}$, on a $\operatorname{Re}(\varphi(z)) < \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$. Donc z_0 est l'unique maximum global de l'amplitude sur tout le chemin.
- L'intégrale $\int_{\mathcal{C}'} |f(z)e^{\lambda_0 \varphi(z)}| |dz|$ converge absolument.
- $f(z_0) \neq 0$.

Alors :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} f(z_0)e^{\lambda \varphi(z_0)} e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(z_0)|}}$$

Démonstration. Puisque les chemins $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont homotopes dans le domaine d'holomorphie U et que la fonction $z \mapsto f(z)e^{\lambda \varphi(z)}$ y est holomorphe, le théorème de Cauchy garantit que :

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} f(z)e^{\lambda \varphi(z)} dz = \int_{\mathcal{C}'} f(z)e^{\lambda \varphi(z)} dz$$

Par hypothèse, le chemin $\mathcal{C}'$ traverse le point col z_0 en se superposant à une courbe de plus grande pente. Paramétrons ce petit segment par une fonction $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow U$ telle que :

- $\gamma(0) = z_0$.

- Les valeurs $t \in [-\epsilon, 0[$ correspondent à la "montée" depuis la première vallée, et $t \in]0, \epsilon]$ à la "descente" dans la vallée opposée.
- La vitesse soit unitaire $|\gamma'(t)| = 1$. En particulier, en $t = 0$, le vecteur dérivé $\gamma'(0)$ est le vecteur tangent unitaire orienté dans le sens de parcours. Son angle avec l'axe réel étant θ , on a $\gamma'(0) = e^{i\theta}$.

On décompose l'intégrale sur le chemin complet $\mathcal{C}'$ en deux parties : la portion autour du col, et le "reste" du chemin que l'on note $\mathcal{R} = \mathcal{C}' \setminus \gamma([- \epsilon, \epsilon])$:

$$\int_{\mathcal{C}'} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz = \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(\gamma(s)) e^{\lambda \varphi(\gamma(s))} \gamma'(s) ds}_{=I_{\epsilon}(\lambda)} + \int_{\mathcal{R}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz$$

Par hypothèse, z_0 est l'unique maximum global strict de la partie réelle sur tout le chemin. Comme le domaine $\mathcal{R}$ exclut z_0 et son voisinage, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathcal{R}, \quad \operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \delta$$

Soit $\lambda_0 > 0$, on a pour tout $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{R}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \right| &\leq \int_{\mathcal{R}} |f(z)| e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z))} |dz| \\ &= \int_{\mathcal{R}} |f(z)| e^{(\lambda - \lambda_0) \operatorname{Re}(\varphi(z))} e^{\lambda_0 \operatorname{Re}(\varphi(z))} |dz| \\ &\leq e^{(\lambda - \lambda_0)(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \delta)} \int_{\mathcal{R}} |f(z)| e^{\lambda_0 \operatorname{Re}(\varphi(z))} |dz| \\ &= \underbrace{\left(e^{-\lambda_0(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \delta)} \int_{\mathcal{R}} |f(z)| e^{\lambda_0 \operatorname{Re}(\varphi(z))} |dz| \right)}_{=\text{Constante } K \text{ indépendante de } \lambda} \times e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))} e^{-\lambda \delta} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\mathcal{R}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz = \mathcal{O} \left(e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))} e^{-\lambda \delta} \right)$$

On se concentre donc exclusivement sur l'intégrale locale :

$$I_{\epsilon}(\lambda) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(\gamma(s)) e^{\lambda \varphi(\gamma(s))} \gamma'(s) ds$$

Comme $\operatorname{Im}(\varphi(\gamma(t))) = \operatorname{Im}(\varphi(z_0))$ pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, on a :

$$I_{\epsilon}(\lambda) = e^{i\lambda \operatorname{Im}(\varphi(z_0))} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(\gamma(s)) e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(\gamma(s)))} \gamma'(s) ds$$

Posons la fonction de phase réelle $h(s) = \operatorname{Re}(\varphi(\gamma(s))) - \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$ et la fonction d'amplitude complexe $g(s) = f(\gamma(s)) \gamma'(s)$. L'intégrale se réécrit :

$$I_{\epsilon}(\lambda) = e^{\lambda \varphi(z_0)} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(s) e^{\lambda h(s)} ds$$

On a :

- $\operatorname{Re}(\varphi(\gamma(s))) < \operatorname{Re}(\varphi(\gamma(0))) = \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$, donc $h(s) < 0 = h(0)$ pour $s \neq 0$.
- $h'(0) = \frac{d}{ds} [\operatorname{Re}(\varphi(\gamma(s)))]_{s=0} = \operatorname{Re}(\varphi'(\gamma(0))\gamma'(0)) = \operatorname{Re}(0) = 0$.
- Le développement de Taylor-Young de φ donne $\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{1}{2}\varphi''(z_0)(z - z_0)^2 + o(|z - z_0|^2)$. De plus, on a $\gamma(s) - z_0 = s\gamma'(0) + o(s) = se^{i\theta} + o(s)$. Donc :

$$\varphi(\gamma(s)) = \varphi(z_0) + \frac{1}{2}\varphi''(z_0)e^{2i\theta}s^2 + o(s^2)$$

Cependant, comme $\operatorname{Im}(\varphi(\gamma(s))) = \operatorname{Im}(\varphi(z_0))$ pour tout s , $\frac{1}{2}\varphi''(z_0)e^{2i\theta}s^2$ est réel.

Donc $h(s) = \operatorname{Re}(\varphi(\gamma(s))) - \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) = \frac{1}{2}\varphi''(z_0)e^{2i\theta}s^2 + o(s^2)$.

De plus, on sait que $\varphi''(z_0) = \rho e^{i\alpha}$ où $\rho = |\varphi''(z_0)|$. Et comme on est sur un chemin de plus grande pente, on a : $2\theta + \alpha = \pi \pmod{2\pi}$. Ainsi, $\varphi''(z_0)e^{2i\theta} = -\rho = -|\varphi''(z_0)|$.

Enfin, puisque $h(s) = \frac{1}{2}h''(0)s^2 + o(s^2)$, on a :

$$h''(0) = -|\varphi''(z_0)| < 0$$

On applique la méthode de Laplace au point $s = 0$: $g(0) = f(\gamma(0))\gamma'(0) = f(z_0)e^{i\theta}$ et $h''(0) = -|\varphi''(z_0)|$, cela donne :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(s)e^{\lambda h(s)} ds \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} g(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|h''(0)|}} = f(z_0)e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\varphi''(z_0)|}}$$

Finalement, en rajoutant le terme $e^{\lambda\varphi(z_0)}$, on obtient :

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(z_0)e^{\lambda\varphi(z_0)} e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\varphi''(z_0)|}}$$

■

Remarque. On pourrait obtenir le développement asymptotique à n'importe quel ordre, mais on se contente ici d'un simple équivalent pour un point col non dégénéré puisqu'on trouvera ce développement dans le cas général via la méthode de Perron.

Cette méthode de la plus grande pente exige de déterminer explicitement la courbe suivant exactement la direction de plus grande descente, ce qui n'est possible analytiquement que dans des cas favorables. On introduit donc à présent une méthode alternative, plus flexible, qui s'affranchit de cette contrainte tout en fournissant un développement asymptotique complet à tout ordre.

2.2 Méthode de Perron

Pour établir ce théorème, on se base essentiellement sur l'article d'O'Sullivan [1] et en particulier sur sa deuxième démonstration du théorème (chap. 4).

Il est nécessaire de se placer dans un cadre topologique précis.

Hypothèse 2.6.

Soient f et φ des fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

Soient $z_0, z_1 \in U$ tels que $z_0 \neq z_1$, et soit $\mathcal{C} \subset U$ un contour d'intégration de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, reliant z_0 à z_1 , en particulier fini.

Soit $\mathcal{B}$ un voisinage de z_0 tel que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subset U$.

On suppose que :

- z_0 est un point col d'ordre $m - 1$ de φ ($m \geq 2$). On note $\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $z \in \mathcal{C} \setminus \{z_0\}$, $\operatorname{Re}(\varphi(z)) < \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$.
- Au voisinage de z_0 , la partie initiale de $\mathcal{C}$ est contenue dans un secteur angulaire d'ouverture $\frac{2\pi}{m}$ qui correspond à une unique vallée de φ , caractérisée par sa bissectrice d'angle $\theta_k = \frac{\pi - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}$.
- Il existe $K_f > 0$ telle que pour tout $z \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, on a $|f(z)| \leq K_f$.
- $\mathcal{B}, \mathcal{C}, f, \varphi, z_0$ sont indépendants de λ .

Pour obtenir la méthode de Perron, on se base sur la proposition suivante qui permet de réduire le calcul asymptotique de l'intégrale sur l'ensemble du contour à une évaluation sur un petit segment rectiligne de la vallée.

Proposition 2.7.

Sous les hypothèses 2.6.

Posons b le point situé sur la bissectrice d'angle θ_k à une distance $R_p > 0$ suffisamment petite de z_0 , c'est-à-dire $b = z_0 + R_p e^{i\theta_k}$.

Alors, il existe $\mu > 0$ telle que :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \int_{[z_0, b]} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz + \mathcal{O}\left(K_f e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu)}\right)$$

Démonstration. On pose $R_p > 0$ suffisamment petit tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, R_p)$ soit strictement inclus dans le voisinage $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{C}$ démarre à l'intérieur du secteur de bissectrice θ_k , par définition, le segment $[z_0, b]$ se situe également dans ce secteur. Par continuité de φ , on peut alors réduire R_p pour que le segment $[z_0, b]$ et la portion initiale de $\mathcal{C}$ restent tous deux à l'intérieur de la même vallée $\operatorname{Re}(\varphi(z)) < \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$.

Soit b_1 le premier point d'intersection du contour $\mathcal{C}$ avec le cercle $\mathcal{C}(z_0, R_p)$ (si le contour s'arrête avant d'atteindre ce rayon, on pose $b_1 = z_1$).

On définit alors γ par la concaténation de :

- Le segment rectiligne $[z_0, b]$.
- L'arc de cercle $\mathcal{A}$, centré en z_0 et de rayon R_p , qui relie le point b au point b_1 .
- La portion restante de $\mathcal{C}$ à partir de b_1 , notée $\mathcal{C}_{>R_p}$.

La fonction $z \mapsto f(z)e^{\lambda\varphi(z)}$ étant holomorphe, le théorème intégral de Cauchy donne :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz = \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz = \int_{[z_0, b]} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz + \int_{\mathcal{A}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz + \int_{\mathcal{C}_{>R_p}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz$$

Par construction géométrique, on a $\operatorname{Re}(\varphi(z)) - \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) < 0$ pour tout point $z \in \mathcal{A}$.

L'arc $\mathcal{A}$ étant un compact, la fonction continue $z \mapsto \operatorname{Re}(\varphi(z)) - \operatorname{Re}(\varphi(z_0))$ atteint son supremum. Il existe ainsi $\mu_1 > 0$ telle que :

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad \operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_1$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{A}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz \right| &\leq \int_{\mathcal{A}} |f(z)| e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z))} |dz| \\ &\leq K_f e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_1)} \int_{\mathcal{A}} |dz| \\ &\leq K_f \text{longueur}(\mathcal{A}) e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_1)} \end{aligned}$$

Comme $\text{longueur}(\mathcal{A}) \leq \pi R_p$, on trouve la majoration souhaitée $\mathcal{O}(K_f e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_1)})$.

Par la seconde hypothèse de 2.6, z_0 est le maximum global strict de l'amplitude sur tout le chemin $\mathcal{C}$. Donc, de même, il existe $\mu_2 > 0$ telle que :

$$\forall z \in \mathcal{C}_{>R_p}, \quad \operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq \operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_2$$

Et ainsi :

$$\left| \int_{\mathcal{C}_{>R_p}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz \right| \leq K_f \text{longueur}(\mathcal{C}_{>R_p}) e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_2)} = \mathcal{O}(K_f e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu_2)})$$

En posant $\mu = \min(\mu_1, \mu_2) > 0$, on obtient le résultat :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz = \int_{[z_0, b]} f(z)e^{\lambda\varphi(z)} dz + \mathcal{O}(K_f e^{\lambda(\operatorname{Re}(\varphi(z_0)) - \mu)})$$

■

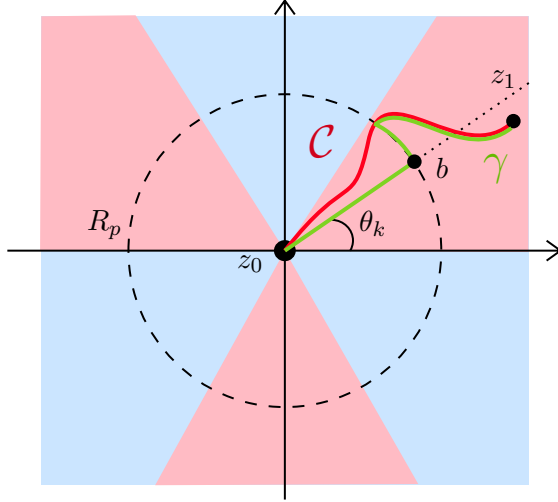


Figure 1 : Représentation du nouveau chemin d'intégration.

On peut alors enfin énoncer la méthode de Perron pour un chemin $\mathcal{C}$ qui commence au pôle z_0 .

Théorème 2.8.

Méthode de Perron pour un chemin partant d'un maximum

Sous les hypothèses 2.6, on a pour tout $S \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} e^{\lambda \varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_k(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right)$$

où les coefficients α_s sont définis par :

$$\alpha_s = \frac{1}{s!m} \left(\frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|} \right)^{\frac{s+1}{m}} \frac{d^s}{dz^s} \left[f(z) \left(\frac{\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \right]_{z=z_0}$$

Démonstration. D'après la proposition précédente 2.7 l'étude de l'intégrale se réduit à l'intégrale sur le segment $[z_0, b]$, où $b = z_0 + R_p e^{i\theta_k}$ avec $R_p > 0$ petit.

Posons :

$$g(z) = \begin{cases} \left(\frac{\varphi(z_0) - \varphi(z)}{(z - z_0)^m} \right)^{1/m} & \text{si } z \neq z_0 \\ \left(-\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} \right)^{1/m} & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Comme $\frac{\varphi(z_0) - \varphi(z)}{(z - z_0)^m} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} -\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}$, la fonction $g(z)$ est bien définie et holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 . De plus, comme z_0 est d'ordre m , on a $g(z_0) \neq 0$.

Posons :

$$v(z) = (z - z_0)g(z)$$

La fonction v est holomorphe sur un voisinage de z_0 , donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $v'(z_0) = g(z_0) \neq 0$.

Ainsi, le théorème d'inversion locale complexe affirme qu'il existe un voisinage V de z_0 et un voisinage W de 0 tels que $v : V \rightarrow W$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme biholomorphe.

Notons $z(v)$ la fonction réciproque, qui est holomorphe sur W .

On effectue le changement de variable $z = z(v)$ dans l'intégrale : on a $dz = z'(v)dv$ et $v^m = (z - z_0)^m \left(\frac{\varphi(z_0) - \varphi(z)}{(z - z_0)^m} \right) = \varphi(z_0) - \varphi(z)$ donc $\varphi(z) = \varphi(z_0) - v^m$.

Ainsi,

$$\int_{[z_0, b]} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz = e^{\lambda \varphi(z_0)} \int_0^{v(b)} f(z(v)) z'(v) e^{-\lambda v^m} e^{i\theta_k} dv$$

Posons la fonction holomorphe au voisinage W de $v = 0$:

$$F(v) = f(z(v)) z'(v)$$

Donc :

$$\int_{[z_0, b]} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz = e^{\lambda \varphi(z_0)} \int_0^{v(b)} F(v) e^{-\lambda v^m} dv$$

On applique le théorème de Taylor avec reste intégral à l'ordre S en 0 :

$$F(v) = \sum_{s=0}^{S-1} c_s v^s + v^S R_S(v)$$

Puisque la fonction $F(v)$ est holomorphe sur W , le coefficient d'ordre s de sa série de Taylor est donné par la formule intégrale de Cauchy sur un petit cercle $\mathcal{C}_v \subset W$ autour de 0 :

$$c_s = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_v} \frac{F(v)}{v^{s+1}} dv$$

On paramétrise par γ_v :

$$c_s = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_v} \frac{f(z(v)) z'(v)}{v^{s+1}} dv$$

On effectue le changement de variable $v = v(z)$, γ_v centré en 0 devient un petit contour fermé $\gamma_z \subset V$ autour de z_0 et $z'(v)dv$ redevient dz . On obtient :

$$c_s = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{s+1}} \left(\frac{(z - z_0)^m}{\varphi(z_0) - \varphi(z)} \right)^{\frac{s+1}{m}} dz$$

Donc :

$$c_s = \left(-\frac{m!}{\varphi^{(m)}(z_0)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{s+1}} \left(\frac{-\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z_0) - \varphi(z)} \right)^{\frac{s+1}{m}} dz$$

Posons la fonction holomorphe :

$$H(z) = f(z) \left(\frac{-\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z_0) - \varphi(z)} \right)^{\frac{s+1}{m}}$$

Alors, par la formule de Cauchy à l'ordre s :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} \frac{H(z)}{(z - z_0)^{s+1}} dz = \frac{1}{s!} H^{(s)}(z_0) = \frac{1}{s!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^s}{dz^s} [H(z)]$$

D'où :

$$c_s = \frac{1}{s!} \left(-\frac{m!}{\varphi^{(m)}(z_0)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^s}{dz^s} \left[f(z) \left(\frac{-\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z_0) - \varphi(z)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \right]$$

Et :

$$-\frac{m!}{\varphi^{(m)}(z_0)} = \frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|} e^{i(\pi-\alpha)} = \frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|} e^{im\theta_k},$$

Ainsi :

$$\alpha_s = \frac{c_s}{m} e^{-i\theta_k(s+1)} = \frac{1}{s! m} \left(\frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|} \right)^{\frac{s+1}{m}} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^s}{dz^s} \left[f(z) \left(\frac{\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \right]$$

Ainsi, le module $|\varphi^{(m)}(z_0)|$ apparaît après séparation du module et de l'argument, tandis que toute l'information angulaire est portée par le facteur $e^{i\theta_k(s+1)}$. On sépare l'intégrale en la somme et le reste :

$$\int_0^{v_b} F(v) e^{-\lambda v^m} dv = \sum_{s=0}^{S-1} c_s \int_0^{v(b)} v^s e^{-\lambda v^m} dv + \int_0^{v(b)} v^S R_S(v) e^{-\lambda v^m} dv$$

On effectue le changement de variable réel $t = \lambda v^m$, d'où $v = (t/\lambda)^{1/m}$ et $dv = \frac{1}{m\lambda^{1/m}} t^{1/m-1} dt$. Les bornes deviennent 0 et $T_b = \lambda v(b)^m$.

$$\begin{aligned} \int_0^{v(b)} v^s e^{\lambda v^m} dv &= \int_0^{T_b} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\frac{s}{m}} e^{-t} \frac{1}{m\lambda^{\frac{1}{m}}} t^{\frac{1}{m}-1} dt \\ &= \frac{1}{m\lambda^{\frac{s+1}{m}}} \int_0^{T_b} t^{\frac{s+1}{m}-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

On étend l'intégrale pour obtenir la fonction Gamma d'Euler, cela ajoute une erreur de $Ce^{-T_b} = \mathcal{O}(e^{-\lambda v(b)^m})$. Donc :

$$\int_0^{v(b)} v^s e^{\lambda v^m} dv = \frac{1}{m\lambda^{\frac{s+1}{m}}} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) + \mathcal{O}(e^{-\lambda v(b)^m})$$

Comme $z(v)$ est holomorphe sur un voisinage de 0, la dérivée $z'(v)$ est bornée par $M > 0$ sur un compact contenant $[0, v(b)]$.

$$|F(v)| = |f(z(v))z'(v)| \leq MK_f \quad 0 \leq v \leq v(b).$$

Donc, pour tout $S > 0$, il existe $C_S > 0$ telle que :

$$|R_S(v)| \leq C_S K_f \quad 0 \leq v \leq v(b).$$

Dès lors,

$$\left| \int_0^{v_b} v^S R_S(v) e^{-\lambda v^m} dv \right| \leq C_S K_f \int_0^{v_b} v^S e^{-\lambda v^m} dv.$$

Par le même changement de variable $t = \lambda v^m$ et en étendant l'intégrale à l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{v_b} v^S e^{-\lambda v^m} dv &= \frac{1}{m\lambda^{\frac{S+1}{m}}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{S+1}{m}-1} e^{-t} dt + \mathcal{O}(e^{-\lambda v(b)^m}) \\ &= \frac{1}{m\lambda^{\frac{S+1}{m}}} \Gamma\left(\frac{S+1}{m}\right) + \mathcal{O}(e^{-\lambda v(b)^m}) \\ &= \mathcal{O}\left(K_f \lambda^{-\frac{S+1}{m}}\right) \end{aligned}$$

En regroupant, on obtient l'expression :

$$\int_0^{v(b)} F(v) e^{-\lambda v^m} dv = \sum_{s=0}^{S-1} c_s \frac{1}{m\lambda^{\frac{s+1}{m}}} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{K_f}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right)$$

En multipliant par $e^{\lambda\varphi(z_0)}$ et en reconnaissant les α_k , on obtient le résultat :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda\varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} e^{\lambda\varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_k(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right)$$

■

On peut naturellement élargir ce théorème à un chemin $\mathcal{C}$ qui passe par un point col au lieu d'y démarrer, comme c'est le cas dans la plupart des applications concrètes.

Théorème 2.9.

Méthode de Perron pour un chemin passant par un maximum

Sous les hypothèses 2.6 modifiées :

On suppose que $\mathcal{C}$ est un chemin reliant z_2 à z_1 , qui passe par z_0 en arrivant via une vallée de bissectrice θ_{k_2} et en repartant via une vallée de bissectrice θ_{k_1} .

On a pour tout $S \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda\varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} e^{\lambda\varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_{k_1}(s+1)} - e^{i\theta_{k_2}(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right)$$

où les coefficients α_s sont définis par :

$$\alpha_s = \frac{1}{s! m} \left(\frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|} \right)^{\frac{s+1}{m}} \frac{d^s}{dz^s} \left[f(z) \left(\frac{\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \right)^{\frac{s+1}{m}} \right]_{z=z_0}$$

Démonstration. On découpe le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ en deux chemins consécutifs :

- $\mathcal{C}_2$, le chemin d'arrivée, qui part de z_2 et se termine en z_0 .
- $\mathcal{C}_1$, le chemin de départ, qui commence en z_0 et se termine en z_1 .

On inverse l'orientation du second chemin $\mathcal{C}_2$. On obtient :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz - \int_{\mathcal{C}_2^{-1}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz$$

On applique le théorème précédent 2.8 sur $\mathcal{C}_1$ avec l'angle θ_{k_1} et sur $\mathcal{C}_2^{-1}$ avec l'angle θ_{k_2} à un ordre $S \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz &= e^{\lambda \varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_{k_1}(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right) \\ &\quad - e^{\lambda \varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_{k_2}(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} e^{\lambda \varphi(z_0)} \sum_{s=0}^{S-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right) \alpha_s \frac{e^{i\theta_{k_1}(s+1)} - e^{i\theta_{k_2}(s+1)}}{\lambda^{\frac{s+1}{m}}} + \mathcal{O}\left(K_f \frac{e^{\lambda \operatorname{Re}(\varphi(z_0))}}{\lambda^{\frac{S+1}{m}}}\right)$$

■

En ne s'intéressant qu'au premier terme de ce développement, on obtient l'équivalent suivant, qui permet notamment de retrouver le résultat de la méthode de la plus grande pente comme cas particulier.

Corollaire 2.10.

Sous les hypothèses du théorème précédent 2.9 avec $f(z_0) \neq 0$, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} (e^{i\theta_{k_1}} - e^{i\theta_{k_2}})}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{m!}{\lambda |\varphi^{(m)}(z_0)|}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Pour un col non dégénéré ($m = 2$) traversé en ligne droite ($\theta_{k_1} = \theta_{k_2} - \pi$), on obtient l'équivalent trouvé dans la section précédente 2.5 :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} e^{i\theta_{k_1}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(z_0)|}}$$

Démonstration. On tronque le développement du théorème 2.9 à l'ordre 1 :

Pour $S = 1$, il ne reste que le terme $s = 0$ de la somme. Comme :

$$\alpha_0 = \frac{1}{0! m} \left(\frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|}\right)^{\frac{1}{m}} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[f(z) \left(\frac{\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \right)^{\frac{1}{m}} \right]$$

et comme $\varphi(z) - \varphi(z_0) \sim \frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$, on obtient :

$$\alpha_0 = \frac{1}{m} \left(\frac{m!}{|\varphi^{(m)}(z_0)|}\right)^{\frac{1}{m}} f(z_0)$$

Finalement :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} (e^{i\theta_{k_1}} - e^{i\theta_{k_2}})}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{m!}{\lambda |\varphi^{(m)}(z_0)|}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Supposons que le col est non dégénéré ($m = 2$). L'équivalent devient :

$$\frac{f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} (e^{i\theta_{k_1}} - e^{i\theta_{k_2}})}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{\lambda |\varphi''(z_0)|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que le chemin entre par une vallée et sort par la vallée diamétralement opposée, les bissectrices de ces vallées sont donc séparées d'un angle π .

Or :

$$\theta_{k_2} = \theta_{k_1} + \pi \implies e^{i\theta_{k_2}} = e^{i(\theta_{k_1} + \pi)} = -e^{i\theta_{k_1}}$$

Ainsi :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) e^{\lambda \varphi(z)} dz \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} e^{i\theta_{k_1}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(z_0)|}}$$

■

2.3 Exemples

Étudions quelques exemples de la méthode du point col.

Premièrement, avec cette méthode générale, on retrouve la méthode de Laplace.

Exemple 2.11.

Considérons :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda \varphi(x)} dx$$

où f et φ sont des fonctions analytiques réelles. On suppose que φ admet un unique maximum global strict en un point $x_0 \in]a, b[$, avec $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) < 0$ (col réel non dégénéré) et $f(x_0) \neq 0$.

On a $m = 2$ et

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \frac{\varphi''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

donc $\varphi''(x_0) = -|\varphi''(x_0)|$ s'écrit $\rho e^{i\alpha}$ avec $\alpha = \pi$.

Ainsi,

$$\theta_k = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{2k\pi}{2} = k\pi$$

On applique alors le théorème de Perron 2.9 passant par un maximum en considérant le chemin de l'axe réel arrivant en x_0 via $\theta_2 = \pi$ et repartant via $\theta_1 = 0$.

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{\lambda \varphi(x_0)} \frac{(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\lambda |\varphi''(x_0)|}}$$

Comme $e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = e^{i0} - e^{i\pi} = 2$, on obtient la méthode de Laplace 1.1 :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{\lambda \varphi(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(x_0)|}}$$

De la même manière, on retrouve également la méthode de la phase stationnaire.

Exemple 2.12.

Considérons :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda \psi(x)} dx$$

où ψ est réelle et admet un point critique non dégénéré en $x_0 \in]a, b[$. Donc $\psi'(x_0) = 0$ et $\psi''(x_0) \neq 0$.

Posons $\varphi(z) = i\psi(z)$.

On a $\varphi'(x_0) = i\psi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) = i\psi''(x_0)$.

— Cas 1 : $\psi''(x_0) > 0$.

Alors $\alpha = \pi/2$. Les bissectrices sont $\theta_k = \frac{\pi - \pi/2}{2} + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Le chemin original (l'axe réel) forme des angles $\theta_{\text{in}} = \pi$ et $\theta_{\text{out}} = 0$. On déforme le chemin $[a, b]$ de telle sorte qu'il passe par l'axe incliné d'angle $\pi/4$. Ce chemin arrive en x_0 par $\theta_2 = 5\pi/4 = \pi/4 + \pi$ et repart via $\theta_1 = \pi/4$. Ainsi, le théorème de Perron passant par un maximum 2.9 donne :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(x_0) e^{i\lambda \psi(x_0)} (e^{i\pi/4} - e^{i5\pi/4})}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2}{\lambda |\psi''(x_0)|}} \\ &\underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda \psi(x_0)} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\psi''(x_0)|}} \end{aligned}$$

— Cas 2 : $\psi''(x_0) < 0$.

Alors $\alpha = -\pi/2$, donc les bissectrices sont $\theta_k = \frac{\pi - (-\pi/2)}{2} + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi$. En déformant le chemin pour passer via $\theta_2 = 3\pi/4$ puis $\theta_1 = -\pi/4$, on obtient :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda \psi(x_0)} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\psi''(x_0)|}}$$

D'où :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(x_0) e^{i\lambda \psi(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\psi''(x_0))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\psi''(x_0)|}}$$

Finalement, traitons des exemples tirés de contextes plus concrets.

Exemple 2.13.

Dans la théorie des astres de Kepler, on cherche à relier une donnée ν , qui décrit le mouvement réel du corps sur son orbite, à un mouvement standard uniforme décrit par M .

Cette relation est donnée par l'équation du centre :

$$\nu = M + \sum_{n \geq 1} C_n \sin(nM) \text{ où } C_n = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(n(iz - \varepsilon \sin z))}{1 - \varepsilon \cos z} dz.$$

Pour calculer les C_n , on commence par étudier un modèle plus simple :

$$I(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(z - \sin z)} dz$$

où on suppose que $\lambda \in \mathbb{N}$.

On a : $f(z) = 1$ et $\varphi(z) = i(z - \sin z)$.

Comme $\varphi'(z) = i(1 - \cos z)$, le seul point critique rencontré sur $[-\pi, \pi]$ est $z_0 = 0$.

De plus, le théorème de Taylor–Young en 0 donne :

$$\varphi(z) = i \left(z - \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots \right) \right) = \frac{i}{6} z^3 - \frac{i}{120} z^5 + \dots$$

Donc le col est d'ordre $m = 3$, et puisque $\varphi^{(3)}(0) = i$, on a : $\varphi^{(3)}(0)/3! = i/6$, ainsi $\alpha = \pi/2$.

Les directions des bissectrices des vallées sont donc :

$$\theta_k = \frac{\pi - (\pi/2)}{3} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ pour } k \in \{0, 1, 2\}$$

On obtient les angles $\theta_0 = \pi/6$, $\theta_1 = 5\pi/6$ et $\theta_2 = -\pi/2$.

Comme l'intégrande est entière, on peut déformer le chemin d'intégration $[-\pi, \pi]$ en

$$\mathcal{C} = [-\pi, -\pi + i\pi/\sqrt{3}] \cup [-\pi + i\pi/\sqrt{3}, 0] \cup [0, \pi + i\pi/\sqrt{3}] \cup [\pi + i\pi/\sqrt{3}, \pi]$$

de sorte que $\mathcal{C}$ passe par 0, y arrive selon la direction $\theta_1 = 5\pi/6$ et en repart selon la direction $\theta_0 = \pi/6$.

Comme $\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z) + 2\pi i$, on a, puisque $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$e^{\lambda\varphi(z+2\pi)} = e^{\lambda\varphi(z)}.$$

Alors :

$$\int_{[-\pi, -\pi + i\pi/\sqrt{3}]} e^{\lambda\varphi(z)} dz = \int_{[\pi, \pi + i\pi/\sqrt{3}]} e^{\lambda\varphi(z)} dz = - \int_{[\pi + i\pi/\sqrt{3}, \pi]} e^{\lambda\varphi(z)} dz.$$

Donc les intégrales sur les portions verticales de $\mathcal{C}$ s'annulent entre elles.

Ainsi, d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale sur $\mathcal{C}$ se réduit à l'intégrale sur le contour local, noté $\mathcal{C}_{\text{loc}}$, formé par les deux segments plongeant dans les vallées :

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}_{\text{loc}}} e^{\lambda\varphi(z)} dz \text{ avec } \mathcal{C}_{\text{loc}} = [-\pi + i\pi/\sqrt{3}, 0] \cup [0, \pi + i\pi/\sqrt{3}].$$

Paramétrons le segment de sortie (direction $\theta_0 = \pi/6$) par $z = te^{i\pi/6}$ avec $t \in]0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}]$.
On a :

$$\Re(\varphi(te^{i\pi/6})) = \Re\left(i\left(te^{i\pi/6} - \sin(te^{i\pi/6})\right)\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \sinh\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} =: f(t).$$

Et de même, $\Re(\varphi(te^{i5\pi/6})) = f(t)$. Il suffit donc d'étudier f sur $]0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}]$.

On a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cosh\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cosh\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Posons

$$g(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cosh\left(\frac{t}{2}\right).$$

- Si $t \in [\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}]$, alors $\frac{\sqrt{3}}{2}t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc le cosinus est négatif ou nul; ainsi, $g(t) \leq 0 < 1$.
- Si $t \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}]$, le cosinus est strictement positif. On a :

$$g'(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cosh\left(\frac{t}{2}\right) \left[\tanh\left(\frac{t}{2}\right) - \sqrt{3} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right].$$

Or, pour $u > 0$, on a $\tanh(u) < u$ et $\tan(u) > u$. On obtient :

$$\tanh\left(\frac{t}{2}\right) - \sqrt{3} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) < \frac{t}{2} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \frac{t}{2} - \frac{3t}{2} = -t < 0.$$

Ainsi, $g'(t) < 0$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme $g(0) = 1$, on a $g(t) < 1$.

On en déduit alors que $f'(t) < 0$, donc que f est strictement décroissante, et comme $f(0) = 0$, on obtient :

$$\Re(\varphi(z)) < \Re(\varphi(0)), \quad \forall z \in \mathcal{C}_{\text{loc}} \setminus \{0\}.$$

Le théorème de Perron passant par un maximum 2.9 donne alors, pour $S = 1$:

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{\alpha_0}{\lambda^{1/3}} \left(e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{2/3}}\right),$$

où

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} 6^{1/3}.$$

De plus,

$$e^{i\pi/6} - e^{i5\pi/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}.$$

Et comme la partie imaginaire de l'intégrande sur l'intervalle réel vaut

$$\Im\left(e^{i\lambda(x-\sin x)}\right) = \sin(\lambda(x - \sin x)),$$

qui est impaire sur $[-\pi, \pi]$, on a $I(\lambda) \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \frac{6^{1/3} \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3 \lambda^{1/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{2/3}}\right).$$

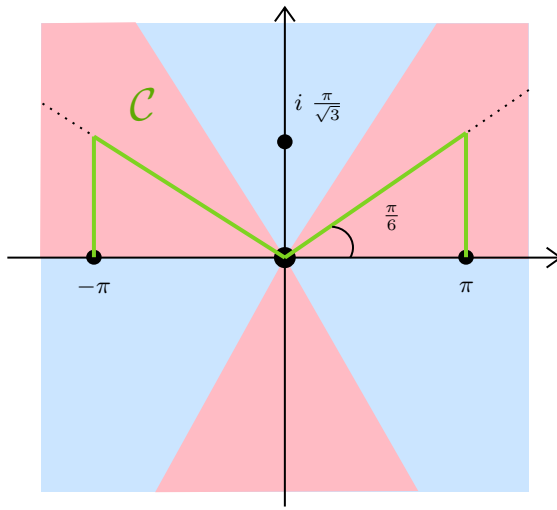


Figure 2 : Représentation de la géométrie et du chemin d'intégration de l'intégrale de Kepler.

Exemple 2.14.

L'équation d'Airy apparaît dans certaines études de phénomène ondulatoire en physique :

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

Pour la résoudre, on cherche y sous la forme :

$$y(x) = \int_{C_0} e^{sx} F(s) ds$$

Donc l'équation devient :

$$\int_{C_0} (s^2 - x) e^{sx} F(s) ds = 0$$

On peut alors intégrer par parties :

$$\int_{C_0} s^2 e^{sx} F(s) ds - [e^{sx} F(s)]_{\partial C_0} + \int_{C_0} e^{sx} F'(s) ds = 0$$

Et en imposant que les termes de bord s'annulent pour que l'onde puisse physiquement

exister, on obtient :

$$s^2 F(s) + F'(s) = 0 \implies F(s) = C e^{-s^3/3}$$

En choisissant la constante de normalisation appropriée et en posant $s = -z$, on obtient l'intégrale d'Airy :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} e^{\frac{z^3}{3} - xz} dz$$

Vérifions la condition pour que le terme au bord s'annule. En posant $z = R e^{i\theta}$, le terme dominant à l'infini est $\Re(z^3) = R^3 \cos(3\theta)$. La condition de convergence $\cos(3\theta) < 0$ définit trois secteurs de validité : $] \pi/6, \pi/2[$, $] 5\pi/6, 7\pi/6[$ et $] -\pi/2, -\pi/6[$. La fonction $\text{Ai}(x)$ est définie par le choix du contour $\mathcal{C}_0$ reliant l'infini du secteur $-\pi/3$ à l'infini du secteur $\pi/3$. On effectue le changement de variable $z = \sqrt{x}w$, avec $dz = \sqrt{x}dw$. L'intégrale devient :

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} e^{x^{3/2} \left(\frac{w^3}{3} - w \right)} dw$$

On pose alors $\lambda = x^{3/2}$ et $\varphi(w) = \frac{w^3}{3} - w$.

Étudions :

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}_0} e^{\lambda \varphi(w)} dw$$

On a :

$$\varphi'(w) = w^2 - 1 = 0 \iff w = \pm 1$$

Le point col pertinent est donc $w_0 = 1$ car $\mathcal{C}_0$ est dans le demi-plan des réels positifs.

On a :

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{3}(1+h)^3 - (1+h) = -\frac{2}{3} + h^2 + \frac{h^3}{3}$$

Le col est donc d'ordre $m = 2$. On a $\varphi(1) = -2/3$ et $\varphi''(1) = 2$ et $\alpha = \arg(\varphi''(1)) = 0$. Les directions des vallées sont données par :

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{pour } k \in \{0, 1\}$$

Ainsi, $\theta_0 = \pi/2$ et $\theta_1 = -\pi/2$.

Posons le chemin $\mathcal{C}$ un nouveau contour homotope à $\mathcal{C}_0$ reliant le secteur à l'infini $-\pi/3$ avec celui de $\pi/3$ défini par $\mathcal{C} = \tilde{\gamma}_1^{-1} \cup \gamma_1^{-1} \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \tilde{\gamma}_3$ où :

- $\tilde{\gamma}_1 : [10(1-i\sqrt{3}), \infty[$ la demi-droite d'angle $-\pi/3$, paramétrée par $w = x(1-i\sqrt{3}) = 2xe^{-i\pi/3}$ avec $x \in [10, +\infty[$.
- $\gamma_1 : [1-i\sqrt{3}, 10(1-i\sqrt{3})]$ le segment d'angle $-\pi/3$, paramétrée par $w = x(1-i\sqrt{3}) = 2xe^{-i\pi/3}$ avec $x \in [1, 10]$.
- $\gamma_2 : [1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}]$ le segment, paramétré par $w = 1+iy$ avec $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
- $\gamma_3 : [1+i\sqrt{3}, 10(1+i\sqrt{3})]$ le segment d'angle $\pi/3$, paramétrée par $w = x(1+i\sqrt{3}) = 2xe^{i\pi/3}$ avec $x \in [1, 10]$.
- $\tilde{\gamma}_3 : [10(1+i\sqrt{3}), \infty[$ la demi-droite d'angle $\pi/3$, paramétrée par $w = x(1+i\sqrt{3}) =$

$2xe^{i\pi/3}$ avec $x \in [10, +\infty[$.

On a : $\Re(\varphi(1)) = -2/3$.

Sur γ_2 , $\varphi(1 + iy) = -\frac{2}{3} - y^2 - i\frac{y^3}{3}$. Donc $\Re(\varphi(w)) < -2/3$ pour tout $y \neq 0$. Et pour $y = \pm\sqrt{3}$, $\Re(\varphi(w)) = -11/3$.

Sur γ_3 , on a :

$$\varphi(x(1 + i\sqrt{3})) = -\frac{8x^3}{3} - x(1 + i\sqrt{3})$$

$$\Re(\varphi(w)) = -\frac{8x^3}{3} - x < -11/3 < -2/3$$

Idem sur γ_1^{-1} . Ainsi, l'inégalité stricte est vérifiée sur $\mathcal{C}$ tout entier.

Sur $\tilde{\gamma}_3$, on a :

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_3} e^{\lambda\varphi(w)} dw \right| \leq 2 \int_{10}^{+\infty} e^{\lambda(-8x^3/3 - x)} dx.$$

Posons :

$$\mu_{10} = \frac{8 \cdot 10^3}{3} + 10 - \frac{2}{3} > 0,$$

On a :

$$\int_{\tilde{\gamma}_3} e^{\lambda\varphi(w)} dw = \mathcal{O}\left(e^{-\lambda(\frac{2}{3} + \mu_{10})}\right).$$

Idem pour $\tilde{\gamma}_1^{-1}$. Le théorème de Perron 2.9 sur $\mathcal{C}_{10} = \gamma_1^{-1} \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ donne alors :

$$I(\lambda)|_{\mathcal{C}_{10}} \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\alpha_0}{\lambda^{1/2}} (e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1})$$

Donc :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\lambda\varphi(1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\alpha_0}{\lambda^{1/2}} (e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1})$$

Or $e^{\lambda\varphi(1)} = e^{-\frac{2}{3}\lambda}$, $e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} = i - (-i) = 2i$ et $\alpha_0 = \frac{1}{2}$. D'où :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{2}{3}\lambda} \sqrt{\pi} \frac{1/2}{\lambda^{1/2}} (2i) = i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda}$$

On obtient finalement :

$$\text{Ai}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \times i \sqrt{\frac{\pi}{x^{3/2}}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

Remarque. En fait, l'intégrale d'Airy fait partie des cas où l'on peut déterminer la courbe de plus grande pente exacte. En effet, l'équation $\Im(\varphi(w)) = \Im(\varphi(1)) = 0$ donne l'hyperbole :

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

La branche droite de cette hyperbole $x \leq 1$ traverse le col $w_0 = 1$ verticalement ($\theta = \pi/2$) et ses asymptotes $Y = \pm\sqrt{3}X$ coïncident à l'infini avec les directions $\pm\pi/3$. En choisissant ce

chemin homotope à $\mathcal{C}_0$, on peut appliquer le théorème de la plus grande pente 2.5 :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(1)e^{\lambda\varphi(1)}e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\varphi''(1)|}} = ie^{-\frac{2}{3}\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Ainsi, on retombe sur le même résultat :

$$\text{Ai}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \times i\sqrt{\frac{\pi}{x^{3/2}}}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

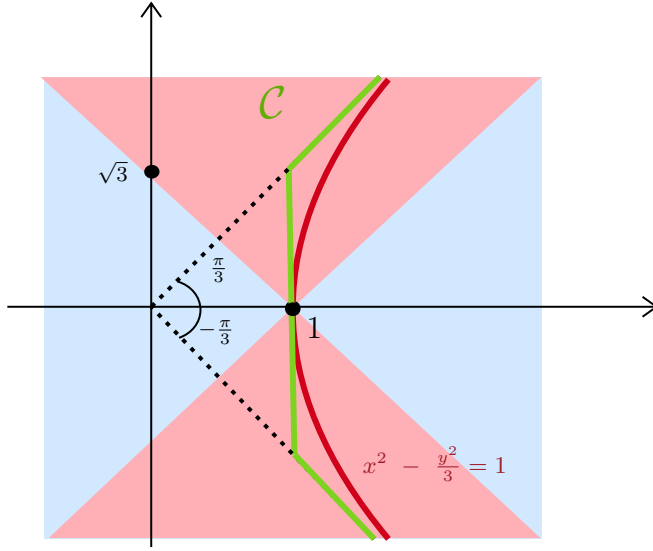


Figure 3 : Représentation de la géométrie et du chemin d'intégration de l'intégrale d'Airy.

3 Méthode du point col en dimension quelconque

Les méthodes développées dans la section précédente fournissent un cadre complet pour l'analyse asymptotique des intégrales d'une variable complexe. Il est naturel de chercher à étendre ces résultats aux intégrales multiples de la forme :

$$I(\lambda) = \int_{\Gamma} f(z_1, \dots, z_N) e^{\lambda\varphi(z_1, \dots, z_N)} dz_1 \cdots dz_N,$$

où f et φ sont holomorphes sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}^N$, et Γ est une variété réelle de dimension N plongée dans $\mathbb{C}^N$.

En une variable, la stratégie reposait sur le fait de déformer le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ en un nouveau chemin $\mathcal{C}'$ homotope, le long duquel $\text{Re}(\varphi(z))$ est strictement maximale au point col z_0 . La transposition de cette stratégie en dimension $N \geq 2$ consisterait alors à déformer Γ en une variété Λ homotope, sur laquelle $\max_{(z_1, \dots, z_N) \in \Lambda} \text{Re}(\varphi(z_1, \dots, z_N))$ est atteint uniquement au point col $(z_1^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$.

Cependant, ce problème de déformation globale se révèle bien plus délicat en dimension $N \geq 2$. Fedoryuk a démontré l'existence d'une telle surface de plus grande pente Λ , mais la preuve étant non constructive et ce type de surface n'étant pas unique, il est très difficile de mettre en œuvre cette méthode en pratique. En particulier, Masayoshi Hata [6] s'est retrouvé bloqué lorsqu'il avait besoin, pour un problème d'approximation en théorie des nombres, d'évaluer

asymptotiquement une intégrale double $N = 2$ de cette forme. Il a alors eu l'idée d'appliquer le théorème de Fubini, puis d'utiliser deux fois successivement la méthode du col classique sur les deux intégrales unidimensionnelles.

C'est précisément cette idée que Pinna et Viola [4] généralisent pour N quelconque dans leur approche. Ils considèrent $I(\lambda)$ comme une intégrale itérée : on évalue successivement les intégrales simples en appliquant à chaque étape la méthode de Perron.

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_N} \int_{\gamma_{N-1}(z_N)} \cdots \int_{\gamma_1(z_2, \dots, z_N)} f(z_1, \dots, z_N) e^{\lambda \varphi(z_1, \dots, z_N)} dz_1 \cdots dz_N$$

3.1 Définitions et résultats préliminaires

Pour pouvoir appliquer la méthode de Perron de manière itérée, il faut imposer un cadre un peu plus rigide qu'en dimension 1. En effet, comme nous le verrons par la suite, on voudra résoudre à chaque étape les équations des points critiques par rapport aux premières variables à l'aide du théorème des fonctions implicites. Cela conduit à introduire une condition de non-annulation du déterminant de certains blocs de la hessienne.

Définition 3.1.

Soit $\varphi \in \mathcal{O}(\Delta)$ où $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ est un ouvert.

On dit que $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) \in \Delta$ est un **point col** de φ si

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z^{(0)}) = 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, N\}.$$

On fixe pour toute la suite les notations suivantes :

— La matrice hessienne de φ en z :

$$\mathcal{H}_\varphi(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}(z) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2}(z) & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_N}(z) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2 \partial z_1}(z) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2}(z) & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2 \partial z_N}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_N \partial z_1}(z) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_N \partial z_2}(z) & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_N^2}(z) \end{pmatrix}.$$

— Le déterminant hessien de φ en z :

$$H_\varphi(z) = \det(\mathcal{H}_\varphi(z)).$$

— Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, le mineur principal d'ordre j de la matrice hessienne :

$$H_\varphi^j(z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}(z) & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_j}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j^2}(z) \end{pmatrix}.$$

Et $H_\varphi^0 = 1$.

Définition 3.2.

Soit $z^{(0)}$ un point col de φ .

On dit que $z^{(0)}$ est **non dégénéré** si

$$H_\varphi(z^{(0)}) \neq 0.$$

Définition 3.3.

Soit $z^{(0)}$ un point col de φ .

On dit que $z^{(0)}$ est **admissible** si

$$H_\varphi^j(z^{(0)}) \neq 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Remarque. La définition d'un point admissible dépend de ses coordonnées.

Remarque. Comme $H_\varphi^N(z^{(0)}) = H_\varphi(z^{(0)})$, tout point col admissible est en particulier non dégénéré.

En fait, l'hypothèse d'être admissible n'est pas plus restrictive que celle d'être non dégénéré.

Proposition 3.4.

Soit $z^{(0)}$ un point col non dégénéré de φ .

Alors il existe un changement de variables linéaire inversible qui transforme $z^{(0)}$ en un point col admissible pour la nouvelle fonction obtenue.

Autrement dit, quitte à changer les coordonnées, un point col non dégénéré peut toujours être rendu admissible.

Démonstration. Comme φ est holomorphe, la matrice $\mathcal{H}_\varphi(z^{(0)})$ est une matrice complexe symétrique. De plus, comme $z^{(0)}$ est non dégénéré, on a

$$\det(\mathcal{H}_\varphi(z^{(0)})) \neq 0.$$

Par le théorème d'Autonne-Takagi, il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que

$$\mathcal{H}_\varphi(z^{(0)}) = UD^tU.$$

Posons

$$A = {}^t(U^{-1}), \quad \tilde{\varphi}(w) = \varphi(Aw), \quad w^{(0)} = A^{-1}z^{(0)}.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial w_j}(w) = \sum_{k=1}^N a_{k,j} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(Aw),$$

où $A = (a_{k,j})_{1 \leq k,j \leq N}$. En particulier,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial w_j}(w^{(0)}) = \sum_{k=1}^N a_{k,j} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(z^{(0)}) = 0,$$

puisque $z^{(0)}$ est un point col de φ . Ainsi, $w^{(0)}$ est un point col de $\tilde{\varphi}$.

De plus, pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial w_i \partial w_j}(w) = \sum_{k,l=1}^N a_{k,i} a_{l,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial z_l}(Aw),$$

d'où

$$\mathcal{H}_{\tilde{\varphi}}(w^{(0)}) = {}^t A \mathcal{H}_{\varphi}(z^{(0)}) A.$$

On obtient alors

$$\mathcal{H}_{\tilde{\varphi}}(w^{(0)}) = {}^t A \mathcal{H}_{\varphi}(z^{(0)}) A = U^{-1} U D {}^t U {}^t (U^{-1}) = D.$$

Comme

$$\det(D) = \det(\mathcal{H}_{\tilde{\varphi}}(w^{(0)})) = \det(A)^2 \det(\mathcal{H}_{\varphi}(z^{(0)})) \neq 0,$$

tous les coefficients diagonaux de D sont non nuls. Écrivons

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$H_{\tilde{\varphi}}^j(w^{(0)}) = d_1 \cdots d_j \neq 0.$$

Ainsi, $w^{(0)}$ est un point col admissible de $\tilde{\varphi}$.

■

Pour appliquer ensuite la méthode de Perron à la chaîne, on va définir une famille de fonctions qui ne dépendent que des variables restantes. Pour ce faire, on applique $N - 1$ fois le théorème des fonctions implicites.

Soit $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$ un point col admissible de φ .

— On fixe $(z_2, \dots, z_N)$, et on étudie l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z_1, z_2, \dots, z_N) = 0.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right) (z^{(0)}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} (z^{(0)}) = H_\varphi^1(z^{(0)}) \neq 0.$$

Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ν_2 de $(z_2^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$ et une fonction holomorphe $Z_{1,1} : \nu_2 \rightarrow \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(Z_{1,1}(z_2, \dots, z_N), z_2, \dots, z_N) = 0, \\ Z_{1,1}(z_2^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = z_1^{(0)}. \end{cases}$$

— On fixe $(z_3, \dots, z_N)$, et on étudie le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z_1, z_2, \dots, z_N) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(z_1, z_2, \dots, z_N) = 0. \end{cases}$$

Le jacobien de ce système par rapport aux variables (z_1, z_2) en $z^{(0)}$ vaut

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}(z^{(0)}) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2}(z^{(0)}) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2 \partial z_1}(z^{(0)}) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2}(z^{(0)}) \end{pmatrix} = H_\varphi^2(z^{(0)}) \neq 0.$$

Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ν_3 de $(z_3^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$ et des fonctions holomorphes $Z_{1,2}, Z_{2,2} : \nu_3 \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(Z_{1,2}(z_3, \dots, z_N), Z_{2,2}(z_3, \dots, z_N), z_3, \dots, z_N) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(Z_{1,2}(z_3, \dots, z_N), Z_{2,2}(z_3, \dots, z_N), z_3, \dots, z_N) = 0, \\ Z_{1,2}(z_3^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = z_1^{(0)}, \\ Z_{2,2}(z_3^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = z_2^{(0)}. \end{cases}$$

— On itère cela. Plus précisément, pour tout $j \in \{1, \dots, N-1\}$, on considère le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z_1, \dots, z_N) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_N) = 0. \end{cases}$$

Son jacobien par rapport aux variables $(z_1, \dots, z_j)$ en $z^{(0)}$ vaut

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}(z^{(0)}) & \dots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_j}(z^{(0)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_1}(z^{(0)}) & \dots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j^2}(z^{(0)}) \end{pmatrix} = H_\varphi^j(z^{(0)}) \neq 0.$$

Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ν_{j+1} de $(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$ et des fonctions holomorphes

$$Z_{1,j}, \dots, Z_{j,j} : \nu_{j+1} \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N) = 0, \\ Z_{1,j}(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = z_1^{(0)}, \\ \vdots \\ Z_{j,j}(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = z_j^{(0)}. \end{cases}$$

De plus, pour $1 \leq k < j < N$, par unicité des fonctions implicites, on a :

$$\begin{cases} Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N) = Z_{1,k}(Z_{k+1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N), \\ \vdots \\ Z_{k,j}(z_{j+1}, \dots, z_N) = Z_{k,k}(Z_{k+1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N). \end{cases}$$

Lemme 3.5.

Pour tous j, k tels que $1 \leq k \leq j < N$, on a :

$$\frac{\partial Z_{k,j}}{\partial z_{j+1}}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{(-1)^{k+j+1} \Delta_{j+1,k}(z_{j+1}, \dots, z_N)}{H_\varphi^j(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N)},$$

où $\Delta_{j+1,k}(z_{j+1}, \dots, z_N)$ est le déterminant obtenu en supprimant la dernière ligne et la k -ième colonne de $H_\varphi^{j+1}(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N)$.

Démonstration. Soient j, k tels que $1 \leq k \leq j < N$, et $(z_{j+1}, \dots, z_N) \in \nu_{j+1}$.

Posons

$$\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N) = (Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N).$$

Par définition, on a pour tout $k \in \{1, \dots, j\}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N)) = 0 \quad \text{sur } \nu_{j+1}.$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial z_{j+1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N)) \right) = 0.$$

On applique la règle de chaîne :

$$\sum_{\ell=1}^j \frac{\partial}{\partial z_\ell} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \right) (\Xi_j) \frac{\partial Z_{\ell,j}}{\partial z_{j+1}} + \frac{\partial}{\partial z_{j+1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \right) (\Xi_j) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\ell=1}^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial z_\ell} (\Xi_j) \frac{\partial Z_{\ell,j}}{\partial z_{j+1}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial z_{j+1}} (\Xi_j) = 0.$$

On obtient donc, pour $k = 1, \dots, j$, le système :

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_\ell} (\Xi_j) \frac{\partial Z_{\ell,j}}{\partial z_{j+1}} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_{j+1}} (\Xi_j), \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_\ell} (\Xi_j) \frac{\partial Z_{\ell,j}}{\partial z_{j+1}} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_{j+1}} (\Xi_j). \end{cases}$$

Écrivons ce système sous forme matricielle

$$A X = -B,$$

où

$$A = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_m \partial z_\ell} (\Xi_j) \right)_{1 \leq m, \ell \leq j}, \quad X = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_{1,j}}{\partial z_{j+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial Z_{j,j}}{\partial z_{j+1}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_{j+1}} (\Xi_j) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_{j+1}} (\Xi_j) \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\det(A) = H_\varphi^j(\Xi_j).$$

On applique la règle de Cramer, pour tout $k \in \{1, \dots, j\}$:

$$X_k = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k-1} & B_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k-1} & B_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,k-1} & B_j & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,j} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$X_k = \frac{(-1)^{k+j+1}}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,j} & B_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,j} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,k-1} & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,j} & B_j \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial Z_{k,j}}{\partial z_{j+1}}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{(-1)^{k+j+1} \Delta_{j+1,k}(z_{j+1}, \dots, z_N)}{H_\varphi^j(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N)}.$$

■

Pour toute la suite, on pose pour $j \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\tilde{\varphi}_j(z_{j+1}, \dots, z_N) = \varphi(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N).$$

Et $\tilde{\varphi}_0 = \varphi$.

Lemme 3.6.

On a pour tout $j \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}^2}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{H_\varphi^{j+1}}{H_\varphi^j}(Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N).$$

Démonstration. Soit $j \in \{1, \dots, N-1\}$, posons :

$$\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N) := (Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), \dots, Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N), z_{j+1}, \dots, z_N).$$

On a :

$$\tilde{\varphi}_j(z_{j+1}, \dots, z_N) = \varphi(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N)).$$

Donc pour $k \in \{j+1, \dots, N\}$, la règle de chaîne donne :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial z_k} = \sum_{m=1}^j \frac{\partial \varphi}{\partial z_m}(\Xi_j) \frac{\partial Z_{m,j}}{\partial z_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\Xi_j).$$

Or :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_m}(\Xi_j) = 0 \quad \text{pour tout } m \in \{1, \dots, j\}.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial z_k}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N)).$$

En particulier, pour $k = j+1$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_{j+1}}(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N)).$$

On applique de nouveau la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}^2} = \sum_{m=1}^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1} \partial z_m}(\Xi_j) \frac{\partial Z_{m,j}}{\partial z_{j+1}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1}^2}(\Xi_j).$$

Or d'après le lemme 3.5, pour tout $m \in \{1, \dots, j\}$, on a :

$$\frac{\partial Z_{m,j}}{\partial z_{j+1}} = \frac{(-1)^{m+j+1} \Delta_{j+1,m}}{H_\varphi^j(\Xi_j)}.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}^2} = \sum_{m=1}^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1} \partial z_m}(\Xi_j) \frac{(-1)^{m+j+1} \Delta_{j+1,m}}{H_\varphi^j(\Xi_j)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1}^2}(\Xi_j).$$

Ainsi :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}^2} = \frac{1}{H_\varphi^j(\Xi_j)} \left(\sum_{m=1}^j (-1)^{m+j+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1} \partial z_m}(\Xi_j) \Delta_{j+1,m} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1}^2}(\Xi_j) H_\varphi^j(\Xi_j) \right).$$

Or, en développant le déterminant $H_\varphi^{j+1}(\Xi_j)$ suivant sa dernière ligne, on obtient :

$$H_\varphi^{j+1}(\Xi_j) = \sum_{m=1}^{j+1} (-1)^{j+1+m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1} \partial z_m}(\Xi_j) \Delta_{j+1,m}.$$

Et comme :

$$\Delta_{j+1,j+1} = H_\varphi^j(\Xi_j),$$

on obtient :

$$H_\varphi^{j+1}(\Xi_j) = \sum_{m=1}^j (-1)^{j+1+m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1} \partial z_m}(\Xi_j) \Delta_{j+1,m} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{j+1}^2}(\Xi_j) H_\varphi^j(\Xi_j).$$

Ainsi, on trouve la formule :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z_{j+1}^2}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{H_\varphi^{j+1}(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N))}{H_\varphi^j(\Xi_j(z_{j+1}, \dots, z_N))}.$$

■

Enfin, de manière analogue à la dimension 1, on aura besoin des angles directionnels caractéristiques.

Définition 3.7.

Écrivons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(z^{(0)}) = \rho_j e^{i\alpha_j} \quad \text{où } \rho_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

On appelle **angles de plus grande pente** associés à la j -ième étape les deux angles :

$$\theta_{j,k} = \frac{\pi - \alpha_j}{2} + k\pi, \quad k \in \{0, 1\}.$$

3.2 Méthode du point col généralisée

Grâce à tous les résultats introduits, on peut enfin généraliser le théorème de Perron passant par un col en dimension N quelconque. Pour cela, on se place dans un contexte qui suppose en particulier que le col est non dégénéré.

Hypothèse 3.8.

Soient f et φ des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}^N$.

Pour $j \in \{1, \dots, N\}$, soit $\gamma_j : \mathbb{C}^{N-j} \rightarrow \mathcal{C}_{pm}^1([0, 1], \mathbb{C})$ un chemin borné de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dépendant continûment de $N - j$ paramètres $(z_{j+1}, \dots, z_N) \in \gamma_{j+1} \times \dots \times \gamma_N$. Soit $\Gamma = \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N \mid z_N \in \gamma_N, z_{N-1} \in \gamma_{N-1}(z_N), \dots, z_1 \in \gamma_1(z_2, \dots, z_N)\}$.

On suppose que :

- La fonction φ admet un point col admissible $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) \in \Delta$.
- On a $f(z^{(0)}) \neq 0$.
- On a $\Gamma \subset \Delta$.
- L'intégrale

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_N} \int_{\gamma_{N-1}(z_N)} \dots \int_{\gamma_1(z_2, \dots, z_N)} f(z_1, \dots, z_N) e^{\lambda \varphi(z_1, \dots, z_N)} dz_1 \dots dz_N$$

est absolument convergente pour tout λ assez grand.

- Les chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, les voisinages ν_j , ainsi que les fonctions f et φ , sont indépendants de λ .
- Le chemin γ_N passe par $z_N^{(0)}$ de vallée en vallée de la fonction $z_N \mapsto \tilde{\varphi}_{N-1}(z_N)$ via la droite d'angle $\theta_{N,k}$, où k est choisi de sorte que l'angle corresponde au sens de γ_N .
- Pour tout $z_N \in \nu_N \cap \gamma_N \setminus \{z_N^{(0)}\}$, on a :

$$\Re(\tilde{\varphi}_{N-1}(z_N)) < \Re(\tilde{\varphi}_{N-1}(z_N^{(0)})) = \Re(\varphi(z^{(0)})).$$

- Pour tout $j \in \{1, \dots, N-1\}$, pour tout $(z_{j+1}, \dots, z_N) \in \nu_{j+1}$ tel que $z_N \in \gamma_N$, $z_{N-1} \in \gamma_{N-1}(z_N)$, $\dots$, $z_{j+1} \in \gamma_{j+1}(z_{j+2}, \dots, z_N)$, le chemin $\gamma_j(z_{j+1}, \dots, z_N)$ passe par $Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N)$ de vallée en vallée de la fonction $z_j \mapsto \tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, \dots, z_N)$ via la droite d'angle $\theta_{j,k}$, où k est choisi de sorte que l'angle corresponde au sens de γ_j .
- Pour tout $j \in \{1, \dots, N-1\}$, pour tout $(z_{j+1}, \dots, z_N) \in \nu_{j+1}$ tel que $z_N \in \gamma_N$, $z_{N-1} \in \gamma_{N-1}(z_N)$, $\dots$, $z_{j+1} \in \gamma_{j+1}(z_{j+2}, \dots, z_N)$, et pour tout $z_j \in \gamma_j(z_{j+1}, \dots, z_N) \cap \nu_j(z_{j+1}, \dots, z_N) \setminus \{Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N)\}$, on a :

$$\Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, \dots, z_N)) < \Re(\tilde{\varphi}_j(z_{j+1}, \dots, z_N)).$$

- Il existe une constante $K_f > 0$ telle que

$$|f(z_1, \dots, z_N)| \leq K_f \quad \text{pour tout } (z_1, \dots, z_N) \in \Gamma.$$

Remarque. Comme le col est non dégénéré ($m = 2$), les vallées sont symétriques par rapport au col, ainsi un seul angle $\theta_{j,k}$ suffit à préciser de quelle vallée le chemin arrive sur le col et vers quelle vallée il repart. La droite d'angle $\theta_{j,k}$ est bissectrice commune de la vallée d'entrée et de sortie.

Comme pour chaque $\theta_{j,k}$ on fait le choix de $k = 0$ ou $k = 1$ en fonction du sens de γ_j , on note θ_j au lieu de $\theta_{j,k}$.

En adaptant certains arguments de la démonstration de Pinna et Viola [4] (chap. 4), on obtient :

Théorème 3.9.

Méthode de Perron passant par un point col non dégénéré généralisé

Sous les hypothèses 3.8, on a l'équivalent asymptotique suivant :

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_N} \int_{\gamma_{N-1}(z_N)} \cdots \int_{\gamma_1(z_2, \dots, z_N)} f(z_1, \dots, z_N) e^{\lambda \varphi(z_1, \dots, z_N)} dz_1 \cdots dz_N$$

$$\underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_N)} f(z^{(0)}) e^{\lambda \varphi(z^{(0)})} \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\lambda^N |H(z^{(0)})|}}$$

Démonstration. Pour $j \in \{1, \dots, N-1\}$, on note

$$w_j = (z_{j+1}, \dots, z_N).$$

On a par la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j}(Z_{j,j}(w_j), w_j) &= \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}(Z_{1,j}(w_j), \dots, Z_{j,j}(w_j), w_j) \frac{\partial Z_{\ell,j-1}}{\partial z_j}(Z_{1,j}(w_j), \dots, Z_{j,j}(w_j), w_j) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(Z_{1,j}(w_j), \dots, Z_{j,j}(w_j), w_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.6, on a localement :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(Z_{j,j}(w_j), w_j) = \frac{H_j}{H_{j-1}}(Z_{1,j}(w_j), \dots, Z_{j,j}(w_j), w_j).$$

Ainsi, avec $w_j^{(0)} = (z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(z_j^{(0)}, w_j^{(0)}) = \frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})} \neq 0.$$

Les déterminants H_j et H_{j-1} ainsi que les fonctions implicites $Z_{k,j}$ étant continus, il existe un voisinage de $w_j^{(0)}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(Z_{j,j}(w_j), w_j) \neq 0.$$

Donc, $Z_{j,j}(w_j)$ est un point col non dégénéré de $z_j \mapsto \tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j)$.

Posons :

$$a_j(w_j) = -\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(Z_{j,j}(w_j), w_j),$$

et

$$a_N = -\tilde{\varphi}_{N-1}''(z_N^{(0)}).$$

Chaque a_j est holomorphe, et vérifie :

$$a_j(w_j^{(0)}) = -\frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})} \neq 0.$$

Pour chaque j , on pose Ω_{j+1} un disque ouvert centré en $(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$, assez petit pour que a_j ne s'y annule pas.

Il existe alors un logarithme défini sur Ω_{j+1} , on pose :

$$Q_j = e^{\log(a_j)/2}, \quad \text{de sorte que} \quad Q_j^2 = a_j.$$

De même pour a_N .

On pose $F_0 = f$. Puis, pour $m \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$F_m(w_m) = \frac{F_{m-1}(Z_{m,m}(w_m), w_m)}{Q_m(w_m)}.$$

Et :

$$F_N = \frac{F_{N-1}(z_N^{(0)})}{Q_N}.$$

Chaque F_m est holomorphe sur Ω_{m+1} , car F_{m-1} , $Z_{m,m}$ et Q_m le sont, et Q_m ne s'annule pas.

Pour $j \in \{1, \dots, N-1\}$, posons :

$$K_{j+1} = \left\{ w_j \in \overline{\Omega}_{j+1} \mid z_N \in \gamma_N, z_{N-1} \in \gamma_{N-1}(z_N), \dots, z_{j+1} \in \gamma_{j+1}(z_{j+2}, \dots, z_N) \right\}.$$

Par continuité des chemins γ_j , les ensembles K_{j+1} sont compacts.

On a au voisinage de $Z_{j,j}(w_j)$:

$$\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j) - \tilde{\varphi}_j(w_j) = -\frac{a_j(w_j)}{2}(z_j - Z_{j,j}(w_j))^2 + O(|z_j - Z_{j,j}(w_j)|^3)$$

Comme les applications $w_j \mapsto Z_{j,j}(w_j)$ sont continues, et que, au voisinage de $Z_{j,j}(w_j)$, les chemins $\gamma_j(w_j)$ restent, pour $w_j \in K_{j+1}$, dans les deux vallées choisies de la phase $z_j \mapsto \tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j)$, alors le terme quadratique a une partie réelle strictement négative, uniformément sur K_{j+1} . Ainsi, il existe des constantes $r_j > 0$ et $c_j > 0$ telles que, pour

tout $w_j \in K_{j+1}$ et tout $z_j \in \gamma_j(w_j) \cap D(Z_{j,j}(w_j), r_j)$, on ait :

$$\Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j) - \tilde{\varphi}_j(w_j)) \leq -c_j |z_j - Z_{j,j}(w_j)|^2.$$

Posons :

$$E_j = \left\{ (z_j, w_j) ; w_j \in K_{j+1}, z_j \in \gamma_j(w_j), |z_j - Z_{j,j}(w_j)| \geq r_j \right\}.$$

La fonction $(z_j, w_j) \mapsto \Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j) - \tilde{\varphi}_j(w_j))$, continue sur le compact E_j , y est strictement négative. Ainsi, elle atteint un maximum < 0 , que l'on note $-\eta_j$.

Donc, il existe, pour chaque j , une constante $\eta_j > 0$ telle que, pour tout $w_j \in K_{j+1}$ et tout $z_j \in \gamma_j(w_j) \setminus D(Z_{j,j}(w_j), r_j)$, on ait :

$$\Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j) - \tilde{\varphi}_j(w_j)) \leq -\eta_j.$$

Pour $m \in \{1, \dots, N\}$, on définit

$$I_m(\lambda, z_{m+1}, \dots, z_N) = \int_{\gamma_m(z_{m+1}, \dots, z_N)} \cdots \int_{\gamma_1(z_2, \dots, z_N)} f(z_1, \dots, z_N) e^{\lambda \varphi(z_1, \dots, z_N)} dz_1 \cdots dz_m,$$

et $I_N(\lambda) = I(\lambda)$.

Montrons par récurrence sur m la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_m)$: pour tout $m \in \{1, \dots, N-1\}$, on a uniformément sur K_{m+1} :

$$I_m(\lambda, z_{m+1}, \dots, z_N) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{m/2} F_m(z_{m+1}, \dots, z_N) e^{\lambda \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, \dots, z_N)} + R_m(\lambda; z_{m+1}, \dots, z_N),$$

où

$$R_m(\lambda; z_{m+1}, \dots, z_N) = O\left(\lambda^{-(m+1)/2} e^{\lambda \Re(\tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, \dots, z_N))} \right).$$

— $m = 1$: Fixons $w_1 = (z_2, \dots, z_N) \in K_2$. On considère l'intégrale à une variable

$$I_1(\lambda; w_1) = \int_{\gamma_1(w_1)} f(z_1, w_1) e^{\lambda \tilde{\varphi}_0(z_1, w_1)} dz_1.$$

La fonction $z_1 \mapsto \tilde{\varphi}_0(z_1, w_1) = \varphi(z_1, w_1)$ a un point col non dégénéré en $Z_{1,1}(w_1)$, les deux branches de $\gamma_1(w_1)$ passent par ce col via les deux vallées avec un angle θ_1 et :

$$\Re \tilde{\varphi}_0(z_1, w_1) < \Re \tilde{\varphi}_1(w_1) \quad \text{pour } z_1 \in \gamma_1(w_1) \setminus \{Z_{1,1}(w_1)\}.$$

Le théorème de Perron passant par un col 2.9 avec $m = 2$ et $S = 1$ donne :

$$I_1(\lambda; w_1) = e^{\lambda \tilde{\varphi}_1(w_1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \alpha_1(w_1) \frac{e^{i\theta_1(w_1)} - e^{i(\theta_1(w_1) - \pi)}}{\lambda^{1/2}} + O\left(\lambda^{-1} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_1(w_1)}\right),$$

uniformément sur K_2 . Et :

$$\alpha_1(w_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\left| \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial z_1^2}(Z_{1,1}(w_1), w_1) \right|} \right)^{1/2} f(Z_{1,1}(w_1), w_1) \left(\frac{\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial z_1^2}(Z_{1,1}(w_1), w_1)}{2} \frac{(z_1 - Z_{1,1}(w_1))^2}{\tilde{\varphi}_0(z_1, w_1) - \tilde{\varphi}_1(w_1)} \right)^{1/2}$$

Mais comme le col est non dégénéré, le coefficient final de $\alpha_1(w_1)$ admet une extension holomorphe au voisinage de $Z_{1,1}(w_1)$ et vaut 1. Donc :

$$I_1(\lambda; w_1) = \sqrt{2\pi} \frac{f(Z_{1,1}(w_1), w_1)}{Q_1(w_1)} \lambda^{-1/2} e^{\lambda \tilde{\varphi}_1(w_1)} + O\left(\lambda^{-1} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_1(w_1)}\right)$$

Ainsi :

$$I_1(\lambda; w_1) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} F_1(w_1) e^{\lambda \tilde{\varphi}_1(w_1)} + O\left(\lambda^{-1} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_1(w_1)}\right),$$

uniformément sur K_2 . Cela prouve $(\mathcal{P}_1)$.

— Supposons que $(\mathcal{P}_m)$ est vraie pour un certain $m \in \{1, \dots, N-2\}$.

Prenons $w_{m+1} = (z_{m+2}, \dots, z_N) \in K_{m+2}$, alors :

$$I_{m+1}(\lambda; w_{m+1}) = \int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} I_m(\lambda; z_{m+1}, w_{m+1}) dz_{m+1}.$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$I_m(\lambda; z_{m+1}, w_{m+1}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{m/2} F_m(z_{m+1}, w_{m+1}) e^{\lambda \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})} + R_m(\lambda; z_{m+1}, w_{m+1}).$$

On obtient donc

$$I_{m+1} = A_{m+1} + B_{m+1},$$

où

$$A_{m+1}(\lambda, w_{m+1}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{m/2} \int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} F_m(z_{m+1}, w_{m+1}) e^{\lambda \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})} dz_{m+1},$$

et

$$B_{m+1}(\lambda, w_{m+1}) = \int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} R_m(\lambda; z_{m+1}, w_{m+1}) dz_{m+1}.$$

La fonction $z_{m+1} \mapsto \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})$ admet un point col en $Z_{m+1,m+1}(w_{m+1})$.

Comme les hypothèses du théorème de Perron passant par un col 2.9 sont satisfaites pour le chemin $\gamma_{m+1}(w_{m+1})$, on obtient de la même façon que pour le cas $m = 1$:

$$A_{m+1}(\lambda, w_{m+1}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{(m+1)/2} F_{m+1}(w_{m+1}) e^{\lambda \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1})} + O\left(\lambda^{-(m+2)/2} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1})}\right).$$

Par l'hypothèse de récurrence on a,

$$|R_m(\lambda; z_{m+1}, w_{m+1})| \leq C_m \lambda^{-(m+1)/2} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})},$$

uniformément, pour une constante $C_m > 0$. Donc

$$|B_{m+1}(\lambda, w_{m+1})| \leq C_m \lambda^{-(m+1)/2} \int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})} |dz_{m+1}|.$$

Comme on dispose d'un contrôle quadratique uniforme dans le disque $D(Z_{m+1, m+1}(w_{m+1}), r_{m+1})$ et d'un gap uniforme $-\eta_{m+1}$ hors de ce disque pour la différence $\Re(\tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1}) - \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1}))$, on a en factorisant :

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})} |dz_{m+1}| \\ & \leq e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1})} \left(\int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1}) \cap D(Z_{m+1, m+1}(w_{m+1}), r_{m+1})} e^{-c_{m+1} \lambda |z_{m+1} - Z_{m+1, m+1}(w_{m+1})|^2} |dz_{m+1}| \right. \\ & \quad \left. + C' e^{-\eta_{m+1} \lambda} \right), \end{aligned}$$

où $C' > 0$ est indépendant de w_{m+1} . La première intégrale est gaussienne, donc un $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$, uniformément en w_{m+1} . On obtient donc :

$$\int_{\gamma_{m+1}(w_{m+1})} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_m(z_{m+1}, w_{m+1})} |dz_{m+1}| = \mathcal{O}\left(\lambda^{-1/2} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1})}\right),$$

uniformément sur K_{m+2} . Ainsi :

$$B_{m+1}(\lambda, w_{m+1}) = \mathcal{O}\left(\lambda^{-(m+2)/2} e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_{m+1}(w_{m+1})}\right).$$

On obtient alors $(\mathcal{P}_{m+1})$.

Appliquons $(\mathcal{P}_{N-1})$, on obtient :

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_N} I_{N-1}(\lambda, z_N) dz_N.$$

On a donc :

$$I(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{(N-1)/2} \int_{\gamma_N} F_{N-1}(z_N) e^{\lambda \Re \tilde{\varphi}_{N-1}(z_N)} dz_N + \int_{\gamma_N} R_{N-1}(\lambda, z_N) dz_N.$$

En majorant de la même façon que dans la récurrence, on obtient :

$$I(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{N/2} F_N e^{\lambda \varphi(z^{(0)})} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-(N+1)/2} e^{\lambda \Re \varphi(z^{(0)})}\right).$$

Par définition récursive des F_m , on a :

$$F_N = f(z^{(0)}) \prod_{j=1}^N \frac{1}{Q_j(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})},$$

Or

$$Q_j(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})^2 = -\frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})}.$$

Donc par le choix du signe :

$$Q_j(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = e^{-i\theta_j} \sqrt{\left| \frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})} \right|}.$$

On en déduit que :

$$F_N = e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_N)} f(z^{(0)}) \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})} \right|}}.$$

Comme $H_0 = 1$ et $H_N = H$, le produit télescopique donne :

$$F_N = e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_N)} \frac{f(z^{(0)})}{\sqrt{|H(z^{(0)})|}}.$$

Et finalement :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_N)} f(z^{(0)}) e^{\lambda \varphi(z^{(0)})} \frac{(2\pi)^{N/2}}{\lambda^{N/2} \sqrt{|H(z^{(0)})|}}$$

■

Remarque. On pourrait obtenir le développement asymptotique complet mais cela nécessiterait beaucoup plus de calculs. Cependant, il est à noter que ce théorème n'est valable que pour un point col non dégénéré. Mais Pinna et Viola expliquent dans leur article que cette méthode d'itération peut théoriquement s'étendre pour un point col d'ordre m quelconque.

3.3 Exemples

On retrouve pour $N = 1$ la méthode de Perron pour un col non dégénéré :

Exemple 3.10.

Plaçons-nous en dimension $N = 1$.

- Le point col $z^{(0)}$ est z_0 .
- $H(z^{(0)}) = \varphi''(z_0)$.

Alors l'équivalent asymptotique du théorème 3.9 donne :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} f(z_0) e^{\lambda \varphi(z_0)} e^{i\theta_1} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(z_0)|}}$$

On retombe exactement sur la formule 2.10.

L'exemple suivant n'a qu'un intérêt pédagogique puisqu'il est possible d'obtenir l'équivalent asymptotique de façon beaucoup plus simple.

Exemple 3.11.

Considérons

$$I(\lambda) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda(x^2+xy+y^2)} dx dy.$$

Prolongeons analytiquement l'intégrande à $\mathbb{C}^2$. Ici, on a $N = 2$, $f(z_1, z_2) = 1$ et $\varphi(z_1, z_2) = i(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)$.

La recherche des points critiques donne :

$$\begin{cases} \partial_{z_1} \varphi(z_1, z_2) = i(2z_1 + z_2) = 0 \\ \partial_{z_2} \varphi(z_1, z_2) = i(z_1 + 2z_2) = 0 \end{cases} \implies z^{(0)} = (0, 0).$$

La matrice hessienne H évaluée au point critique $(0, 0)$ s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} 2i & i \\ i & 2i \end{pmatrix}.$$

Les déterminants des mineurs principaux sont :

- $H_1(0, 0) = 2i \neq 0$,
- $H_2(0, 0) = \det(H) = (2i)^2 - i^2 = -3 \neq 0$.

Le point col $z^{(0)} = (0, 0)$ est donc admissible.

À z_2 fixé, la condition $\partial_{z_1} \varphi(z_1, z_2) = 0$ donne :

$$Z_{1,1}(z_2) = -\frac{z_2}{2}.$$

Alors, on a :

$$\tilde{\varphi}_1(z_2) = \varphi(Z_{1,1}(z_2), z_2) = i \left(\left(-\frac{z_2}{2} \right)^2 + \left(-\frac{z_2}{2} \right) z_2 + z_2^2 \right) = \frac{3i}{4} z_2^2.$$

Notons γ_2 la droite dirigée par l'angle $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Il s'agit de la ligne de plus grande pente passant par l'origine :

$$\tilde{\varphi}_1(te^{i\pi/4}) = \frac{3i}{4}(it^2) = -\frac{3}{4}t^2.$$

Pour $z_2 \in \gamma_2$ fixé, le théorème de Taylor-Young à $\varphi(\cdot, z_2)$ en $Z_{1,1}(z_2)$ est :

$$\varphi(z_1, z_2) = \tilde{\varphi}_1(z_2) + i(z_1 - Z_{1,1}(z_2))^2.$$

Notons $\gamma_1(z_2)$ la famille de droites translatées passant par $-z_2/2$ et d'angle de sortie $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Sur les arcs de cercles de raccordement $Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi/4]$, la contribution tend vers 0 quand $R \rightarrow \pm\infty$. Donc par le théorème intégral de Cauchy :

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1(z_2)} e^{\lambda\varphi(z_1, z_2)} dz_1 dz_2.$$

Posons :

$$\gamma_2^{(10)} = \{te^{i\pi/4} \mid t \in [-10, 10]\} \quad \text{et} \quad \gamma_1^{(10)}(z_2) = \{-z_2/2 + se^{i\pi/4} \mid s \in [-10, 10]\}.$$

Sur les portions restantes $\gamma_2 \setminus \gamma_2^{(10)}$ et $\gamma_1(z_2) \setminus \gamma_1^{(10)}(z_2)$, on a $|t| \geq 10$, donc $\Re(\tilde{\varphi}_1(z_2)) \leq -\frac{3}{4}(100) = -75$. La contribution de cette queue d'intégrale est dominée par $\mathcal{O}(e^{-75\lambda})$.

Ainsi :

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_2^{(10)}} \int_{\gamma_1^{(10)}(z_2)} e^{\lambda\varphi(z_1, z_2)} dz_1 dz_2 + \mathcal{O}(e^{-75\lambda}).$$

Comme :

- $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = i$.
- $f(0, 0) = 1$ et $\varphi(0, 0) = 0$.
- $|H(0, 0)| = 3$.

La méthode de Perron passant par un point col non dégénéré généralisé 3.9 donne alors :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} i \cdot 1 \cdot e^0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{2}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2i\pi}{\lambda\sqrt{3}}$$

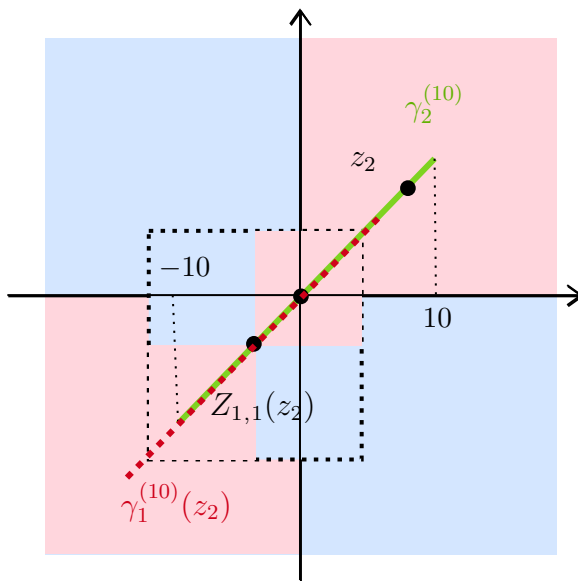


Figure 4 : Représentation de la géométrie des 2 points cols et de leurs chemins d'intégrations.

Remarque. Vérifions le résultat trouvé avec un calcul direct. On écrit $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$

sous forme matricielle :

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$, où $D = \text{Diag}(3/2, 1/2)$.

Effectuons le changement de variables $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$I(\lambda) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2)} du dv.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient :

$$I(\lambda) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{3\lambda}{2}u^2} du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\lambda}{2}v^2} dv \right).$$

Or l'intégrale de Fresnel pour un paramètre $a > 0$ vaut :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iat^2} dt = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}.$$

On obtient alors :

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{i\pi}{\frac{3\lambda}{2}}} \times \sqrt{\frac{i\pi}{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{i\pi}{\sqrt{\frac{3\lambda^2}{4}}} = \frac{2i\pi}{\lambda\sqrt{3}}.$$

Traisons maintenant la généralisation du problème des intégrales d'Airy [2.14](#).

Exemple 3.12.

On considère, pour $\lambda > 0$, l'intégrale

$$I(\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^N \int_{\mathcal{A}} \cdots \int_{\mathcal{A}} \exp(\lambda \varphi(z_1, \dots, z_N)) dz_1 \cdots dz_N,$$

où $\varphi(z_1, \dots, z_N) = \sum_{j=1}^N z_j + \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} z_k z_\ell - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N z_j^3$, et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \cup \mathcal{A}_+$ désigne un contour d'Airy asymétrique composé de deux branches : $\mathcal{A}_- = \{re^{-2\pi i/3} \mid r \geq 0\}$, et $\mathcal{A}_+ := \{r \mid r \geq 0\}$.

Posons

$$f(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N}.$$

Les fonctions f et φ sont holomorphes sur $\Delta = \mathbb{C}^N$.

Les équations critiques sont :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_N) = 1 + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^N z_\ell - z_j^2 = 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N.$$

Par symétrie des équations, on cherche une solution de la forme $z_1 = \dots = z_N = \eta$. On obtient :

$$1 + (N - 1)\eta - \eta^2 = 0.$$

Puisque notre contour $\mathcal{A}$ contient l'axe réel positif, on sélectionne le point col positif :

$$\eta = \frac{N - 1 + \sqrt{(N - 1)^2 + 4}}{2} = \frac{N - 1 + \sqrt{N^2 - 2N + 5}}{2}.$$

On pose alors le point critique :

$$z^{(0)} = (\eta, \dots, \eta).$$

La matrice hessienne de φ est :

$$\mathcal{H}_\varphi(z) = \begin{pmatrix} -2z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2z_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -2z_N \end{pmatrix}.$$

Donc les mineurs principaux d'ordre j en $z^{(0)}$ valent :

$$H_j(z^{(0)}) = \det \begin{pmatrix} -2\eta & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2\eta & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -2\eta \end{pmatrix}_{j \times j} = \det((-2\eta - 1)I_j + J_j)$$

où J_j est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Le spectre de J_j étant composé de la valeur propre j (multiplicité 1) et de la valeur propre 0 (multiplicité $j - 1$), le spectre de notre matrice est :

$$-2\eta - 1 \quad (\text{de multiplicité } j - 1), \quad \text{et} \quad j - 2\eta - 1 \quad (\text{de multiplicité } 1).$$

D'où :

$$H_j(z^{(0)}) = (-2\eta - 1)^{j-1}(j - 2\eta - 1) = (-1)^j(2\eta + 1)^{j-1}(2\eta - j + 1).$$

Comme $2\eta - j + 1 \geq 2\eta - N + 1 = \sqrt{N^2 - 2N + 5} > 0$, on en déduit que :

$$H_j(z^{(0)}) \neq 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Le point col $z^{(0)}$ est donc bien admissible.

Fixons $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ et $(z_{j+1}, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-j}$ des paramètres.

Considérons les équations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} = 0,$$

Par symétrie, la solution locale unique par rapport à $(z_1, \dots, z_j)$ vérifie $z_1 = \dots = z_j = u_j$.

Donc on obtient :

$$1 + (j-1)u_j + z_{j+1} + \dots + z_N - u_j^2 = 0,$$

soit :

$$u_j^2 - (j-1)u_j - (1 + z_{j+1} + \dots + z_N) = 0.$$

Au voisinage de $(z_{j+1}^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = (\eta, \dots, \eta)$, on choisit la racine positive car il faut que $u_j(\eta, \dots, \eta) = \eta$. Donc :

$$u_j(z_{j+1}, \dots, z_N) = \frac{j-1 + \sqrt{(j-1)^2 + 4(1 + z_{j+1} + \dots + z_N)}}{2}.$$

Ainsi :

$$Z_{1,j}(z_{j+1}, \dots, z_N) = \dots = Z_{j,j}(z_{j+1}, \dots, z_N) = u_j(z_{j+1}, \dots, z_N).$$

D'après le Lemme 3.6, on a :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(z_j^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = \frac{H_j(z^{(0)})}{H_{j-1}(z^{(0)})}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{j-1}}{\partial z_j^2}(z_j^{(0)}, \dots, z_N^{(0)}) = -(2\eta + 1) \frac{2\eta - j + 1}{2\eta - j + 2}.$$

Puisque $\eta > 0$ et $(2\eta - j + 1) > 0$, ce quotient est un réel strictement négatif. Son argument α_j est donc égal à π . Ainsi, l'angle de la ligne de plus grande pente est :

$$\theta_j = \frac{\pi - \pi}{2} + k\pi = k\pi.$$

Pour respecter l'orientation du contour d'Airy (qui va de la gauche vers la droite), on choisit $k = 0$, d'où :

$$\theta_1 = \dots = \theta_N = 0.$$

On pose $\gamma_N = \mathcal{A}$.

Fixons maintenant $j \in \{1, \dots, N-1\}$ et notons $w_j = (z_{j+1}, \dots, z_N)$.

L'ensemble des points strictement plus bas que le col mobile $Z_{j,j}(w_j)$ est :

$$V_j(z') = \left\{ z_j \in \mathbb{C} \mid \Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j)) < \Re(\tilde{\varphi}_j(w_j)) \right\}.$$

Puisque le col est non dégénéré, $V_j(w_j)$ possède localement deux composantes connexes, les vallées $V_j^-(w_j)$ (partie gauche) et $V_j^+(w_j)$ (partie droite). Globalement, le comportement de la phase quand $|z_j| \rightarrow \infty$ est dominé par $-\frac{1}{3}z_j^3$. Donc, les vallées locales s'étendent vers les secteurs asymptotiques $(0, 2\pi/3, -2\pi/3)$.

Ainsi, $V_j^-(w_j)$ rencontre asymptotiquement la demi-droite $\{te^{-2\pi i/3} \mid t \geq R_j^-\} \subset \mathcal{A}_-$, et $V_j^+(w_j)$ la demi-droite réelle $[R_j^+, +\infty[\subset \mathcal{A}_+$, pour des rayons $R_j^+, R_j^- > 0$ assez grands. Posons deux arcs de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : $\sigma_j^-(w_j) \subset V_j^-(w_j)$ et $\sigma_j^+(w_j) \subset V_j^+(w_j)$ qui joignent respectivement $R_j^- e^{-2\pi i/3}$ au col mobile $Z_{j,j}(w_j)$, puis ce même col $Z_{j,j}(w_j)$ au point réel R_j^+ .

On définit enfin notre chemin continu infini par :

$$\gamma_j^{(\infty)}(w_j) = \{re^{-2\pi i/3} \mid r \geq R_j^-\} \cup \sigma_j^-(w_j) \cup \sigma_j^+(w_j) \cup \{r \mid r \geq R_j^+\}.$$

Par construction, ce chemin passe par le col de vallée en vallée, et :

$$\Re(\tilde{\varphi}_{j-1}(z_j, w_j)) < \Re(\tilde{\varphi}_j(w_j)) \quad \text{pour tout } z_j \in \gamma_j^{(\infty)}(w_j) \setminus \{Z_{j,j}(w_j)\}.$$

La fonction intégrande étant entière, et la contribution des morceaux asymptotiques du chemin étant nulle, le théorème de Cauchy assure que l'intégrale sur $\gamma_j^{(\infty)}(w_j)$ est égale à l'intégrale sur $\mathcal{A}$.

On tronque ces chemins infinis à un grand rayon R . Sur les branches infinies au-delà de ce rayon, le terme de degré 3 de la phase domine. Ainsi, pour R suffisamment grand, la partie réelle sur ces queues d'intégration décroît au moins comme $-\frac{1}{4}r^3$. Les queues d'intégrale sont donc dominées par $\mathcal{O}(e^{-\frac{\lambda}{4}R^3})$. On réduit donc l'étude asymptotique aux chemins tronqués finis $\gamma_j(w_j) = \gamma_j^{(\infty)}(w_j) \cap D(Z_{j,j}(w_j), R)$.

On peut alors appliquer le Théorème 3.9, et l'on obtient :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \cdot \frac{1}{(2\pi i)^N} e^{\lambda \varphi(z^{(0)})} \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\lambda^N |H(z^{(0)})|}}.$$

Or $H_N(z^{(0)}) = (-1)^N (2\eta + 1)^{N-1} (2\eta - N + 1)$ donc $|H(z^{(0)})| = (2\eta + 1)^{N-1} (2\eta - N + 1)$.

On obtient finalement l'équivalent asymptotique :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-i)^N e^{\lambda \varphi(\eta, \dots, \eta)}}{\sqrt{(2\eta + 1)^{N-1} (2\eta - N + 1) (2\pi)^N \lambda^N}}.$$

Où la phase critique se simplifie en :

$$\varphi(\eta, \dots, \eta) = N\eta + \frac{N(N-1)}{2}\eta^2 - \frac{N}{3}\eta^3.$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-i)^N \exp\left[\frac{\lambda N}{12} \left((N-1)(N^2 - 2N + 7) + (N^2 - 2N + 5)^{3/2}\right)\right]}{(2\pi\lambda)^{N/2} \left(N + \sqrt{N^2 - 2N + 5}\right)^{\frac{N-1}{2}} (N^2 - 2N + 5)^{\frac{1}{4}}}.$$

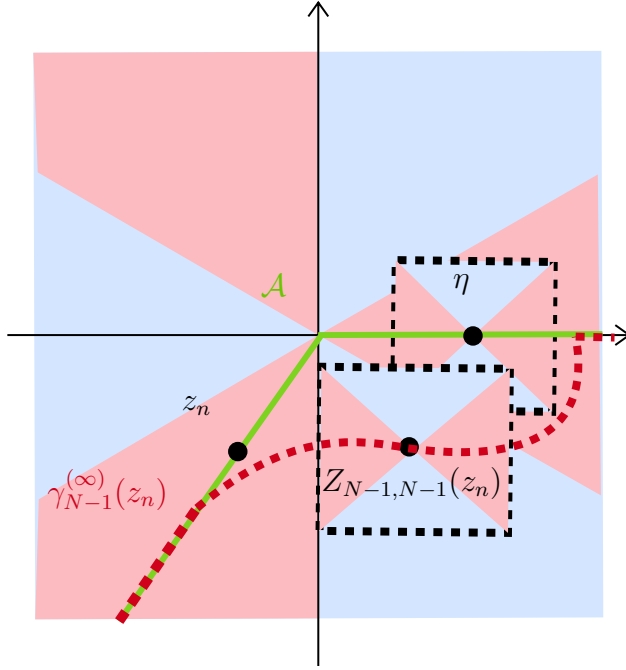


Figure 5 : Représentation de la géométrie des 2 premiers points cols et de leurs chemins d'intégrations.

Remarque. Dans l'exemple 2.14, nous avons posé la phase $\psi(w) = \frac{w^3}{3} - w$. Au point col $w_0 = 1$, la phase valait $\psi(1) = -2/3$ et $\theta = \pi/2$ donc $e^{i\theta} = i$. On trouvait sans normalisation :

$$\int_{\mathcal{C}} e^{\lambda \left(\frac{w^3}{3} - w \right)} dw \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda}.$$

Dans notre cas, $N = 1$, la définition de l'intégrale $I(\lambda)$ englobe le facteur de normalisation $\frac{1}{2\pi i}$, et la phase choisie est l'opposée : $\varphi(z_1) = z_1 - \frac{z_1^3}{3}$. Au col $\eta = 1$, on a $\varphi(1) = +2/3$. De plus, $\theta = 0$, d'où le facteur angulaire $e^{i\theta} = 1$.

La formule issue du Théorème 3.9 en dimension $N = 1$ s'écrit alors :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(1)|}} e^{\frac{2}{3}\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{2}{3}\lambda}.$$

Ces deux approches, issues de choix de conventions opposés, sont ainsi cohérentes.

4 La conjecture du volume pour le nœud 5_2

L'objectif de cette section est de prouver la conjecture du volume dans le cas particulier du nœud 5_2 . Précisément, on veut montrer que :

$$\frac{2\pi}{N} \ln |\langle 5_2 \rangle_N| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2)$$

Pour ce faire, on utilisera la méthode du point col.

4.1 Notions et résultats indispensables

Dans cette section, nous introduisons le cadre théorique nécessaire à la compréhension de la conjecture du volume.

4.1.1 Éléments de théorie des nœuds

Définition 4.1.

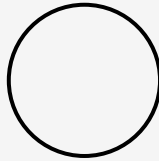
On appelle **nœud** l'image d'une application $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, injective, et dont la différentielle ne s'annule pas.

Concrètement, un nœud est une courbe fermée dans l'espace à trois dimensions, qui ne s'auto-intersecte jamais.

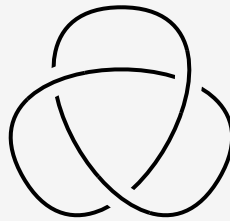
Remarque. Puisqu'il est difficile de visualiser directement un objet unidimensionnel dans un espace de dimension 3, on préfère représenter et manipuler la projection des nœuds sur un plan. Mais pour ne perdre aucune information topologique, on privilégie une projection dite **régulière** qui possède entre autres un nombre fini de croisements dont on indique l'information de profondeur en spécifiant quel brin est au-dessus de l'autre. De tels dessins sont appelés **diagrammes de nœuds**, mais on assimilera par abus de langage un nœud à son diagramme pour la suite.

Exemple 4.2.

- Le nœud le plus simple possible, appelé **nœud trivial**, est une simple boucle :



- Le deuxième nœud le plus simple, appelé **nœud de trèfle**, est constitué de 3 croisements :



L'objectif central de cette théorie n'est pas l'étude analytique des nœuds en eux-mêmes, mais la classification des nœuds à déformation continue près.

Définition 4.3.

On dit que deux nœuds K_1 et K_2 sont **équivalents** s'il existe une application continue H définie par :

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ (t, x) & \longmapsto & H_t(x) \end{cases}$$

vérifiant :

- Pour tout $t \in [0, 1]$, H_t est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^3$.
- $H_0 = \text{Id}_{\mathbb{S}^3}$.
- $H_1(K_1) = K_2$.

Une telle application est appelée **isotopie ambiante**.

Remarque. Il est à noter qu'on exige une telle fonction et non une simple homotopie, puisqu'on souhaite que la déformation n'autorise pas le nœud à se traverser lui-même. De plus, on demande que H_t soit un homéomorphisme de l'espace tout entier $\mathbb{S}^3$ (et non juste une déformation du nœud lui-même) pour empêcher de « serrer » un nœud continûment jusqu'à le faire disparaître.

Afin de distinguer les classes d'équivalence de nœuds, on introduit un outil fondamental :

Définition 4.4.

On appelle **invariant de nœud** une application $\mathcal{I}$ définie sur l'ensemble des nœuds à valeurs dans un ensemble donné (comme des entiers, des polynômes, des groupes, etc.), telle que si K_1 et K_2 sont équivalents, alors $\mathcal{I}(K_1) = \mathcal{I}(K_2)$.

Remarque. En pratique, on s'intéresse surtout à la contraposée de cette définition : si $\mathcal{I}(K_1) \neq \mathcal{I}(K_2)$, alors K_1 et K_2 ne sont pas équivalents.

Plutôt que d'étudier directement les nœuds comme des courbes isolées, on s'intéresse à son complémentaire.

Définition 4.5.

Soit $K \subset \mathbb{S}^3$ un nœud.

Considérons un « tube » (voisinage tubulaire ouvert) $\mathcal{N}(K)$ autour du nœud.

On appelle **complémentaire** du nœud K , noté M_K , la variété topologique compacte de dimension 3 définie par :

$$M_K = \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{N}(K)$$

Le théorème fondamental suivant, que nous admettrons, justifie pourquoi on se concentre sur l'étude des complémentaires pour comprendre les nœuds.

Théorème 4.6.

Soient K_1 et K_2 deux nœuds.

Les nœuds K_1 et K_2 sont équivalents si et seulement si leurs complémentaires M_{K_1} et M_{K_2} sont homéomorphes.

L'article d'Ohtsuki [5] focalise toute son attention sur l'analyse asymptotique d'un nœud spécifique.

Définition 4.7.

Dans la classification standard, il n'existe que deux nœuds admettant exactement 5 croisements. On s'intéresse à l'un de ces deux nœuds, appelé **nœud 5_2** , qu'on peut représenter :

**4.1.2 Géométrie hyperbolique et volume du complémentaire****Définition 4.8.**

On dit qu'un nœud K est **hyperbolique** si l'intérieur de son complémentaire $\mathring{M}_K \cong \mathbb{S}^3 \setminus K$ peut être muni d'une distance hyperbolique (l'espace est partout « courbé » de manière négative, comme la forme d'une selle de cheval), et que son volume est fini.

L'avantage majeur de cette géométrie particulière est qu'elle est extrêmement rigide.

Théorème 4.9.

Si le complémentaire d'un nœud admet une structure géométrique hyperbolique de volume fini, alors cette structure est unique.

Ainsi, par cette unicité, le volume hyperbolique d'un complémentaire de nœud est un invariant de nœud.

Afin de calculer ce volume, on décompose l'espace complémentaire en blocs géométriques qui s'emboîtent convenablement et dont on connaît le volume. Ce sont les **tétraèdres idéaux**.

Proposition 4.10.

Le volume hyperbolique d'un tétraèdre idéal caractérisé par le paramètre complexe z est :

$$\text{Vol}(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z)) + \arg(1 - z) \ln |z|$$

où $\text{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est la fonction **dilogarithme**.

Exemple 4.11.

Pour le nœud 5_2 , la triangulation de son complémentaire $\mathbb{S}^3 \setminus 5_2$ requiert 4 tétraèdres idéaux.

Les conditions de recollement de ces tétraèdres imposent des équations qui permettent de les décrire avec seulement 2 paramètres x et y (au lieu de 4) :

$$z_1 = 1 - y_0, \quad z_2 = x_0, \quad z_3 = x_0 y_0, \quad z_4 = \frac{y_0}{x_0}$$

De plus, ces deux paramètres doivent vérifier :

$$\begin{cases} 1 - x_0 - x_0 y_0 + x_0^2 = 1 - y_0 \\ 1 - y_0^2 = x_0 y_0^2 \\ \Im y_0 > 0 \end{cases}$$

Ainsi, y_0 est l'unique solution de :

$$(y_0 - 1)^3 = y_0 \quad \text{telle que} \quad \Im(y_0) > 0$$

Et :

$$x_0 = 1 - \frac{1}{y_0}$$

De cette façon, on a :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2) &= \text{Im}(\text{Li}_2(1 - y_0)) + \text{Im}(\text{Li}_2(x_0)) + \text{Im}(\text{Li}_2(x_0 y_0)) + \text{Im} \left(\text{Li}_2 \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \right) \\ &+ \arg(y_0) \ln |1 - y_0| + \arg(1 - x_0) \ln |x_0| + \arg(1 - x_0 y_0) \ln |x_0 y_0| + \arg \left(1 - \frac{y_0}{x_0} \right) \ln \left| \frac{y_0}{x_0} \right| \end{aligned}$$

Après moult calculs, on obtient :

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2) = \text{Im} \left(\text{Li}_2(x_0 y_0) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{x_0 y_0} \right) + \text{Li}_2(y_0) - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_0} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{x_0} \right) \right)$$

4.1.3 Invariant de Kashaev et conjecture du volume

Le physicien R. Kashaev a introduit en 1997 un invariant analytique des nœuds, noté $\langle K \rangle_N$, qui dépend d'un entier $N \geq 2$. Sa construction repose sur un modèle de mécanique statistique appliqué au diagramme du nœud.

Soit $N \geq 2$ un entier. On pose pour toute la suite :

$$q = \exp \left(\frac{2\pi i}{N} \right)$$

Définition 4.12.

On appelle q -symbole de Pochhammer le produit :

$$(q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k)$$

avec $(q)_0 = 1$.

Pour un nœud K donné, on considère l'un de ses diagrammes que l'on pondère de la façon suivante :

- On associe à chaque arc (la portion de fil entre deux coupures) une variable entière, appelée **état**, comprise entre 0 et $N - 1$. On appelle **configuration** la donnée d'un état pour tous les arcs de K .
- À chaque croisement, on associe un **poids** complexe W . Ce poids s'exprime sous la forme de fractions de q -symboles de Pochhammer, et sa valeur dépend du signe du croisement (quel brin passe au-dessus) ainsi que des quatre états des arcs qui s'y rencontrent.

Définition 4.13.

On appelle **invariant de Kashaev**, noté $\langle K \rangle_N$, l'invariant de nœud défini par la somme sur toutes les configurations possibles :

$$\langle K \rangle_N = \sum_{\text{configurations}} \left(\prod_{\text{croisements}} W(\text{états et signe du croisement}) \right)$$

En particulier, pour le nœud 5_2 , Ohtsuki a déterminé une formule explicite de cet invariant via les symboles de Pochhammer.

Proposition 4.14.

On a :

$$\langle 5_2 \rangle_N = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N}} N^3 q \frac{1}{(q)_{N-i-j-1} (q)_{i+j} (q)_j (\bar{q})_i (\bar{q})_j}$$

où $\bar{q} = q^{-1}$ est le complexe conjugué de q .

| **Démonstration.** Voir la section 2 de l'article d'Ohtsuki [5].

■

Lorsque $N \rightarrow \infty$, les termes $(q)_n$ peuvent être approximés par des exponentielles faisant intervenir la fonction dilogarithme Li_2 . Cette observation analytique a poussé Kashaev à formuler une conjecture.

Conjecture 4.15.

Conjecture du Volume

Soit K un nœud hyperbolique. On a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \ln |\langle K \rangle_N| = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$$

Remarque. L'intérêt majeur de cette conjecture réside dans le fait que l'invariant de Kashaev est intimement lié à une grande famille d'invariants de nœuds (les polynômes colorés de Jones)

qui n'ont, de prime abord, absolument aucun lien avec la géométrie hyperbolique.

4.2 Le développement asymptotique de $\langle K \rangle_N$

Définition 4.16.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \operatorname{Re}(t) \leq 1$, on définit la **fonction de Faddeev**, notée $\Lambda(t)$, par :

$$\Lambda(t) = \int_C \frac{e^{(2t-1)x}}{4x \sinh(x) \sinh(x/N)} dx$$

où C est le contour sur $\mathbb{R}$ parcouru de $-\infty$ vers $+\infty$ et déformé pour éviter le pôle $x = 0$, c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \epsilon\} \cup \{\epsilon e^{i\theta} \mid \pi \geq \theta \geq 0\}$.

Cette fonction encode les q -symboles de Pochhammer.

Lemme 4.17.

Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(q)_n = \exp \left(\Lambda \left(\frac{2n+1}{2N} \right) - \Lambda \left(\frac{1}{2N} \right) \right)$$

Démonstration. On a :

$$\Delta\Lambda = \Lambda \left(\frac{2n+1}{2N} \right) - \Lambda \left(\frac{1}{2N} \right) = \int_C \frac{e^{(\frac{2n+1}{N}-1)x} - e^{(\frac{1}{N}-1)x}}{4x \sinh(x) \sinh(x/N)} dx$$

Comme :

$$e^{(\frac{2n+1}{N}-1)x} - e^{(\frac{1}{N}-1)x} = e^{-x} \left(e^{(2n+1)x/N} - e^{x/N} \right) = e^{-x} e^{x/N} \left(e^{2nx/N} - 1 \right)$$

Alors :

$$\frac{e^{(\frac{2n+1}{N}-1)x} - e^{(\frac{1}{N}-1)x}}{\sinh(x/N)} = \frac{2e^{x/N} (e^{2nx/N} - 1)}{e^{x/N} - e^{-x/N}} = \frac{2(e^{2nx/N} - 1)}{1 - e^{-2x/N}} = 2 \sum_{j=1}^n e^{2jx/N}$$

Donc :

$$\Delta\Lambda = \sum_{j=1}^n \int_C \frac{e^{-x} \cdot 2e^{2jx/N}}{4x \sinh(x)} dx = \sum_{j=1}^n \int_C \frac{e^{(2j/N-1)x}}{2x \sinh(x)} dx$$

Posons $\alpha_j = \frac{2j}{N} - 1$ et $f_j(x) = \frac{e^{\alpha_j x}}{2x \sinh(x)}$.

Puisque $1 \leq j \leq n < N$, on a $-1 < \alpha_j < 1$, et on a $\Delta\Lambda = \sum_{j=1}^n \int_C f_j(x) dx$.

Posons enfin $\Gamma_R = (C \cap \mathbb{D}(0, R)) \cup \gamma_R$, où γ_R est le demi-cercle supérieur de rayon R .

Les seuls pôles encerclés par Γ_R sont les zéros stricts de $\sinh(x)$ dans le demi-plan supérieur, à savoir $x_k = k\pi i$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Tous ces pôles étant simples, on peut utiliser la technique de la dérivée du dénominateur :

Soit $D(x) = 2x \sinh(x)$, on a : $D'(x_k) = 2 \sinh(k\pi i) + 2(k\pi i) \cosh(k\pi i) = 0 + 2k\pi i(-1)^k$

et $e^{\alpha_j x_k} = \exp\left(\left(\frac{2j}{N} - 1\right) k\pi i\right) = \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) \exp(-k\pi i) = q^{jk}(-1)^k$.

Le contour Γ_R étant parcouru dans le sens horaire, le théorème des résidus donne :

$$\int_{\Gamma_R} f_j(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{x=k\pi i} f_j(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^j)^k}{k}$$

En paramétrant γ_R et en majorant l'intégrale, on obtient : $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f_j(x) dx = 0$. Donc en faisant tendre $R \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\int_C f_j(x) dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^j)^k}{k}$$

On reconnaît le développement de Taylor usuel $\ln(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, évalué en $z = q^j$.

$$\int_C f_j(x) dx = \ln(1 - q^j)$$

Finalement, on a :

$$\Delta\Lambda = \sum_{j=1}^n \ln(1 - q^j) = \ln \prod_{j=1}^n (1 - q^j) = \ln((q)_n)$$

Et donc :

$$(q)_n = \exp\left(\Lambda\left(\frac{2n+1}{2N}\right) - \Lambda\left(\frac{1}{2N}\right)\right)$$

■

Posons

$$\delta = \frac{1}{2N}, \quad t = \frac{2i+1}{2N}, \quad s = \frac{2j+1}{2N}.$$

Et :

$$\tilde{V}_N(t, s) = \frac{1}{N} \left(\Lambda\left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + \Lambda\left(1-t-s+\frac{1}{2N}\right) + \Lambda(s) - \Lambda(1-s) + \Lambda(1-t) - 3\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + 2\Lambda\left(1-\frac{1}{2N}\right) \right).$$

On peut alors réécrire l'invariant de Kashaev.

Proposition 4.18.

On a

$$\langle 5_2 \rangle_N = N^{1/2} q \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N}} \exp(NV_N(t, s)),$$

où

$$V_N(t, s) = \tilde{V}_N(t, s) + \frac{5}{2N} \log N,$$

Démonstration. Par la proposition 4.14, on a :

$$\langle 5_2 \rangle_N = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N}} N^3 q \frac{1}{(q)_{i+j}(q)_{N-i-j-1}(q)_j(\bar{q})_j(\bar{q})_i}.$$

Par le lemme 4.17 :

$$(q)_m = \exp\left(\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(\frac{2m+1}{2N}\right)\right) = \exp(\Lambda(\delta) - \Lambda(\frac{2m+1}{2N})).$$

Donc

$$\frac{1}{(q)_m} = \exp(\Lambda(\frac{2m+1}{2N}) - \Lambda(\delta)).$$

D'autre part, comme $\bar{q} = q^{-1}$ et $q^N = 1$:

$$(\bar{q})_m = \prod_{k=1}^m (1 - q^{-k}) = \prod_{k=1}^m (1 - q^{N-k}) = \frac{(q)_{N-1}}{(q)_{N-1-m}}.$$

Par conséquent :

$$(\bar{q})_m = \exp\left(\Lambda\left(1 - \frac{2m+1}{2N}\right) - \Lambda(1 - \delta)\right),$$

Et donc :

$$\frac{1}{(\bar{q})_m} = \exp\left(\Lambda(1 - \delta) - \Lambda\left(1 - \frac{2m+1}{2N}\right)\right).$$

Comme :

$$\frac{2(i+j)+1}{2N} = t + s - \delta,$$

On a :

$$\frac{1}{(q)_{i+j}} = \exp(\Lambda(t + s - \delta) - \Lambda(\delta)).$$

Comme :

$$\frac{2(N-i-j-1)+1}{2N} = 1 - \frac{2(i+j)+1}{2N} = 1 - t - s + \delta,$$

on a

$$\frac{1}{(q)_{N-i-j-1}} = \exp(\Lambda(1 - t - s + \delta) - \Lambda(\delta)).$$

De même :

$$\frac{1}{(q)_j} = \exp(\Lambda(s) - \Lambda(\delta)).$$

Enfin :

$$\frac{1}{(\bar{q})_j} = \exp(\Lambda(1 - \delta) - \Lambda(1 - s)), \quad \frac{1}{(\bar{q})_i} = \exp(\Lambda(1 - \delta) - \Lambda(1 - t)).$$

En multipliant ces cinq termes, on obtient :

$$N^3 q \frac{1}{(q)_{i+j}(q)_{N-i-j-1}(q)_j(\bar{q})_i} = N^3 q \exp\left(\Lambda(t+s-\delta) + \Lambda(1-t-s+\delta) + \Lambda(s) - \Lambda(1-s) - \Lambda(1-t) - 3\Lambda(\delta) + 2\Lambda(1-\delta)\right).$$

Donc :

$$\langle 5_2 \rangle_N = N^3 q \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N}} \exp(N\tilde{V}_N(t, s)).$$

Par définition de V_N :

$$V_N(t, s) = \tilde{V}_N(t, s) + \frac{5}{2N} \log N,$$

Donc :

$$N\tilde{V}_N(t, s) = NV_N(t, s) - \frac{5}{2} \log N.$$

Ainsi

$$\exp(N\tilde{V}_N(t, s)) = N^{-5/2} \exp(NV_N(t, s)).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle 5_2 \rangle_N &= N^3 q \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N}} N^{-5/2} \exp(NV_N(t, s)) \\ &= N^{1/2} q \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N}} \exp(NV_N(t, s)). \end{aligned}$$

■

On veut comprendre le comportement asymptotique de V_N , on étudie donc celui de Λ .

Lemme 4.19.

Soit $K \subset \{0 < \Re z < 1\}$ un compact, on a :

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\Lambda(z)}{N} - \frac{1}{2\pi i} \text{Li}_2(e^{2\pi i(1-z)}) \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Fixons un compact $K \subset \{0 < \Re z < 1\}$. Il existe donc $\delta \in]0, 1/2[$ et $M > 0$ tels que

$$K \subset \{z \in \mathbf{C} \mid \delta \leq \Re z \leq 1 - \delta, |\Im z| \leq M\}.$$

Posons

$$F_N(z) = \frac{\Lambda(z)}{N} = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{4x \sinh(x) N \sinh(x/N)} dx,$$

et

$$F(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{4x^2 \sinh(x)} dx.$$

Pour $x > 0$ réel et $z \in K$, on a :

$$\left| e^{(2z-1)x} \right| = e^{(2\Re z-1)x} \leq e^{-(2\delta)x},$$

et comme $|\sinh x| \geq \frac{1}{2}e^x$ pour $x \geq 1$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\left| \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} \right| \leq C_K e^{-2\delta x} \quad x > 0, z \in K.$$

De même, pour $x < 0$ réel,

$$\left| \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} \right| \leq C_K e^{-2\delta|x|}.$$

De plus, pour tout $u \in \mathbf{R}$, on a $|\sinh u| \geq |u|$, donc :

$$\left| \frac{1}{N \sinh(x/N)} \right| \leq \frac{1}{|x|} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Par conséquent, sur les deux demi-droites du contour, on a :

$$\left| \frac{e^{(2z-1)x}}{4x \sinh(x) N \sinh(x/N)} \right| \leq \frac{C_K e^{-2\delta|x|}}{|x|^2},$$

et $\frac{C_K e^{-2\delta|x|}}{|x|^2}$ est intégrable. Comme sur l'arc circulaire du contour, qui est compact, on a uniformément en x

$$N \sinh(x/N) \longrightarrow x,$$

alors :

$$\frac{1}{N \sinh(x/N)} \longrightarrow \frac{1}{x}$$

uniformément sur cet arc.

On applique donc le théorème de convergence dominée sur les demi-droites et la convergence uniforme sur l'arc. On obtient : $F_N(z) \longrightarrow F(z)$ uniformément sur K .

Montrons maintenant que :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i(1-z)}) \quad 0 < \Re z < 1.$$

Posons

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i(1-z)}).$$

Les majorations précédentes restent valables après dérivation par rapport à z , le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre donne donc :

$$F'(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{2x \sinh x} dx \quad F''(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx.$$

Posons

$$f_z(x) = \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x}.$$

On a :

$$f_z(x) = \frac{1}{x} + O(1),$$

On note :

$$T\left(\int_{\mathbb{R}} f_z(x) dx\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_z(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_z(x) dx \right).$$

Le contour étant obtenu en contournant le pôle 0 par un petit demi-cercle supérieur,

on a :

$$F''(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_z(x) dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f_z(w) dw + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_z(x) dx \right),$$

où γ_ε désigne le demi-cercle supérieur de rayon ε .

Les deux intégrales sur la droite réelle convergent vers :

$$T\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx\right).$$

D'autre part :

$$f_z(w) = \frac{1}{w} + h_z(w),$$

avec h_z holomorphe au voisinage de 0, donc :

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f_z(w) dw = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_\varepsilon} h_z(w) dw \longrightarrow -i\pi \operatorname{Res}_{w=0}(f_z).$$

Comme $\operatorname{Res}_{w=0}(f_z) = 1$, il vient :

$$F''(z) = T\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx\right) - i\pi.$$

Or :

$$T\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx\right) = \int_0^\infty \frac{e^{(2z-1)x} - e^{-(2z-1)x}}{\sinh x} dx.$$

Et, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{\sinh x} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)x},$$

comme la série converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty)$ pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$T\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx\right) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty \left(e^{-2(m+1-z)x} - e^{-2(m+z)x} \right) dx.$$

Ainsi :

$$T\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(2z-1)x}}{\sinh x} dx\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1-z} - \frac{1}{m+z} \right).$$

On a la formule suivante :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1-z} - \frac{1}{m+z} \right) = -\pi \cot(\pi z)$$

Donc :

$$F''(z) = -\pi \cot(\pi z) + i\pi.$$

Posons :

$$w = e^{2\pi i(1-z)}.$$

Comme :

$$\cot(\pi z) = -i \frac{w+1}{w-1},$$

On obtient :

$$-\pi \cot(\pi z) + i\pi = i\pi \frac{w+1}{w-1} + i\pi = i\pi \frac{2w}{w-1} = -\frac{2\pi i w}{1-w}.$$

Par conséquent :

$$F''(z) = -\frac{2\pi i e^{2\pi i(1-z)}}{1 - e^{2\pi i(1-z)}}.$$

On a :

$$\frac{d}{du} Li_2(u) = -\frac{\log(1-u)}{u},$$

Donc :

$$G'(z) = \log(1 - e^{2\pi i(1-z)}),$$

Puis :

$$G''(z) = -\frac{2\pi i e^{2\pi i(1-z)}}{1 - e^{2\pi i(1-z)}}.$$

Ainsi :

$$(F - G)'' = 0$$

sur la bande $0 < \Re z < 1$. Il existe donc $a, b \in \mathbf{C}$ tels que :

$$F(z) - G(z) = az + b.$$

Par définition :

$$F(z) + F(1-z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x}}{4x^2 \sinh x} dx.$$

L'intégrande est impaire en x , donc sa valeur principale sur l'axe réel est nulle, il ne reste que la contribution de l'arc autour de 0. On obtient :

$$F(z) + F(1-z) = i\pi \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x}}{4x^2 \sinh x} \right).$$

Développons au voisinage de 0 :

$$e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x} = 2 + (2z-1)^2 x^2 + O(x^4),$$

et

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Il vient :

$$\frac{e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x}}{4x^2 \sinh x} = \frac{1}{2x^3} - \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{x} + O(x).$$

Ainsi :

$$F(z) + F(1-z) = -\pi i \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right).$$

D'autre part, on a :

$$Li_2(e^{2\pi iz}) + Li_2(e^{2\pi i(1-z)}) = 2\pi^2 \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right)$$

Donc :

$$G(z) + G(1-z) = -\pi i \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right).$$

On a donc :

$$(F - G)(z) + (F - G)(1-z) = 0.$$

Comme $F - G$ est affine, on en déduit que :

$$F(z) - G(z) = c \left(z - \frac{1}{2} \right)$$

pour une certaine constante $c \in \mathbf{C}$.

Fixons $a \in]0, 1[$ et considérons $z = a - iy$ avec $y \rightarrow +\infty$. Sur les demi-droites du contour, le facteur e^{-2iyx} donne, par le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$F(a - iy) \longrightarrow 0.$$

Et :

$$e^{2\pi i(1-a+iy)} = e^{2\pi i(1-a)} e^{-2\pi y} \longrightarrow 0,$$

Donc :

$$G(a - iy) = \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i(1-a+iy)}) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent :

$$c \left(a - \frac{1}{2} - iy \right) = F(a - iy) - G(a - iy) \longrightarrow 0,$$

ce qui impose $c = 0$.

Ainsi, on obtient le résultat :

$$F(z) = G(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{Li}_2(e^{2\pi i(1-z)}),$$

■

On réécrit ensuite V_N d'une façon plus facile à manipuler.

Proposition 4.20.

On a :

$$V_N(t, s) = \frac{1}{N} (\Lambda(1-t) - 2\Lambda(1-s)) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} - 2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} \right) - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}.$$

Démonstration. Montrons que pour tout z tel que $0 < \Re z < 1$, on a

$$\Lambda(z) + \Lambda(1-z) = -\pi i N \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{12N}.$$

Posons

$$F_z(x) = \frac{e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x}}{4x \sinh x \sinh(x/N)}.$$

De sorte que

$$\Lambda(z) + \Lambda(1-z) = \int_{\mathcal{C}} F_z(x) dx.$$

Pour $R > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$, posons

$$\mathcal{C}_{R,\varepsilon} := [-R, -\varepsilon] \cup C_\varepsilon^+ \cup [\varepsilon, R],$$

où C_ε^+ est le demi-cercle supérieur de rayon ε , orienté de $-\varepsilon$ vers ε . Alors

$$\int_{\mathcal{C}_{R,\varepsilon}} F_z(x) dx = \int_{-R}^{-\varepsilon} F_z(x) dx + \int_{C_\varepsilon^+} F_z(x) dx + \int_{\varepsilon}^R F_z(x) dx.$$

Comme F_z est impaire,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} F_z(x) dx + \int_{\varepsilon}^R F_z(x) dx = 0.$$

En faisant tendre d'abord R vers $+\infty$, puis ε vers 0, on obtient

$$\Lambda(z) + \Lambda(1-z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+} F_z(x) dx.$$

Or C_ε^+ est orienté dans le sens horaire, ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+} F_z(x) dx = -\pi i \text{Res}_{x=0} F_z(x).$$

Au voisinage de 0,

$$e^{(2z-1)x} + e^{(1-2z)x} = 2 + (2z-1)^2 x^2 + O(x^4),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \sinh(x/N) = \frac{x}{N} + \frac{x^3}{6N^3} + O(x^5).$$

Donc

$$\frac{1}{4x \sinh x \sinh(x/N)} = \frac{N}{4x^3} \left(1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6N^2} \right) x^2 + O(x^4) \right).$$

Ainsi

$$F_z(x) = \frac{N}{2x^3} + \frac{1}{x} \left(\frac{N}{4} (2z-1)^2 - \frac{N}{12} - \frac{1}{12N} \right) + O(x).$$

Donc

$$\text{Res}_{x=0} F_z(x) = \frac{N}{4} (2z-1)^2 - \frac{N}{12} - \frac{1}{12N}.$$

Or

$$\frac{N}{4} (2z-1)^2 - \frac{N}{12} = N \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right).$$

Ainsi

$$\text{Res}_{x=0} F_z(x) = N \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{12N},$$

et finalement

$$\Lambda(z) + \Lambda(1-z) = -\pi i N \left(z^2 - z + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{12N}.$$

Montrons maintenant que

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = \log N.$$

On a

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{(\frac{1}{N}-1)x} - e^{(1-\frac{1}{N})x}}{4x \sinh x \sinh(x/N)} dx.$$

Comme

$$e^{(\frac{1}{N}-1)x} - e^{(1-\frac{1}{N})x} = -2 \sinh\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)x\right),$$

on obtient

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sinh\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)x\right)}{x \sinh x \sinh(x/N)} dx.$$

On a l'identité

$$\coth(x/N) - \coth x = \frac{\sinh\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)x\right)}{\sinh x \sinh(x/N)}.$$

Il vient donc

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{\coth x - \coth(x/N)}{x} dx.$$

Pour $a > 0$, posons

$$H(a) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{\coth x - \coth(ax)}{x} dx.$$

Alors

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = H(1/N).$$

De plus, pour a dans un compact de $]0, +\infty[$, l'intégrande et sa dérivée décroissent exponentiellement sur les deux demi-droites du contour $\mathcal{C}$. On peut donc utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral sur tout compact :

$$H'(a) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{dx}{\sinh^2(ax)}.$$

Par le changement de variable $u = ax$,

$$H'(a) = \frac{1}{2a} \int_{a\mathcal{C}} \frac{du}{\sinh^2 u}.$$

Donc

$$H'(a) = -\frac{1}{2a} \int_{a\mathcal{C}} (\coth u)' du = -\frac{1}{2a} (\coth(+\infty) - \coth(-\infty)).$$

Or

$$\coth(+\infty) = 1, \quad \coth(-\infty) = -1.$$

Donc

$$H'(a) = -\frac{1}{a}.$$

Comme $H(1) = 0$, on en déduit

$$H(a) = -\log a.$$

En particulier,

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = H(1/N) = \log N.$$

En appliquant le premier résultat avec $z = \frac{1}{2N}$, on obtient

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + \Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = -\pi i N \left(\frac{1}{4N^2} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{12N} = -\frac{\pi i N}{6} + \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{6N}.$$

Avec le deuxième résultat, on trouve

$$\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) = -\frac{\pi i N}{12} + \frac{1}{2} \log N + \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{12N},$$

$$\Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = -\frac{\pi i N}{12} - \frac{1}{2} \log N + \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{12N}.$$

Donc

$$-3\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + 2\Lambda\left(1 - \frac{1}{2N}\right) = \frac{\pi i N}{12} - \frac{5}{2} \log N - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{12N}.$$

Par définition, on a :

$$\tilde{V}_N(t, s) = \frac{1}{N} \left(\Lambda\left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + \Lambda\left(1-t-s+\frac{1}{2N}\right) + \Lambda(s) - \Lambda(1-s) + \Lambda(1-t) - 3\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + 2\Lambda\left(1-\frac{1}{2N}\right) \right).$$

Comme :

$$\Lambda(s) - \Lambda(1-s) = (\Lambda(s) + \Lambda(1-s)) - 2\Lambda(1-s),$$

On obtient :

$$\tilde{V}_N(t, s) = \frac{1}{N}(\Lambda(1-t) - 2\Lambda(1-s)) + \frac{1}{N} E(t, s),$$

où :

$$E(t, s) = \Lambda\left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + \Lambda\left(1-t-s+\frac{1}{2N}\right) + \Lambda(s) + \Lambda(1-s) - 3\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + 2\Lambda\left(1-\frac{1}{2N}\right).$$

Or, d'après nos résultats précédents, on a :

$$\Lambda\left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + \Lambda\left(1-t-s+\frac{1}{2N}\right) = -\pi i N \left(\left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 - \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{12N},$$

$$\Lambda(s) + \Lambda(1-s) = -\pi i N \left(s^2 - s + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{12N},$$

Et :

$$-3\Lambda\left(\frac{1}{2N}\right) + 2\Lambda\left(1-\frac{1}{2N}\right) = \frac{\pi i N}{12} - \frac{5}{2} \log N - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{12N}.$$

Donc :

$$E(t, s) = -\pi i N \left(\left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 - \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + s^2 - s + \frac{1}{3} \right) + \frac{\pi i N}{12} - \frac{5}{2} \log N - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{4N}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{N} E(t, s) = -\pi i \left(\left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 - \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + s^2 - s + \frac{1}{3} \right) + \frac{\pi i}{12} - \frac{5}{2N} \log N - \frac{\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}.$$

Or :

$$\begin{aligned} & -\pi i \left(\left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 - \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) + s^2 - s + \frac{1}{3} \right) \\ &= -2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2} s + \frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

Et :

$$-\frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2} s = -\frac{1}{2} t - s + \frac{1}{4N}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & -2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2} s + \frac{1}{6} \right) \\ &= -2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t+s-\frac{1}{2N}\right)^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} \right) - \frac{\pi i}{2N}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{1}{N}E(t, s) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} - 2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t - s + \frac{1}{6} \right) - \frac{5}{2N} \log N - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(t, s) = & \frac{1}{N} (\Lambda(1-t) - 2\Lambda(1-s)) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} - 2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t - s + \frac{1}{6} \right) \\ & - \frac{5}{2N} \log N - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}. \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} V_N(t, s) = & \frac{1}{N} (\Lambda(1-t) - 2\Lambda(1-s)) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} - 2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t - s + \frac{1}{6} \right) \\ & - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}. \end{aligned}$$

■

Posons :

$$\Omega = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t, 0 \leq s, t + s \leq 1\},$$

Et :

$$\Omega_0 = \{(t, s) \in \Omega \mid 0.04 \leq t \leq 0.9, 0.05 \leq s \leq 0.9\}.$$

On obtient enfin notre comportement asymptotique de V_N .

Proposition 4.21.

La suite de fonctions $(V_N)_{N \geq 2}$ converge uniformément sur Ω_0 vers la fonction

$$\hat{V}(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \left(Li_2(e^{2\pi i t}) - 2Li_2(e^{2\pi i s}) - \frac{\pi^2}{6} \right) - 2\pi i \left(\frac{1}{2}t^2 + s^2 + ts - \frac{1}{2}t - s + \frac{1}{6} \right).$$

Démonstration. On part du résultat de la proposition 4.20

$$\begin{aligned} V_N(t, s) = & \frac{1}{N} (\Lambda(1-t) - 2\Lambda(1-s)) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} - 2\pi i \left(\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t - s + \frac{1}{6} \right) \\ & - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}. \end{aligned}$$

où

$$\Lambda(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{4x \sinh(x) \sinh(x/N)} dx, \quad 0 < \Re z < 1.$$

Comme Ω_0 est un compact contenu dans le domaine $0 < \Re t < 1$ et $0 < \Re s < 1$, les ensembles

$$K_t = \{1-t \mid (t, s) \in \Omega_{00}\}, \quad K_s = \{1-s \mid (t, s) \in \Omega_{00}\}$$

sont des compacts contenus dans la bande $0 < \Re z < 1$.

En appliquant le lemme 4.19 sur K_t et K_s , on obtient :

$$\sup_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{\Lambda(1-t)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i t}) \right| \longrightarrow 0,$$

et

$$\sup_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{\Lambda(1-s)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i s}) \right| \longrightarrow 0.$$

Or :

$$\frac{1}{2} \left(t + s - \frac{1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} t^2 + s^2 + ts - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} - \frac{t+s}{2N} + \frac{1}{8N^2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V_N(t, s) &= \frac{\Lambda(1-t)}{N} - 2 \frac{\Lambda(1-s)}{N} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} \\ &\quad - 2\pi i \left(\frac{1}{2} t^2 + s^2 + ts - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{N} (t+s) - \frac{\pi i}{4N^2} - \frac{3\pi i}{4N} + \frac{\pi i}{4N^2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} V_N(t, s) &= \frac{\Lambda(1-t)}{N} - 2 \frac{\Lambda(1-s)}{N} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^2}{6} \\ &\quad - 2\pi i \left(\frac{1}{2} t^2 + s^2 + ts - \frac{1}{2} t - s + \frac{1}{6} \right) + \frac{\pi i}{N} (t+s) - \frac{3\pi i}{4N}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} V_N(t, s) - \widehat{V}(t, s) &= \left(\frac{\Lambda(1-t)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i t}) \right) \\ &\quad - 2 \left(\frac{\Lambda(1-s)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i s}) \right) + \frac{\pi i}{N} (t+s) - \frac{3\pi i}{4N}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{(t,s) \in \Omega_0} |V_N(t, s) - \widehat{V}(t, s)| &\leq \sup_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{\Lambda(1-t)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i t}) \right| \\ &\quad + 2 \sup_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{\Lambda(1-s)}{N} - \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i s}) \right| \\ &\quad + \frac{\pi}{N} \sup_{(t,s) \in \Omega_0} |t+s| + \frac{3\pi}{4N}. \end{aligned}$$

Comme Ω_{00} est compacte, la quantité $\sup_{(t,s) \in \Omega_0} |t+s|$ est finie.

De plus, par le lemme 4.19 les deux premiers termes tendent vers 0. Ainsi :

$$\sup_{(t,s) \in \Omega_{00}} |V_N(t, s) - \widehat{V}(t, s)| \longrightarrow 0.$$

Autrement dit :

$$V_N \longrightarrow \widehat{V} \quad \text{uniformément sur } \Omega_0.$$

■

Pour N assez grand, posons :

$$A_N(i, j) = \left| N^3 q \frac{1}{(q)_{i+j} (q)_{N-i-j-1} (q)_j (\bar{q})_j (\bar{q})_i} \right|, \quad i, j \geq 0, \quad i + j < N.$$

Lemme 4.22.

On a les résultats suivants :

- $A_N(i, j) = \frac{N^2}{|(q)_i| |(q)_j|^2}$
- La suite $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est croissante sur $0 \leq n \leq N/6$ et décroissante sur $0.9N \leq n \leq N-1$
- pour tout couple admissible (i, j) tel que $(t, s) \notin \Omega_0$, il existe un couple (i', j') tel que $(t', s') \in \Omega_0$, avec soit $t' = 0.04 + O(\delta)$, soit $s' = 0.05 + O(\delta)$, soit $t' = 0.9 + O(\delta)$, soit $s' = 0.9 + O(\delta)$, et

$$A_N(i, j) \leq A_N(i', j').$$

Démonstration. — Comme $\bar{q} = q^{-1}$, on a :

$$|(\bar{q})_m| = |(q)_m| \quad \text{pour tout } m \geq 0.$$

Et :

$$(q)_n (\bar{q})_{N-n-1} = N,$$

Donc :

$$|(q)_n| |(q)_{N-n-1}| = N \quad \text{pour tout } 0 \leq n \leq N-1.$$

En prenant $n = i + j$:

$$\begin{aligned} A_N(i, j) &= \frac{N^3}{|(q)_{i+j}| |(q)_{N-i-j-1}| |(q)_j| |(\bar{q})_j| |(\bar{q})_i|} \\ &= \frac{N^3}{N |(q)_j|^2 |(q)_i|} \\ &= \frac{N^2}{|(q)_i| |(q)_j|^2}. \end{aligned}$$

— Pour $1 \leq n \leq N/6$, on a :

$$(q)_n = (1 - q^n)(q)_{n-1},$$

Donc :

$$\frac{1}{|(q)_n|} = \frac{1}{|1 - q^n|} \frac{1}{|(q)_{n-1}|}.$$

Or :

$$|1 - q^n| = 2 \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \leq 1 \quad (1 \leq n \leq N/6),$$

D'où :

$$\frac{1}{|(q)_n|} \geq \frac{1}{|(q)_{n-1}|}.$$

Ainsi, $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est croissante sur $0 \leq n \leq N/6$.

Pour $0.9N \leq n \leq N-1$, on utilise la relation précédente :

$$\frac{1}{|(q)_n|} = \frac{|(q)_{N-n-1}|}{N}.$$

Comme $0 \leq N-n-1 \leq 0.1N < N/6$, et comme $m \mapsto |(q)_m|$ est décroissante sur $0 \leq m \leq N/6$, il vient que $n \mapsto \frac{1}{|(q)_n|}$ est décroissante sur $0.9N \leq n \leq N-1$.

— Comme :

$$A_N(i, j) = N^2 \frac{1}{|(q)_i|} \frac{1}{|(q)_j|^2},$$

la monotonie de $A_N(i, j)$ en i et en j découle de la monotonie de $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$.

Premier cas : $t < 0.04$ et $s \leq 0.9$.

On pose $i' = \min \left\{ i \geq 0 \mid \frac{2i+1}{2N} \geq 0.04 \right\}$ et $j' = j$. Alors, pour N assez grand, on a :

$$t' = \frac{2i'+1}{2N} = 0.04 + O(\delta), \quad s' = s,$$

et

$$t' + s' \leq 0.04 + O(\delta) + 0.9 < 1.$$

Donc (i', j') convient et $(t', s') \in \Omega_0$. Comme $i \leq i'$ et que $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est croissante, on a :

$$A_N(i, j) \leq A_N(i', j').$$

Deuxième cas : $s < 0.05$ et $t \leq 0.9$. On pose $i' = i$ et $j' = \min \left\{ j \geq 0 \mid \frac{2j+1}{2N} \geq 0.05 \right\}$. Alors :

$$t' = t, \quad s' = 0.05 + O(\delta),$$

et, pour N assez grand :

$$t' + s' \leq 0.9 + 0.05 + O(\delta) < 1.$$

Le couple (i', j') convient et $(t', s') \in \Omega_0$. Enfin comme $j \leq j'$:

$$A_N(i, j) \leq A_N(i', j').$$

Troisième cas : $t > 0.9$. Comme $(t, s) \in \Omega$, on a $t + s \leq 1$, donc $s < 0.1$. On pose

$i' = \max \left\{ i \geq 0 \mid \frac{2i+1}{2N} \leq 0.9 \right\}$ et $j' = j$. Alors :

$$t' = 0.9 + O(\delta), \quad s' = s < 0.1,$$

et

$$t' + s' \leq 0.9 + O(\delta) + 0.1 \leq 1$$

pour N assez grand. Le couple (i', j') convient et $(t', s') \in \Omega_0$. Comme $i \geq i'$ et que $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est décroissante sur $0.9N \leq n \leq N-1$,

$$A_N(i, j) \leq A_N(i', j').$$

Quatrième cas : $s > 0.9$. De même, comme $t + s \leq 1$, on a $t < 0.1$. On pose $i' = i$ et $j' = \max \left\{ j \geq 0 \mid \frac{2j+1}{2N} \leq 0.9 \right\}$. Alors :

$$t' = t < 0.1, \quad s' = 0.9 + O(\delta),$$

et (i', j') convient pour N assez grand. Comme $j \geq j'$ et que $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est décroissante sur $0.9N \leq n \leq N-1$,

$$A_N(i, j) \leq A_N(i', j').$$

■

Reprenons x_0 et y_0 les paramètres de l'exemple 4.11, c'est-à-dire que y_0 est l'unique solution de :

$$(y_0 - 1)^3 = y_0 \quad \text{telle que} \quad \Im(y_0) > 0$$

Et :

$$x_0 = 1 - \frac{1}{y_0}$$

Posons :

$$\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\text{Li}_2(x_0 y_0) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{x_0 y_0}\right) + \text{Li}_2(y_0) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{y_0}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{x_0}\right) - \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$\zeta_R = \Re(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\text{Li}_2(x_0 y_0) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{x_0 y_0}\right) + \text{Li}_2(y_0) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{y_0}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{x_0}\right) \right)$$

En particulier, on remarque que :

$$2\pi\zeta_R = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2)$$

Posons enfin :

$$\Omega_1 = \{(t, s) \in \Omega \mid 0.04 \leq t \leq 0.4, 0.05 \leq s \leq 0.4, t + s \leq 0.6\}.$$

Lemme 4.23.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid \Re \widehat{V}(t, s) \geq \zeta_R - \varepsilon\} \subset \Omega_1.$$

Démonstration. Cela se vérifie numériquement en calculant les variations de $t \mapsto \Re \frac{1}{2\pi i} Li_2(e^{2\pi i t})$.

■

Grâce à tous ces résultats, on peut réécrire $\langle 5_2 \rangle_N$ d'une façon très particulière qui nous permettra de le transformer en intégrale double par la suite.

Théorème 4.24.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour N assez grand :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{1/2} q \left(\sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_1}} \exp \left(N V_N \left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N} \right) - N\zeta \right) + O(e^{-N\varepsilon}) \right).$$

Démonstration. On part de la proposition 4.18 :

$$\langle 5_2 \rangle_N = N^{1/2} q \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N}} \exp \left(N V_N \left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N} \right) \right).$$

Par le lemme 4.22, on a :

$$\left| N^3 q \frac{1}{(q)_{i+j}(q)_{N-i-j-1}(q)_j(\bar{q})_j(\bar{q})_i} \right| = \left| \frac{N^2}{(q)_i(q)_j^2} \right|.$$

De plus, $n \mapsto |(q)_n|^{-1}$ est croissante sur $0 \leq n \leq N/6$ et décroissante sur $0.9N \leq n < N$, et tout terme correspondant à $(i/N, j/N) \notin \Omega_0$ est majoré par un terme correspondant à un point de $\partial\Omega_0$.

Comme $\partial\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$, le lemme 4.23 donne l'existence de $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\Re \widehat{V}(t, s) \leq \zeta_R - \eta_0 \quad \text{pour tout } (t, s) \in \partial\Omega_0.$$

Comme par la proposition 4.21 $V_N \rightarrow \widehat{V}$ uniformément sur Ω_0 , il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$:

$$\Re V_N(t, s) \leq \zeta_R - \frac{\eta_0}{2} \quad \text{pour tout } (t, s) \in \partial\Omega_0.$$

Par conséquent, pour tout couple admissible (i, j) tel que $(i/N, j/N) \notin \Omega_0$, le terme

correspondant dans la somme est majoré par un terme de bord, donc par

$$N^{1/2} \exp\left(N\left(\zeta_R - \frac{\eta_0}{2}\right)\right).$$

Quitte à diminuer η_0 , on en déduit que la contribution totale des couples tels que $(i/N, j/N) \notin \Omega_0$ est

$$O\left(N^2 e^{N(\zeta_R - \eta_0)}\right).$$

Ainsi,

$$\langle 5_2 \rangle_N = N^{1/2} q \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_0}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right)\right) + O\left(N^2 e^{N(\zeta_R - \eta_0)}\right).$$

En factorisant $e^{N\zeta}$, on obtient

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{1/2} q \left(\sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_0}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) + O\left(N^2 e^{-N\eta_0}\right) \right).$$

Comme $\Omega_0 \setminus \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$, le lemme 4.23 donne l'existence de $\eta > 0$ tel que :

$$\Re \widehat{V}(t, s) \leq \zeta_R - \eta \quad \text{pour tout } (t, s) \in \Omega_0 \setminus \Omega_1.$$

Comme par la proposition 4.21 $V_N \rightarrow \widehat{V}$ uniformément sur Ω_0 , il existe N_1 tel que, pour tout $N \geq N_1$:

$$\Re V_N(t, s) \leq \zeta_R - \frac{\eta}{2} \quad \text{pour tout } (t, s) \in \Omega_0 \setminus \Omega_1.$$

Ainsi,

$$\left| \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) \right| = \exp\left(N\left(\Re V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - \zeta_R\right)\right) \leq e^{-N\eta/2}$$

pour tout couple (i, j) tel que $(i/N, j/N) \in \Omega_0 \setminus \Omega_1$. Comme le nombre de couples (i, j) tels que $i + j < N$ est $O(N^2)$, leur contribution totale est :

$$O\left(N^2 e^{-N\eta/2}\right).$$

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$N^2 e^{-N\eta_0} = O(e^{-N\varepsilon}) \quad \text{et} \quad N^2 e^{-N\eta/2} = O(e^{-N\varepsilon}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_0}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) \\ &= \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_1}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) + O(e^{-N\epsilon}), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{1/2} q \left(\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_1}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) + O(e^{-N\epsilon}) \right).$$

■

4.3 Mise sous forme intégrale du problème

Pour démontrer la conjecture, on souhaite appliquer la méthode de Perron généralisée. Pour cela, il faut justifier le passage du développement asymptotique obtenu en une forme intégrale compatible avec la méthode. On se base alors sur la formule sommatoire de Poisson pour obtenir l'intégrale souhaitée.

Soit $f \in \mathcal{L}^1$, on prend la convention de **transformée de Fourier** suivante :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

Définition 4.25.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha, \beta} > 0 \text{ telle que } |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha, \beta}\}$.

on appelle **formule sommatoire de Poisson** l'égalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(m)$$

Démonstration. Posons la fonction $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x+k)$.

Comme f et toutes ses dérivées sont à décroissance en $\mathcal{O}(\|x\|^{-M})$ pour tout $M > 0$, cette série de fonctions (et de ses dérivées) converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Ainsi, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus, F est 1-périodique par rapport à chaque coordonnée. On étudie les coefficients

de sa série de Fourier. Pour $m \in \mathbb{Z}^d$, on a :

$$\begin{aligned} c_m(F) &= \int_{[0,1]^d} F(x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x+k) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx. \end{aligned}$$

Par convergence uniforme, on peut intervertir la somme et l'intégrale.

Puisque $e^{-2\pi i \langle m, k \rangle} = 1$ pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on a :

$$\begin{aligned} c_m(F) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} f(x+k) e^{-2\pi i \langle m, x+k \rangle} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d + k} f(y) e^{-2\pi i \langle m, y \rangle} dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle m, y \rangle} dy = \widehat{f}(m) \end{aligned}$$

La fonction F étant $\mathcal{C}^\infty$, sa série de Fourier converge ponctuellement vers F . On obtient donc en $x = 0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) = F(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} c_m(F) e^0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(m)$$

■

La proposition suivante formalise l'idée que, sous des conditions spécifiques, tous les termes de la formule de Poisson pour $m \neq 0$ sont asymptotiquement négligeables, ce qui permet de réduire la somme à une simple intégrale. Cette idée provient de l'article d'Ohtsuki [5]. Seulement, étant donné qu'il souhaite obtenir un développement asymptotique complet de $\langle 5_2 \rangle_N$, il montre ce résultat progressivement en construisant petit à petit l'intégrande voulue. On utilisera ici une preuve plus efficace inspirée de la méthode de la phase non-stationnaire [7] (chap. 4).

Proposition 4.26.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un compact et U un voisinage ouvert de D .

Soient $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans D .

On suppose que pour tout $x \in D$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a : $\nabla g(x) \neq 2\pi i m$.

Alors, pour tout entier $K \geq 1$, on a le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f\left(\frac{k}{N}\right) \exp\left(Ng\left(\frac{k}{N}\right)\right) \underset{N \rightarrow \infty}{=} N^2 \iint_D f(x) \exp(Ng(x)) dx + \mathcal{O}(N^{-K} e^{N \sup_D \operatorname{Re}(g)})$$

Démonstration. Posons la fonction $F_N(x) = f(x/N) e^{Ng(x/N)}$.

Puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans D , F_N est à support compact et appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. La formule sommatoire de Poisson donne :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} F_N(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \widehat{F_N}(m).$$

Or pour $m \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{F}_N(m) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{x}{N}\right) e^{Ng(x/N)} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= N^2 \iint_D f(y) e^{N(g(y) - 2\pi i \langle m, y \rangle)} dy \quad (y = x/N) \\ &= N^2 \iint_D f(y) e^{N\Psi_m(y)} dy,\end{aligned}$$

où $\Psi_m(y) = g(y) - 2\pi i \langle m, y \rangle$.

Montrons que $R_N = \sum_{m \neq 0} \widehat{F}_N(m)$ est un $\mathcal{O}(N^{-K} e^{N \sup_D \operatorname{Re}(g)})$.

Soit $m \neq 0$. On a $\nabla \Psi_m(y) = \nabla g(y) - 2\pi i m$, donc par hypothèse, $\|\nabla \Psi_m(y)\| \neq 0$ sur le compact D .

Posons :

$$L_m : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ u \longmapsto \frac{1}{N \|\nabla \Psi_m\|^2} \sum_{j=1}^2 \overline{\partial_j \Psi_m} \frac{\partial u}{\partial y_j} \end{cases}$$

en particulier :

$$L_m(e^{N\Psi_m}) = \frac{1}{N \|\nabla \Psi_m\|^2} \sum_{j=1}^2 \overline{\partial_j \Psi_m} (N \partial_j \Psi_m) e^{N\Psi_m} = e^{N\Psi_m}.$$

Posons l'adjoint $L_m^*(u) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(u \frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \right)$.

Puisque f est à support compact dans D , le terme entre crochets de l'intégration par parties s'annule. On a alors :

$$\widehat{F}_N(m) = N^2 \iint_D f(y) L_m(e^{N\Psi_m(y)}) dy = N^2 \iint_D L_m^*(f)(y) e^{N\Psi_m(y)} dy.$$

En itérant P fois, on obtient :

$$\widehat{F}_N(m) = N^2 \iint_D (L_m^*)^P(f)(y) e^{N\Psi_m(y)} dy.$$

Étant donné que $g \in \mathcal{C}^\infty(D)$, il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall y \in D, \|\nabla g(y)\| \leq M_1$.

Alors pour tout $y \in D$:

$$\|\nabla \Psi_m(y)\| = \|\nabla g(y) - 2\pi i m\| \geq 2\pi \|m\| - \|\nabla g(y)\| \geq 2\pi \|m\| - M_1.$$

Comme $\nabla \Psi_m$ ne s'annule jamais sur D pour $m \neq 0$, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall m \neq 0, \forall y \in D, \quad \|\nabla \Psi_m(y)\| \geq C \|m\|.$$

On a $|\partial_j \Psi_m| \leq \|\nabla \Psi_m\|$, donc :

$$\left| \frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \right| \leq \frac{1}{\|\nabla \Psi_m\|} \leq \frac{1}{C\|m\|}$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \right) = \frac{\overline{\partial_k \partial_j g}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} - \frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^4} \sum_{l=1}^2 \left(\partial_k \partial_l g \cdot \overline{\partial_l \Psi_m} + \partial_l \Psi_m \cdot \overline{\partial_k \partial_l g} \right).$$

Comme $|\partial_j \partial_k g| \leq M_2$ où M_2 est une constante, on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \right) \right| \leq \frac{M_2}{\|\nabla \Psi_m\|^2} + \frac{2M_2 \|\nabla \Psi_m\|^2}{\|\nabla \Psi_m\|^4} = \frac{3M_2}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \leq \frac{3M_2}{C^2 \|m\|^2}.$$

Puisque :

$$L_m^*(u) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} + u \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\overline{\partial_j \Psi_m}}{\|\nabla \Psi_m\|^2} \right) \right)$$

l'application de L_m^* multiplie donc globalement la fonction par un facteur d'ordre de grandeur $\frac{1}{N\|m\|}$.

Une récurrence sur l'entier P permet de montrer qu'il existe une constante $A_P > 0$ telle que :

$$\sup_{y \in D} |(L_m^*)^P(f)(y)| \leq \frac{A_P}{N^P \|m\|^P}.$$

De cette façon, on obtient :

$$|\widehat{F_N}(m)| \leq N^2 \text{Vol}(D) \sup_{y \in D} \left| (L_m^*)^P(f)(y) e^{N \text{Re}(\Psi_m(y))} \right| \leq \frac{\tilde{A}_P}{N^{P-2} \|m\|^P} e^{N \sup_D \text{Re}(g)},$$

car $\text{Re}(\Psi_m(y)) = \text{Re}(g(y))$ puisque $\langle m, y \rangle$ est réel.

On prend $P = K + 2$. On obtient la domination :

$$|R_N| \leq \frac{\tilde{A}_{K+2}}{N^K} e^{N \sup_D \text{Re}(g)} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\|m\|^{K+2}}.$$

Comme $K \geq 1$, $K + 2 > 2$, la série converge donc.

Finalement, $R_N = \mathcal{O}(N^{-K} e^{N \sup_D \text{Re}(g)})$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f\left(\frac{k}{N}\right) \exp\left(Ng\left(\frac{k}{N}\right)\right) &\underset{N \rightarrow \infty}{=} \widehat{F_N}(0, 0) + \mathcal{O}(N^{-K} e^{N \sup_D \text{Re}(g)}) \\ &\underset{N \rightarrow \infty}{=} N^2 \iint_D f(x) \exp(Ng(x)) dx + \mathcal{O}(N^{-K} e^{N \sup_D \text{Re}(g)}) \end{aligned}$$

■

On obtient ainsi notre écriture intégrale.

Théorème 4.27.

On a l'égalité asymptotique suivante :

$$\langle 5_2 \rangle_N \underset{N \rightarrow \infty}{=} e^{N\zeta} N^{5/2} q \iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) dt ds$$

Démonstration. On part du théorème 4.24 :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{1/2} q \left(\sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_1}} \exp\left(N V_N\left(\frac{2i+1}{2N}, \frac{2j+1}{2N}\right) - N\zeta\right) + O(e^{-N\epsilon}) \right).$$

Notons :

$$\Sigma_N = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < N \\ (i/N, j/N) \in \Omega_1}} \exp\left(N V_N\left(\frac{i+1/2}{N}, \frac{j+1/2}{N}\right) - N\zeta\right).$$

nous montrerons dans le théorème 4.30 que la fonction $\widehat{V}$ admet un unique point col admissible $z_0 = (t_0, s_0) \in \mathring{\Omega}_1$. Puisque z_0 maximise strictement la partie réelle, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $B(z_0, r) \subset \mathring{\Omega}_1$, tel que :

$$\sup_{z \in \Omega_1 \setminus B(z_0, r)} \operatorname{Re}(\widehat{V}(z)) \leq \operatorname{Re}(\widehat{V}(z_0)) - \delta \quad (\delta > 0).$$

Posons $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction plateau qui vaut 1 sur $B(z_0, r)$ et telle que $\operatorname{Supp}(\chi) \subset \mathring{\Omega}_1$. Tous les termes hors de $B(z_0, r)$ sont donc exponentiellement petits, on peut réécrire la somme :

$$\Sigma_N = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \chi\left(\frac{k}{N}\right) \exp\left(N \left[V_N\left(\frac{k}{N} + \frac{\mathbf{1}}{2N}\right) - \zeta \right]\right) + \mathcal{O}(e^{-N\delta/2}),$$

où $\mathbf{1} = (1, 1)$.

Notons alors :

- $f(x) = \chi(x)$, qui est bien $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
- $g_N(x) = V_N(x + \frac{\mathbf{1}}{2N}) - \zeta$.

Sur $\operatorname{Supp}(\chi)$, par la proposition 4.21, la suite de fonctions g_N converge uniformément vers $\widehat{V}(x) - \zeta$.

L'étude de $\nabla \widehat{V}$ du théorème 4.30 montre que le gradient de $\widehat{V}$ ne peut atteindre aucun vecteur de la forme $2\pi i m$ avec m à coordonnées entières non nulles. On en déduit que :

$$\forall x \in \operatorname{Supp}(\chi), \forall m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \nabla \widehat{V}(x) \neq 2\pi i m.$$

Puisque le gradient ∇g_N converge uniformément vers $\nabla \widehat{V}$ sur le compact $\operatorname{Supp}(\chi)$, il existe une constante $c > 0$ et un rang N_0 tels que pour tout $N \geq N_0$, pour tout $x \in \operatorname{Supp}(\chi)$ et

pour tout $m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a bien :

$$\|\nabla g_N(x) - 2\pi i m\| \geq c\|m\| > 0$$

On applique ainsi la proposition 4.26, on obtient pour tout entier $K \geq 1$:

$$\Sigma_N = N^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \chi(t, s) \exp\left(NV_N\left(t + \frac{1}{2N}, s + \frac{1}{2N}\right) - N\zeta\right) dt ds + \mathcal{O}(N^{-K}).$$

On effectue le changement de variable $u = t + \frac{1}{2N}$ et $v = s + \frac{1}{2N}$, $dt ds = dudv$, on obtient :

$$\Sigma_N = N^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \chi\left(u - \frac{1}{2N}, v - \frac{1}{2N}\right) \exp(NV_N(u, v) - N\zeta) dudv + \mathcal{O}(N^{-K}).$$

En remplaçant χ par $\mathbf{1}_{\Omega_1}$, on obtient un terme supplémentaire :

$$N^2 \iint_{\Omega_1} \left[1 - \chi\left(u - \frac{1}{2N}, v - \frac{1}{2N}\right)\right] \exp(NV_N(u, v) - N\zeta) dudv.$$

Mais pour N grand, le support de $\chi(u - \frac{1}{2N}, v - \frac{1}{2N})$ contient $B(z_0, r/2)$. Le facteur entre crochets est donc nul sur $B(z_0, r/2)$ et le reste de Ω_1 est exponentiellement petit. Ainsi, ce reste est négligeable, on obtient :

$$\Sigma_N = N^2 \iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(u, v) - N\zeta) dudv + \mathcal{O}(N^{-K}).$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \langle 5_2 \rangle_N &\underset{N \rightarrow \infty}{=} e^{N\zeta} N^{1/2} q \left(N^2 \iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) dt ds + \mathcal{O}(N^{-K}) \right) \\ &\underset{N \rightarrow \infty}{=} e^{N\zeta} N^{5/2} q \iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) dt ds \end{aligned}$$

■

4.4 Démonstration

Pour mettre l'invariant sous la forme exacte de la méthode de Perron, nous avons besoin d'un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de Λ .

Lemme 4.28.

Soit K un compact inclus dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$.

On a uniformément sur K le développement asymptotique :

$$\Lambda_N(z) = \frac{N}{2\pi i} \text{Li}_2(e^{2\pi i z}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Démonstration. Posons $F(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{4x^2 \sinh x} dx$. D'après les calculs du lemme 4.19, nous

savons que $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{Li}_2(e^{2\pi iz})$. Considérons la différence $E_N(z) = \frac{1}{N} \Lambda_N(z) - F(z)$:

$$E_N(z) = \int_C \frac{e^{(2z-1)x}}{4x \sinh x} \underbrace{\left(\frac{1}{N \sinh(x/N)} - \frac{1}{x} \right)}_{:=g_N(x)} dx.$$

La fonction $g : u \mapsto \frac{1}{\sinh u} - \frac{1}{u}$ est holomorphe sur le disque $|u| < \pi$, avec $g(0) = 0$. Par le lemme de Schwarz, il existe une constante $M > 0$ telle que $|g(u)| \leq M|u|$ pour $|u| \leq 1$.

On en déduit que pour $|x| \leq N$, on a $|g_N(x)| = \frac{1}{N} |g(\frac{x}{N})| \leq M \frac{|x|}{N^2}$.

Posons $h_N(z, x) = \frac{e^{(2z-1)x}}{4x \sinh x} g_N(x)$. La fonction $x \mapsto h_N(z, x)$ possède un pôle simple en $x = 0$. Sachant que $g_N(x) = -\frac{x}{6N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^3}{N^4}\right)$ au voisinage de 0, le résidu vaut :

$$\text{Res}(h_N(z, \cdot), 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x h_N(z, x) = \frac{1}{4} \times 1 \times \left(-\frac{1}{6N^2} \right) = -\frac{1}{24N^2}.$$

Le contour C étant la droite réelle évitant l'origine par un petit demi-cercle parcouru de π à 0 dans le demi-plan supérieur, alors :

$$E_N(z) = T\left(\int_{\mathbb{R}} h_N(z, x) dx\right) - i\pi \text{Res}(h_N(z, \cdot), 0).$$

Le terme du résidu vaut $\frac{i\pi}{24N^2}$, ce qui est un $\mathcal{O}(1/N^2)$.

Sur le compact K , il existe $\eta > 0$ tel que $\eta \leq \Re(z) \leq 1 - \eta$, d'où $|e^{(2z-1)x}| \leq e^{(1-2\eta)|x|}$.

On découpe l'intégrale en trois zones :

- Sur $[-1, 1]$, la fonction $x \mapsto h_N(z, x) + \frac{1}{24N^2x}$ se prolonge continûment et est uniformément bornée par un $\mathcal{O}(1/N^2)$. L'intégrale est donc un $\mathcal{O}(1/N^2)$.
- Sur $1 < |x| \leq N$, on utilise $|g_N(x)| \leq M|x|/N^2$. L'intégrale est dominée par $\frac{M}{N^2} \int_1^\infty \frac{e^{(1-2\eta)x}}{\sinh x} dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.
- Sur $|x| > N$, on a $|g_N(x)| \leq \frac{2}{|x|}$. La queue de l'intégrale est dominée par $\mathcal{O}(e^{-\eta N})$, qui est exponentiellement petit et donc en particulier un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

Ainsi, $E_N(z) = \mathcal{O}(1/N^2)$ uniformément sur K . On obtient bien :

$$\Lambda_N(z) = \frac{N}{2\pi i} \text{Li}_2(e^{2\pi iz}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

■

On obtient donc la forme intégrale standard.

Proposition 4.29.

On a :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{5/2} q \left(\iint_{\Omega_1} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

où $\varphi(t, s) = \widehat{V}(t, s) - \zeta$ et $f(t, s) = \exp\left(\pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4}\right)$.

Démonstration. D'après le théorème 4.27, on peut réécrire l'invariant sous cette forme intégrale :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{5/2} q \iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) dt ds$$

Le lemme 4.28 nous assure que le développement asymptotique de la fonction de Faddeev ne produit aucun terme constant. Par conséquent, en reprenant la démonstration de 4.21 avec un terme supplémentaire, on obtient uniformément sur Ω_1 :

$$NV_N(t, s) = N\widehat{V}(t, s) + \pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ainsi :

$$NV_N(t, s) - N\zeta = N(\widehat{V}(t, s) - \zeta) + \pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Comme le domaine d'intégration Ω_1 est compact et que le terme d'erreur $\mathcal{O}(1/N)$ y est uniforme, on peut utiliser le développement $\exp(\mathcal{O}(1/N)) = 1 + \mathcal{O}(1/N)$:

$$\begin{aligned} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) &= \exp\left(N(\widehat{V}(t, s) - \zeta)\right) \exp\left(\pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4}\right) \exp\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\ &= \exp\left(N(\widehat{V}(t, s) - \zeta)\right) \exp\left(\pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

En identifiant :

$$\begin{aligned} \varphi(t, s) &= \widehat{V}(t, s) - \zeta \\ f(t, s) &= \exp\left(\pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4}\right) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\iint_{\Omega_1} \exp(NV_N(t, s) - N\zeta) dt ds = \left(\iint_{\Omega_1} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right).$$

Ainsi :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{5/2} q \left(\iint_{\Omega_1} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

■

Finalement, on combine tous nos résultats pour démontrer la conjecture. La stratégie de démonstration adoptée ici diffère de celle d'Ohtsuki [5] (chap. 5). Ce dernier applique directement une méthode de la plus grande pente à l'intégrale double, sans recourir à l'astuce de Pinna et Viola. Notre approche repose au contraire sur la méthode de Perron généralisée. Cependant, elle nécessite également une déformation préalable de la surface d'intégration puisque la géométrie particulière du problème ne permet pas d'appliquer directement notre méthode. Mais celle-ci est moins exigeante et permet d'appliquer notre méthode bien plus générale.

Théorème 4.30.**Conjecture du volume pour le nœud 5_2**

On a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \ln |\langle 5_2 \rangle_N| = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2)$$

Démonstration. D'après la proposition 4.29, on peut écrire l'invariant de Kashaev sous la forme :

$$\langle 5_2 \rangle_N = e^{N\zeta} N^{5/2} q \left(\iint_{\Omega_1} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

où $\varphi(t, s) = \widehat{V}(t, s) - \zeta$ et $f(t, s) = \exp\left(\pi i(t + s) - \frac{3\pi i}{4}\right)$.

On souhaite donc appliquer le théorème de Perron en dimension 2 à l'intégrale.

Les fonctions φ et f sont holomorphes sur Ω_1 et indépendantes de N . Étudions la géométrie de φ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) &= \log(1 - e^{2\pi i t}) - 2\pi i \left(t + s - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) &= -2 \log(1 - e^{2\pi i s}) - 2\pi i(t + 2s - 1) = 0 \end{aligned}$$

Posons $x = e^{2\pi i t}$ et $y = e^{2\pi i s}$. En passant à l'exponentielle, le système devient :

$$\begin{aligned} 1 - x &= -xy \implies x = \frac{1}{1 - y}, \\ (1 - y)^{-2} &= xy^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{(1 - y)^2} = \frac{y^2}{1 - y} \implies \frac{1}{1 - y} = y^2 \implies y^3 - y^2 + 1 = 0.$$

Si de plus, $\Im(y) > 0$. Alors l'unique solution du système est exactement (x_0, y_0) , le couple posé précédemment. Les coordonnées du point col $z_0 = (t_0, s_0)$ en découlent alors :

$$t_0 = \frac{1}{2\pi i} \log\left(\frac{1}{1 - y_0}\right) \quad \text{et} \quad s_0 = \frac{1}{2\pi i} \log(y_0).$$

Numériquement, cela donne :

$$t_0 \approx 0.2240 - 0.0448i, \quad s_0 \approx 0.1120 - 0.0224i.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} H_1 &= \mathcal{H}_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_0, s_0) = \frac{-2\pi i x_0}{1 - x_0} - 2\pi i = 2\pi i \frac{1 - y_0}{y_0}, \\ H_2 &= \mathcal{H}_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(t_0, s_0) = \frac{4\pi i y_0}{1 - y_0} - 4\pi i = 4\pi i \left(\frac{2y_0 - 1}{1 - y_0} \right), \\ \mathcal{H}_{12} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t_0, s_0) = -2\pi i. \end{aligned}$$

Donc :

$$H = \left(2\pi i \frac{1 - y_0}{y_0} \right) \left(4\pi i \frac{2y_0 - 1}{1 - y_0} \right) - (-2\pi i)^2 = 4\pi^2 \left(\frac{2 - 3y_0}{y_0} \right).$$

En particulier, comme $y_0 \notin \{0, 1, 2/3\}$, on a $H_1 \neq 0$ et $H \neq 0$. Le point col z_0 est donc admissible.

On résout $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) = \log(1 - e^{2\pi i t}) - 2\pi i \left(t + s - \frac{1}{2} \right) = 0$ selon t . L'équation $1 - e^{2\pi i t} = -e^{2\pi i(t+s)}$ donne $e^{-2\pi i t} - 1 = -e^{2\pi i s}$, d'où $e^{-2\pi i t} = 1 - e^{2\pi i s}$ ce qui implique $e^{2\pi i t} = \frac{1}{1 - e^{2\pi i s}}$.

La fonction implicite est donc définie par :

$$Z_{1,1}(s) = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{1}{1 - e^{2\pi i s}} \right), \quad \text{avec } Z_{1,1}(s_0) = t_0.$$

On pose donc $\tilde{\varphi}_1(s) = \varphi(Z_{1,1}(s), s)$. Le point s_0 est un point col, et par le lemme ?? on a :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial s^2}(s_0) = \frac{H_2(t_0, s_0)}{H_1(t_0, s_0)} = \frac{4\pi^2 \frac{2-3y_0}{y_0}}{2\pi i \frac{1-y_0}{y_0}} = 2\pi i \left(\frac{3y_0 - 2}{1 - y_0} \right).$$

Les angles caractéristiques des vallées sont :

$$\begin{aligned} \text{— } \theta_t &= \frac{\pi - \arg(H_1)}{2} \\ \text{— } \theta_s &= \frac{\pi - \arg(H_2/H_1)}{2} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.04 \leq t \leq 0.4, 0.05 \leq s \leq 0.4, t + s \leq 0.6\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.05 \leq v \leq 0.4, 0.04 \leq u \leq \min(0.4, 0.6 - v)\} \end{aligned}$$

Posons les fonctions :

$$\begin{aligned} s(v) &= s_0 + e^{i\theta_s} \frac{v - \Re(s_0)}{\cos \theta_s} \\ t(u, s) &= Z_{1,1}(s) + e^{i\theta_t} \frac{u - \Re(Z_{1,1}(s))}{\cos \theta_t} \end{aligned}$$

On définit alors les chemins de paramétrage :

$$\gamma_s : \begin{cases} [0.05, 0.4] \longrightarrow \mathbb{C} \\ v \longmapsto s(v) \end{cases}$$

$$\gamma_t(s) : \begin{cases} [0.04, \min(0.4, 0.6 - \Re(s))] \longrightarrow \mathbb{C} \\ u \longmapsto t(u, s) \end{cases}$$

Enfin :

$$F : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, v) \longmapsto (\gamma_t(\gamma_s(v))(u), \gamma_s(v)) \end{cases}$$

Comme $e^{i\theta}/\cos\theta = 1 + i\tan\theta$, on a : $\Re(s(v)) = v$ et $\Re(t(u, s)) = u$.

Ainsi, $\Re(F(u, v)) = (u, v)$.

Posons : $\Sigma = F(\Omega_1)$.

On a $(\Re(t_0), \Re(s_0)) \approx (0.224, 0.112) \in \Omega_1$ donc $F(\Re(t_0), \Re(s_0)) = (t_0, s_0) \in \Sigma$.

Considérons la 2-forme différentielle :

$$\omega_N = f(t, s)e^{N\varphi(t, s)}dt \wedge ds.$$

Les fonctions f et φ sont holomorphes sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(t, s) \mid t \in \mathbb{Z} \text{ ou } s \in \mathbb{Z}\}$. La forme ω_N est donc fermée : $d\omega_N = 0$.

Posons l'homotopie :

$$H : \begin{cases} \Omega_1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, v, \tau) \longmapsto (1 - \tau)(u, v) + \tau F(u, v) \end{cases}$$

Par construction, pour tout $(u, v) \in \Omega_1$ et $\tau \in [0, 1]$, on a $\Re(H(u, v, \tau)) = (u, v)$. Donc en notant $C = H(\Omega_1 \times [0, 1])$, on a $\Re C = \Omega_1$. Comme $\Omega_1 \subset [0.04, 0.4] \times [0.05, 0.4]$, on a $\Re(t) \notin \mathbb{Z}$ et $\Re(s) \notin \mathbb{Z}$ pour tout point de C .

Donc par le théorème de Stokes, on a :

$$\iiint_C d\omega_N = \iint_{\partial C} \omega_N.$$

Puisque $d\omega_N = 0$, on obtient :

$$\iint_{\partial C} \omega_N = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \partial C &= H(\Omega_1 \times \{1\}) - H(\Omega_1 \times \{0\}) + H(\partial\Omega_1 \times [0, 1]) \\ &= \Sigma - \Omega_1 + H(\partial\Omega_1 \times [0, 1]) \end{aligned}$$

Donc :

$$\iint_{\Omega_1} \omega_N = \iint_{\Sigma} \omega_N + \iint_{H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])} \omega_N.$$

L'ensemble $H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])$ est compact en tant qu'image du compact $\partial\Omega_1 \times [0, 1]$ par la fonction continue H . La fonction $(t, s) \mapsto \Re(\varphi(t, s))$ y atteint par conséquent un maximum M . De plus, par construction de l'homotopie, tout point $(t, s) \in H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])$ vérifie

$(\Re(t), \Re(s)) \in \partial\Omega_1$. Or, le col global a pour partie réelle $(\Re(t_0), \Re(s_0)) \approx (0.224, 0.112) \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1$. Puisque (t_0, s_0) est l'unique maximum global de $\Re(\varphi)$ et que $\Re(\varphi(t_0, s_0)) = 0$, l'altitude maximale sur $\partial\Omega_1$ bord est strictement inférieure à celle du sommet. Donc sur $H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])$ aussi. Ainsi, on a $M < 0$.

Posons $\delta = -M > 0$.

Notons $M_f = \sup_{H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])} |f(t, s)|$ et $\mathcal{A}$ l'aire finie de la surface $H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])$, on obtient la majoration :

$$\left| \iint_{H(\partial\Omega_1 \times [0, 1])} \omega_N \right| \leq \mathcal{A} \cdot M_f \cdot e^{NM} = \mathcal{O}(e^{-\delta N}).$$

Ainsi, on a :

$$\iint_{\Omega_1} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds = \iint_{\Sigma} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds + \mathcal{O}(e^{-\delta N}) \quad \text{avec } \delta > 0.$$

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f e^{N\varphi} dt ds &= \int_{\gamma_s} \int_{\gamma_t(s)} f(t, s) e^{N\varphi(t, s)} dt ds \\ &= \int_{0.05}^{0.4} \gamma'_s(v) \left(\int_{0.04}^{\min(0.4, 0.6-v)} f(\gamma_t(\gamma_s(v))(u), \gamma_s(v)) \right. \\ &\quad \left. \times e^{N\varphi(\gamma_t(\gamma_s(v))(u), \gamma_s(v))} \gamma_t(\gamma_s(v))'(u) du \right) dv \end{aligned}$$

Pour tout $s = \gamma_s(v)$ fixé, le chemin $u \mapsto \gamma_t(s)(u)$ est une droite affine passant par le col local $Z_{1,1}(s)$ et dirigée par le vecteur $e^{i\theta_t}$. Donc par construction géométrique, $\gamma_t(s)$ traverse $Z_{1,1}(s)$ de vallée en vallée de $t \mapsto \varphi(t, s)$.

De la même façon, $v \mapsto \gamma_s(v)$ est une droite affine passant par s_0 et dirigée par le vecteur $e^{i\theta_s}$. Donc par construction, γ_s traverse s_0 de vallée en vallée de $\tilde{\varphi}_1 : s \mapsto \varphi(Z_{1,1}(s), s)$.

On peut ainsi appliquer la méthode de Perron passant par un point col non dégénéré généralisé 3.9 :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f e^{N\varphi} dt ds &\underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(\theta_t + \theta_s)} f(t_0, s_0) e^{N\varphi(t_0, s_0)} \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{N^2 |H(t_0, s_0)|}} \\ &\underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(\theta_t + \theta_s)} f(t_0, s_0) \frac{2\pi}{N \sqrt{|H(t_0, s_0)|}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\iint_{\Omega_1} f e^{N\varphi} dt ds \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(\theta_t + \theta_s)} f(t_0, s_0) \frac{2\pi}{N \sqrt{|H(t_0, s_0)|}}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle 5_2 \rangle_N &\underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{N\zeta} N^{5/2} \times \left(e^{i(\theta_t + \theta_s)} f(t_0, s_0) \frac{2\pi}{N \sqrt{|H(t_0, s_0)|}} \right) \\ &\underset{N \rightarrow \infty}{\sim} C_0 \cdot N^{3/2} e^{N\zeta}, \end{aligned}$$

où :

$$C_0 = \frac{2\pi e^{i(\theta_t + \theta_s)} f(t_0, s_0)}{\sqrt{|H(t_0, s_0)|}} \neq 0$$

De cette façon, on a :

$$\begin{aligned} \ln |\langle 5_2 \rangle_N| &= \ln \left| C_0 \cdot N^{3/2} e^{N\zeta} \cdot (1 + o(1)) \right| \\ &= \ln |C_0| + \frac{3}{2} \ln N + N\Re(\zeta) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \ln |\langle 5_2 \rangle_N| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi \ln |C_0|}{N} + 2\pi \frac{3 \ln N}{2N} + 2\pi \Re(\zeta) + o\left(\frac{1}{N}\right) \right) \\ &= 2\pi \Re(\zeta). \end{aligned}$$

On reconnaît le volume du complémentaire du nœud 5_2 , ce qui achève la démonstration :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \ln |\langle 5_2 \rangle_N| = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 5_2)$$

■

Références

- [1] C. O’Sullivan, *Revisiting the saddle-point method of Perron*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 298, p. 157–199, 2019.
- [2] M. V. Fedoryuk, *Asymptotic Methods in Analysis*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.13, Springer, Berlin, 1989, p. 83–191.
- [3] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, Academic Press, Boston, 1989.
- [4] F. Pinna, C. Viola, *The saddle-point method in $\mathbb{C}^N$ and the generalized Airy functions*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 147, no. 2, p. 221–257, 2019.
- [5] T. Ohtsuki, *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the 5_2 knot*, Quantum Topology, vol. 7, no. 4, p. 669–735, 2016.
- [6] M. Hata, *C^2 -saddle method and Beukers’ integral*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 10, 4557–4583.
- [7] O. Lafitte, *Opérateurs intégraux de Fourier et asymptotiques pour les ondes*, Doctorat. France. 1996.