

Feuille d'exercices 1 : révisions  
(Formule de Cauchy, compléments et conséquences)

Échauffement sur les fonctions holomorphes

**Exercice 1** Quels sont les zéros de la fonction entière  $z \mapsto \cosh(z)$  ? Cette fonction est-elle bornée ?

**Exercice 2** On considère la fonction entière  $f(z) = z^2 \sin(z)$ .

1. Déterminer l'ensemble  $Z(f)$  des zéros de  $f$ .
2. Pour tout  $a \in Z(f)$  donner le développement en série entière de  $f$  en  $a$  en précisant le rayon de convergence. En déduire l'ordre de  $a$ .

**Exercice 3** Montrer que si  $f = P + iQ$  est une fonction holomorphe dans un domaine  $U$  de  $\mathbb{C}$  et  $|f|$  est constant sur  $U$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ . (*Indication : dériver  $|f|$ .*)

**Exercice 4** Soit  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  le plan fendu et soit  $Q = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ . Pour tout  $z \in U$  on pose

$$\text{Log}(z) := \int_{[1,z]} \frac{du}{u}.$$

1. Montrer que pour tout  $z \in U$  on a  $\exp(\text{Log}(z)) = z$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $\text{Log}(x) = \ln(x)$ .
3. Montrer que pour tout  $(z_1, z_2) \in Q^2$ , on a  $z_1 z_2 \in U$ .
4. On fixe  $u \in Q$ , et on définit  $f_u(z) := \text{Log}(z) + \text{Log}(u)$  et  $g_u(z) := \text{Log}(zu)$ . Montrer que  $f_u$  et  $g_u$  sont deux fonctions holomorphes sur  $Q$  et qu'elles coïncident.
5. A-t-on  $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$  pour tout  $(z_1, z_2) \in U^2$  ?
6. Montrer qu'il n'existe aucun ouvert  $U'$  contenant  $U$  strictement et tel que  $\text{Log}$  admette un prolongement analytique à  $U'$ .

**Exercice 5** Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes au voisinage de 0 vérifiant

1.  $f(1/n) = (1/2n) + 1$  pour tout  $n \geq 1$ .
2.  $f(1/n) = e^{-n}$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 6** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On pose  $F(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ .

1. Montrer que  $F$  est une fonction entière.
2. Montrer que pour tout  $\rho \in ]0, R[$ , il existe  $M(\rho) \geq 0$  tel que  $|F(z)| \leq M(\rho)e^{\frac{|z|}{\rho}}$ .

### Entraînement

**Exercice 7** Soient  $R > 0$  et  $a \in \mathbb{C}$ . Calculer, suivant la valeur de  $|a|$ , l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}(0;R)} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3} dz.$$

**Exercice 8** Soit  $U$  un domaine étoilé et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe.

1. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
  - (a) La fonction  $f$  ne s'annule pas sur  $U$ .
  - (b) Il existe une fonction  $g$  holomorphe sur  $U$  telle que  $\exp(g(z)) = f(z)$  pour tout  $z \in U$ .
2. Déterminer l'ensemble des fonctions holomorphes  $h$  sur  $U$  telles que  $\exp(h(z)) = f(z)$  pour tout  $z \in U$ .

**Exercice 9** Soit  $0 < r < R$  et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $D(0, R[$  telle que  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in D(0, r]$ .

1. Montrer qu'il existe  $\rho \in ]r, R[$  tel que  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in D(0, \rho[$ .
2. En appliquant l'exercice précédent à  $U = D(0, \rho[$ , montrer que

$$\text{Log}(|f(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}(|f(re^{it})|) dt.$$

**Exercice 10** ( $\mathcal{H}(U)$  est un anneau intègre) Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $U$ . Démontrer que si  $fg$  est la fonction nulle, alors au moins une des deux fonctions  $f$  et  $g$  est nulle. Est-ce encore vrai si  $U$  est un ouvert non nécessairement connexe? Et si l'on suppose seulement que  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ?

**Exercice 11** Soit  $f = P + iQ$  une fonction holomorphe. Montrer que  $P$  et  $Q$  sont des fonctions harmoniques, ie. dans le noyau de  $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ .

**Exercice 12** On note  $\mathbb{D}$  le disque unité. Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe telle que  $f(0) = 0$ .

1. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|f(z)| \leq |z|$  et  $|f'(0)| \leq 1$ .
2. On suppose qu'il existe  $z_0 \in \mathbb{D}$ , non nul, tel que  $|f(z_0)| = |z_0|$ . Montrer qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $f(z) = e^{i\theta}z$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .
3. On suppose que  $|f'(0)| = 1$ . Montrer encore que  $f$  est une rotation de centre 0.

**Exercice 13** On note  $\mathbb{D}$  le disque unité, et on fixe  $\alpha \in \mathbb{D}$ .

1. Montrer que l'application  $z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$  définit un biholomorphisme  $\varphi_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dont la réciproque est  $\varphi_{-\alpha}$ .
2. En déduire que si  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est une fonction holomorphe et  $\alpha \in \mathbb{D}$  est un zéro de  $f$ , alors  $|f(z)| \leq \left| \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right|$  sur  $\mathbb{D}$ .

**Exercice 14** Soit  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. Montrer que  $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$ , et que si  $F$  n'est pas injective, alors l'inégalité est stricte. (Indication : utiliser les deux exercices précédents.)

**Exercice 15** Soit  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et continue sur  $\bar{\mathbb{D}}$ , qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{D}$  et vérifie :  $|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 16** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et soit  $r \in ]0, 1[$ . On suppose qu'il existe  $z_0 \in D(0, r[$  tel que  $f(z_0) = 0$ . En écrivant les formules de Cauchy aux points 0 et  $z_0$ , montrer que

$$|z_0| \geq \frac{r|f(0)|}{M + |f(0)|}$$

où  $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Exercice 17** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur le disque ouvert  $D(0, R[$  et continue sur  $D(0, R]$ . On pose  $M = \sup_{|z|=R} |f(z)|$ .

1. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, redémontrer le résultat suivant : pour tout  $n \geq 0$  et tout  $z \in D(0, R[$ , on a

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0;R)} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du.$$

2. Déduire que

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2 + |z|^2 - 2R|z| \cos(\varphi))^{\frac{n+1}{2}}}.$$

3. Déduire par exemple que  $|f'(z)| \leq \frac{MR}{(R-|z|)^2}$  pour tout  $z \in D(0, R[$ .

**Exercice 18** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur  $U$  telle que :

- $(f_n)$  converge simplement sur  $U$  vers une fonction  $f$  ;
- $\exists M \geq 0$  telle que  $|f_n(z)| \leq M$  pour tout  $n$  et pour tout  $z \in U$ .

Soit  $z_0 \in U$  et  $R > 0$  tel que  $D(z_0, R[ \subset U$ .

1. Montrer que  $\forall a \in D(z_0, R[$  on a  $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz$ , où  $\mathcal{C}(z_0, r)$  est le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r \in ]|z_0 - a|, R[$ .
2. Déduire que  $f$  est continue sur  $D(z_0, R[$ , puis qu'elle est continue sur  $U$ .
3. Montrer que pour tout  $z \in D(z_0, R[$ , on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

4. Dédurre que  $f$  est holomorphe sur  $U$ .

**Exercice 19** Montrer que la fonction  $f(z) := \int_0^1 \frac{\sin(zt)}{t} dt$  est une fonction entière :

1. Par application du critère de Morera.
2. En écrivant le développement en série de  $f$ .

Montrer aussi avec ces deux méthodes que  $f'(z) = \int_0^1 \cos(zt) dt$ .

**Exercice 20** Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$  et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction holomorphe telle que pour tout lacet  $\Gamma \subset U$ ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\mathbb{Z}.$$

Soit  $z \in U$ .

1. Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\frac{1}{2} \frac{f'}{f}$  possède des primitives dans  $D(z, r[$ .
2. On fixe  $a \in U$ , et on considère pour tout arc orienté  $\Gamma_z \subset U$  de source  $a$  et de but  $z$ , le nombre complexe  $F(z)$  défini par

$$F(z) := \exp \left( \int_{\Gamma_z} \frac{1}{2} \frac{f'(u)}{f(u)} du \right).$$

Montrer que  $F(z)$  est un complexe non nul qui ne dépend pas du choix de  $\Gamma_z$ .

3. Montrer que pour tout  $u \in D(z, r[$ ,  $F(u) = F(z)e^{G(u)}$ , où  $G$  est une primitive de  $\frac{1}{2} \frac{f'}{f}$  sur  $D(z, r[$ .
4. Dédurre de ce qui précède que  $F$  est une fonction holomorphe sur  $U$ , et que  $\frac{F'}{F} = \frac{1}{2} \frac{f'}{f}$ .
5. Montrer finalement que  $\frac{f}{F^2}$  est une fonction constante sur  $U$ , et conclure que  $f$  possède une racine carrée holomorphe sur  $U$ .
6. (\*) *Exemple.* Déterminer un domaine maximal  $U \subset \mathbb{C}$  sur lequel la fonction  $f(z) = z(z-1)$  possède une racine carrée holomorphe.

**Exercice 21** Soit  $f$  une fonction entière telle que  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$ .

1. Montrer que  $f$  admet un nombre fini de zéros. On les note  $a_1, \dots, a_N$ , et  $m_1, \dots, m_N$  leurs multiplicités.
2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$  par

$$g(z) := \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^N (z - a_i)^{m_i}}.$$

Montrer que  $g$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  qui ne s'annule pas.

3. On pose  $h := 1/g$ . Montrer qu'il existe des constantes  $M \geq 0$  et  $C \geq 0$  telles que  $|z| \geq M \Rightarrow |h(z)| \leq C|z|^d$ , où  $d = \sum_{i=1}^N m_i$ .
4. Dédurre que  $h$  est constante et conclure que  $f$  est un polynôme.

**Exercice 22** Montrer que le corps des complexes est algébriquement clos, ie. tout polynôme non constant admet au moins un zéro.

**Exercice 23** Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  tel que  $|P(z)| \leq 1$  pour  $|z| \leq 1$ .

1. Montrer que tous les coefficients de  $P$  sont bornés par 1.
2. Montrer que pour tout  $z$  tel que  $|z| \geq 1$ , on a  $|P(z)| \leq |z|^n$ .
3. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Montrer que pour  $|z| \geq 1$ , on a

$$|P(z)| \leq |z|^n \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

**Exercice 24** Soit  $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$  converge uniformément sur tout compact de  $U$ .  
On pose alors

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in U.$$

2. Montrer que  $f$  est une fonction holomorphe sur  $U$  et périodique de période 1.
3. Soit  $b > 0$  et soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|\Im(z)| \geq b$ . Montrer que

$$|f(z)| \leq 2 \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + n^2}.$$

4. Montrer que  $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  pour tout  $z \in U$ .
5. Dédurre l'égalité suivante, valable pour tout nombre complexe non entier :

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi z).$$

**Exercice 25** Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une application holomorphe. On suppose qu'il existe  $a, b \in \mathbb{D}$  tels que  $a \neq b$ ,  $f(a) = a$  et  $f(b) = b$ . L'objectif est de montrer que  $f$  est l'application identité de  $\mathbb{D}$ .

1. Montrer que si  $a = 0$  ou  $b = 0$  alors  $f = id$ . On suppose désormais que  $ab \neq 0$ .
2. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{D}$ , l'application  $B_\alpha : z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$  est une fonction bijective bi-holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ .
3. On pose  $g := B_\alpha \circ f \circ B_{-\alpha}$ .

(a) Montrer que  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , que  $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  et que

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right) = \frac{b-a}{1-\bar{a}b}.$$

(b) Dédurre que  $g$  est l'application identité de  $\mathbb{D}$ .

4. Conclure.

**Exercice 26 (Principe de réflexion de Schwarz)** Soient  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$  symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On note

$$U_+ := U \cap \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}, \quad \underline{U}_+ := U \cap \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) \geq 0\}.$$

Soit  $f : \underline{U}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $U_+$ , continue sur  $\underline{U}_+$ , et telle que  $f(\underline{U}_+ \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $g|_{U_+} = f$ .

(Indication : On pourra construire  $g$  à l'aide de l'application  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ , puis montrer que  $g$  est holomorphe à l'aide d'un critère vu en cours).

Feuille d'exercices 2 :  
Singularités, méthode des résidus, théorème de Rouché

Application du cours et échauffement

**Exercice 1** Pour les fonctions suivantes, déterminer tous les points singuliers, leur nature, ainsi que le résidu en ces points :

$$f_1(z) := \frac{z}{\cos(z)} \quad , \quad f_2(z) := e^{1/z^2} \quad , \quad f_3(z) := z \sinh(1/z) \quad , \quad f_4(z) := \frac{1}{z(e^z - 1)}$$
$$f_5(z) := e^{z+z^{-1}} \quad , \quad f_6(z) := \frac{1}{\sin(1/z)} \quad , \quad f_7(z) := \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}.$$

**Exercice 2** Donner la nature des singularités des fonctions suivantes  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  :

- (a)  $U := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) := \cotan(z) - \frac{1}{z}$ .  
(b)  $U := D(i\pi, 1) \setminus \{i\pi\}$ ,  $f(z) := \frac{z}{e^z + 1}$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  une fonction méromorphe dans un ouvert  $U$  ayant un nombre fini de pôles  $z_1, \dots, z_N$  d'ordres respectifs  $m_1, \dots, m_N$ . Montrer qu'il existe une fonction  $g$  holomorphe sur  $U$  telle que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_N)^{m_N}} \quad , \quad \forall z \in U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}.$$

**Exercice 4** Soit  $\Gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon 2 parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer

$$I := \int_{\Gamma} \frac{5z^2 + 1}{z(z - 1)} dz.$$

Même exercice avec  $\Gamma$  cette fois de rayon 3/2 et  $I := \int_{\Gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz$ .

**Exercice 5** Développer la fonction  $f(z) := \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+i)(z-i)}$  en série de Laurent au point  $z_0 = 2$ , puis dans la couronne  $1 < |z| < 2$ .

**Exercice 6** Déterminer les séries de Laurent de la fonction  $f(z) := \frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$  dans les domaines  $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}, 2 < |z| < 3\}$  et  $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 3\}$ .

**Exercice 7** Déterminer les trois premiers coefficients non nuls des séries entières de la fonction  $f(z) := \tan(z)$  en  $z_0 = 0, \pi/4$  et  $i\pi$ . Quels sont les rayons de convergence ?

**Exercice 8** Déterminer les coefficients  $a_j$ , pour  $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ , de la série de Laurent de  $f(z) := \tan(z)$  au point  $z_0 = \pi/2$ , puis dans le domaine  $U = \{z \in \mathbb{C}, 2 < |z| < 3.5\}$ . Quel est le domaine de convergence de la série de Laurent en  $z_0 = \pi/2$ ?

**Exercice 9** Quelles sont les fonctions holomorphes  $f$  sur  $\mathbb{D}$  telles que  $|f|$  est constante?  $\Re(f)$  est constante?

### Entraînement

**Exercice 10** Soit  $a \geq 0$ . En considérant  $f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$  et le lacet orienté positivement  $\Gamma_R$  qui est la réunion du segment  $[-R, R]$  et du demi-cercle  $\{|z| = R, \Im(z) \geq 0\}$ , calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

(2) Retrouver la valeur de  $\hat{h}(\xi)$  pour  $h(x) := \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

**Exercice 11** Calculer par une méthode similaire l'intégrale (on commencera par justifier son existence)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx.$$

**Exercice 12** Soit  $n \geq 2$ . En intégrant le long de la frontière du secteur  $0 < |z| < R$ ,  $0 < \arg(z) < 2\pi/n$ , montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Calculer par une méthode similaire l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^n} dx$  pour  $n > p + 1 > 0$ .

**Exercice 13** Soit  $R_N$  le bord du carré dont les sommets ont pour affixes  $N(1+i)$ ,  $N(1-i)$ ,  $N(-1-i)$ ,  $N(-1+i)$  ( $N \geq 1$ ), parcouru dans le sens positif. Exprimer l'intégrale  $\int_{R_N} \frac{\pi}{z^3 \cos(\pi z)} dz$ , puis calculer sa limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , et en déduire l'identité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Exercice 14** Calculer l'intégrale  $\int_{|z-1|=2} \frac{e^z + e^{1/z}}{z(z-1)} dz$ .

**Exercice 15** Calculer avec le théorème des résidus les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 + \cos(x)} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + x + 1} dx \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(x)} dx.$$

**Exercice 16** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > e$ . Prouver que l'équation  $az^n - e^z = 0$  possède  $n$  racines simples dans le disque unité  $\mathbb{D}$ .

**Exercice 17** Déterminer le nombre de zéros du polynôme  $P(z) = z^7 - 5z + 2$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$ , puis dans la couronne  $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ .

**Exercice 18** Démontrer que le polynôme  $Q(z) = z^4 + iz^3 + 1$  a exactement une racine dans le premier quadrant  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0, \Im(z) \geq 0\}$ , mais quatre racines dans le disque  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 3/2\}$ .

**Exercice 19 (Une autre formulation du théorème de Rouché)** Soient  $D$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $D$ , et  $\Gamma$  une courbe de Jordan contenue dans  $D$  ainsi que son intérieur. On suppose que

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \forall z \in \Gamma.$$

On note  $\mathcal{Z}_\Gamma(f)$  (resp.  $\mathcal{Z}_\Gamma(g)$ ) l'ensemble des zéros de  $f$  (resp.  $g$ ) contenus dans l'intérieur de  $\Gamma$ .

1. Posons  $h(z) := f(z)/g(z)$ . Montrer que l'intégrale

$$I_t := \int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z) - t} dz, \quad t \geq 0,$$

est bien définie, et qu'elle ne dépend pas de  $t$ .

2. En déduire que  $\text{Card}(\mathcal{Z}_\Gamma(f)) = \text{Card}(\mathcal{Z}_\Gamma(g))$ .

**Exercice 20 (Plus dur...)** Calculer l'intégrale

$$I := \int_\Gamma \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz, \quad \Gamma := [1 + i] - \infty, +\infty[.$$

Dans un premier temps on choisira une détermination de  $\sqrt{z}$ , et on calculera l'intégrale de  $\frac{e^z}{\sqrt{z}}$  le long d'un lacet orienté obtenu en déformant le bord du demi-disque de centre 1 et de rayon  $R$  situé à gauche de la droite  $\Gamma$ ; la déformation doit être faite de sorte à ce que le lacet reste dans le domaine d'holomorphicité de  $\sqrt{z}$ .

**Feuille d'exercices 3 :**  
**Représentation conforme, théorèmes de Montel et Riemann**

**Exercice 1** Rappelons le résultat suivant (cf. exercice 21, feuille de TD1) : toute fonction entière  $f$  telle que  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$  est un polynôme.

1. Montrer que tout  $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  vérifie  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$ .
2. En déduire que  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  est exactement l'ensemble des transformations affines,  $z \mapsto az + b$  avec  $a \neq 0$ .

**Exercice 2** Soit  $S := \{z \in \mathbb{D}, \Im(z) > 0\}$ .

1. Justifier que  $S$  est un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ .
2. On pose  $g(z) := 1/(z+1)$ . Vérifier que  $g$  est une application holomorphe univalente sur  $S$ , et déterminer  $g(S)$ .
3. Trouver une application conforme qui transforme  $S$  en le quart de plan supérieur droit.

**Exercice 3** Soit  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ , le demi-plan de Poincaré. On note

$$h_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

1. Montrer que  $h_\alpha$  est une transformation holomorphe sur son domaine, qui envoie  $\mathbb{H}$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$ , et  $\mathbb{R}$  dans le cercle unité  $\mathbb{S}^1$ .
2. Montrer que  $h_\alpha$  est un isomorphisme analytique de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{D}$ .
3. Soit  $f$  un isomorphisme analytique de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{D}$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{H}$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tels que  $f = R_\theta \circ h_\alpha$ , où  $R_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta$ .

(Indication : on pourra combiner la description de  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  vue en cours, et la question 2.)

4. En raisonnant de manière analogue montrer que les automorphismes analytiques de  $\mathbb{H}$  sont des homographies, puis qu'elles sont de la forme

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

(Indication pour la seconde question : on pourra commencer par montrer qu'un automorphisme de  $\mathbb{H}$  fixe  $\mathbb{R}$  globalement, puis que pour toute paire de triplets de points distincts  $\mathbb{R}$  il existe un automorphisme de  $\mathbb{H}$  qui envoie l'un des triplets sur l'autre. On en déduira que  $a, b, c, d$  peuvent être choisis dans  $\mathbb{R}$ .)

5. Quelle est l'image de  $\mathbb{H}$  par une transformation homographique  $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  satisfont cette fois  $ad - bc < 0$  ?

**Exercice 4** À l'aide de l'exercice précédent, trouver tous les automorphismes analytiques :

1. du premier quadrant,  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$  ;
2. du demi-plan droit  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ .

**Exercice 5** 1. Existe-t-il un biholomorphisme entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C}$  ? Existe-t-il une surjection holomorphe de  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{C}$  ?

2. (\*\*) À l'aide du principe de symétrie de Schwarz (cf. TD1), montrer qu'il n'existe pas de surjection holomorphe propre de  $\mathbb{D}$  (ou  $\mathbb{H}$ ) sur  $\mathbb{C}$ .

(Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et commencer par montrer qu'une telle application doit nécessairement se prolonger continuellement à  $\mathbb{R}$ .)

**Exercice 6** Trouver une transformation conforme envoyant  $U$  sur le disque unité  $\mathbb{D}$  dans les deux cas suivants : (1)  $U := \{-2 < \Re(z) < 1\}$ , et (2)  $U := \mathbb{D} \setminus [0, 1[$ .

**Exercice 7** Montrer que l'application  $h(z) := 2z + 1/z$  est une transformation conforme de l'extérieur du disque unité sur l'extérieur de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ . Ensuite, trouver une transformation conforme de l'extérieur de cette ellipse sur l'extérieur d'un segment réel.

(Indication pour la première question : quel est l'image d'un cercle par  $h$  ? Et pour la seconde question : que vaut  $h(\mathcal{C}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$  ?)

**Exercice 8** Montrer l'isomorphisme  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong PGL_2(\mathbb{C})$ , ie. que les automorphismes de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  sont exactement les homographies :

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{avec} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).$$

(Indication : utiliser la description des fonctions méromorphes sur  $\hat{\mathbb{C}}$  vue en cours.)

**Exercice 9 (Théorème de Vitali)** Soient  $U$  un domaine, et  $(f_n)$  une suite bornée de  $\mathcal{H}(U)$  qui converge simplement sur un ensemble  $E \subset U$  admettant un point d'accumulation. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur les compacts de  $U$ .

(Indication : commencer par montrer que les sous-suites convergentes de  $(f_n)$  ont toutes la même limite, puis raisonner par l'absurde.)

**Exercice 10 (Théorème de Hurwitz)** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe  $f$ .

1. On suppose que les  $f_n$  ne s'annulent pas dans  $\Omega$ . Montrer qu'on a l'alternative suivante : ou bien  $f$  ne s'annule pas, ou bien  $f$  est identiquement nulle.

(Indication : on pourra supposer  $f$  non identiquement nulle et ayant un zéro  $z_0$  dans  $U$ , étudier la convergence uniforme de  $(f'_n/f_n)$  au voisinage de  $z_0$ , et utiliser le principe de l'argument.)

2. On suppose maintenant que les  $f_n$  sont injectives. Montrer que  $f$  est soit injective, soit constante.

**Exercice 11 (Théorème d'Osgood)** On rappelle le théorème de Baire : dans tout espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Nous allons démontrer le théorème suivant :

*Soient  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur  $U$  qui converge simplement, et  $f$  sa limite. Alors  $f$  est holomorphe sur un ouvert dense de  $U$ .<sup>1</sup>*

Pour cela on fixe un disque fermé  $\bar{D} \subset U$  et on cherche à montrer que  $\bar{D}$  contient un ouvert sur lequel  $f$  est holomorphe.

1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on pose  $F_k := \{z \in \bar{D}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq k\}$ . Montrer que chaque  $F_k$  est fermé, et que  $\cup_{k \in \mathbb{N}} F_k = \bar{D}$ .
2. En déduire qu'il existe  $k_0$  tel que  $F_{k_0}$  est d'intérieur non vide, puis qu'il existe un petit disque ouvert  $D' \subset F_{k_0}$  tel que pour tout compact  $K \subset D'$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\|f_n\|_K \leq k_0$ .
3. Conclure à l'aide du théorème de Montel.

**Exercice 12 (Dynamique)** Soient  $U \subset \mathbb{C}$  un domaine borné et  $f: U \rightarrow U$  une application holomorphe. On suppose que  $f$  a un point fixe  $a$ . On note  $f_n$  la  $n$ -ième itérée de  $f$  (donc pour tout  $z \in U$ ,  $f_0(z) = z$  et  $f_{n+1}(z) = f(f_n(z))$ ).

1. Calculer  $f'_n(a)$ . (\*) En déduire que  $|f'(a)| \leq 1$  (*Indication : Montel pour  $(f_n)$  !*)
2. On suppose que  $|f'(a)| < 1$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $0 < C < 1$  et  $r > 0$  tels que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $z \in D(a, r[$  on a  $|f_n(z) - a| \leq C^n |z - a|$ .
  - (b) Montrer que  $(f_n)$  admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers la fonction constante égale à  $a$ .
  - (c) En déduire que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers la fonction constante égale à  $a$ .
3. On suppose que  $f'(a) = 1$ .
  - (a) On suppose que  $f \neq \text{Id}$ . Montrer qu'il existe une constante  $c \neq 0$  et un entier  $k \geq 2$  tels que pour tout entier  $n$  on ait

$$f_n(z) = z + nc(z - a)^k + o((z - a)^k)$$

au voisinage de  $a$ .

*(Indication : on pourra remarquer que  $f(z) - z$  a un zéro d'ordre  $\geq 2$  en  $a$ , puis procéder par récurrence.)*

- (b) En déduire que  $f$  est l'identité. (*Indication : que dire de la suite  $(f_n^{(k)}(a))$  ?*)
4. On suppose que  $|f'(a)| = 1$ . Montrer qu'il existe une suite croissante  $(p_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  telle que  $f'(a)^{p_n}$  converge vers 1. En déduire que  $(f_n)$  admet une sous-suite qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact.

---

1. C'est la version holomorphe du résultat suivant, application également classique du théorème de Baire : *Toute suite de fonctions continues définies sur un espace métrique complet et qui converge simplement a pour limite une fonction qui est continue sur un ouvert dense.*

5. (\*) Montrer que  $|f'(a)| = 1$  si, et seulement si,  $f$  est un biholomorphisme de  $U$ .

(Indication : pour la réciproque, utiliser la question 1 ; pour la partie directe, remarquer qu'il suffit de montrer que  $f$  est injective, puis utiliser la question 4 et le théorème d'Hurwitz)

**Exercice 13** Soient  $\alpha \in ]0, \pi]$ ,  $U_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^*, -\alpha < \arg(z) < \alpha\}$ , et  $f$  une fonction holomorphe bornée sur  $U_\alpha$  telle que

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in ]0, 1]} f(z) = \ell.$$

1. Posons  $f_n(z) = f(z/2^n)$  pour  $n \geq 1$ . Montrer que la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément sur les compacts de  $U_\alpha$  vers la fonction constante égale à  $\ell$ .

(Indication : montrer d'abord que  $(f_n)_n$  sous-converge dans  $\mathcal{H}(U_\alpha)$ , puis considérer les compacts qui intersectent  $]0, 1]$ .)

2. Montrer que pour tout  $0 < \beta < \alpha$  on a

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in U_\beta} f(z) = \ell.$$

**Exercice 14 (Une intégrale elliptique)** Soit  $K$  le carré de sommets  $1, i, -1$  et  $-i$ .

1. Montrer que la fonction :

$$\varphi: z \mapsto \int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

est définie et continue sur  $\overline{D(0, 1)}$ . Montrer qu'elle est holomorphe sur  $D(0, 1)$ .

2. (\*) Calculer  $\varphi(\partial D(0, 1))$ . En déduire que  $\lambda\varphi$  est un biholomorphisme entre  $D(0, 1)$  et l'intérieur de  $K$  pour un certain  $\lambda$  bien choisi.

Feuille d'exercices 4

**Exercice 1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques connexes par arcs, et deux points  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Montrer que le groupe  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  est isomorphe au produit direct  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .

**Exercice 2** Soit  $X$  un espace connexe par arcs. Rappeler la définition topologique de la simple connexité de  $X$ , puis montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes (utiliser la proposition 5.5.2 du cours) :

- (a)  $X$  est simplement connexe ;
- (b) toute application continue du cercle  $S^1$  dans  $X$  se prolonge continuellement en une application du disque  $D^2$  dans  $X$  ;
- (c) Il existe  $x \in X$  tel que  $\pi_1(X, x) = 0$  (notation pour le groupe trivial) ;
- (d)  $\pi_1(X, x) = 0$  pour tout  $x \in X$  ;
- (e) deux chemins de même origine et même extrémité sont homotopes (relativement aux extrémités).

**Exercice 3** Soit  $n \geq 1$  un entier. Montrer que  $\mathbb{R}^2$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \neq 2$ .

(Indication : raisonner par l'absurde, et comparer les groupes fondamentaux de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$  privés d'un point à l'aide de rétractions par déformation appropriées.)

**Exercice 4** On note  $D^2$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ , et  $S^1$  son bord.

1. En utilisant les groupes fondamentaux, montrer qu'il n'existe pas de rétraction  $r: D^2 \rightarrow S^1$ .
2. En déduire le théorème de Brouwer en dimension deux : toute application continue  $f$  de  $D^2$  dans  $D^2$  admet un point fixe.

(Raisonnez par l'absurde et considérez l'application qui à  $x \in D^2$  associe le point d'intersection de  $S^1$  et de la demi-droite ouverte  $\{f(x) + t(x - f(x)), t > 0\}$ .)

3. En appliquant ce théorème, montrer que toute matrice  $3 \times 3$  dont les coefficients sont strictement positifs a un vecteur propre de valeur propre strictement positive. (On pourra considérer le triangle  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$ , et l'application  $T \rightarrow T$  composée de l'application linéaire associée à la matrice et de la projection centrale sur  $T$ .)

**Exercice 5** À l'aide du théorème de Seifert-Van Kampen, calculer le groupe fondamental des espaces suivants :

1. le bouquet  $S^1 \vee S^2$  ;
2. le produit  $T^2 \times (S^1 \vee S^1)$ , où  $T^2 := S^1 \times S^1$  ;
3. le complémentaire de l'union de  $n$  droites vectorielles dans  $\mathbb{R}^3$  ;
4. le complémentaire d'un ensemble fini de points dans  $\mathbb{R}^3$  ;
5. (\*) l'espace quotient  $T^2 \coprod T^2 / ((x, 1) \sim (1, x), x \in S^1)$ .

**Exercice 6** On considère l'application  $p: S^1 \rightarrow S^1$  définie par  $p(z) = z^3$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on note  $\gamma_k: [0, 1] \rightarrow S^1$  le lacet défini par  $\gamma_k(s) = e^{2i\pi ks}$ .

1. Montrer que  $p$  est un revêtement de  $S^1$ .
2. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  déterminer le relèvement de  $\gamma_k$  d'origine 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $k$  pour que ce relèvement soit un lacet.
3. En utilisant un résultat du cours, interpréter ce résultat via le morphisme de groupes  $p_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ .

**Exercice 7** Montrer que l'application  $f: ]0, 3\pi[ \rightarrow S^1$  définie par  $f(t) = e^{it}$  est un homéomorphisme local, mais pas un revêtement.

**Exercice 8** Construire "à la main" (au moins) trois exemples non homéomorphes de revêtements de la lettre 8.

(Indication : classer les types (à homéo près) de voisinages des points de la lettre 8.)

**Exercice 9 (Le degré d'une application)** Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  une application continue. Pour tout  $y \in S^1$  on note

$$\text{deg}: \pi_1(S^1, y) \rightarrow \mathbb{Z}$$

l'isomorphisme de groupes défini dans le cours. Soit  $x \in S^1$ . Soit  $n_x \in \mathbb{Z}$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1, f(x)) \\ \downarrow \text{deg} & & \downarrow \text{deg} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n_x} & \mathbb{Z}. \end{array} \quad (1)$$

1. Montrer que pour tout chemin  $\gamma$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ , on a un diagramme commutatif de morphismes de groupes (où  $\beta_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\beta_\gamma} & \pi_1(S^1, y) \\ & \searrow \text{deg} & \swarrow \text{deg} \\ & & \mathbb{Z}. \end{array}$$

2. Montrer que le nombre  $n_x$  est indépendant de  $x$ . On l'appelle le degré de  $f$ , et on le note  $\text{deg}(f)$ . (On pourra "emboîter" des diagrammes tels que ci-dessus.)
3. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , calculer le degré de l'application  $z \mapsto z^n$ .
4. Montrer que  $\text{deg}(f) = (\text{deg} \circ f_*)([\omega_1])$ , où  $\omega_n: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi int}x$ . En déduire que pour tout relèvement  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  par l'application exponentielle, on a

$$\text{deg}(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0).$$

5. Montrer que  $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ . En déduire que si  $f$  est un homéomorphisme, alors  $\deg(f) = \pm 1$ .
6. Montrer que si  $\deg(f) \neq 0$ , alors  $f$  est surjective.  
 (\*) Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fautive.
7. Soient  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  deux applications continues. On va montrer que :  
 (H)  $f$  et  $g$  sont homotopes si, et seulement si, elles ont le même degré.
- (a) Soit  $R_\theta: S^1 \rightarrow S^1$  la rotation d'angle  $2\pi\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $R_\theta \circ f \simeq f$ , et  $\deg(f) = \deg(R_\theta \circ f)$ .
- (b) (\*\*) Supposons que  $f$  et  $g$  fixent le point  $(0, 1)$ . Démontrer (H) (on pourra utiliser la question 4 et les lacets  $f_1 = f \circ \exp: [0, 1] \rightarrow S^1$  et  $g_1 = g \circ \exp: [0, 1] \rightarrow S^1$ .)
- (c) Conclure.
8. Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  une application continue et paire, i.e. telle que  $f(z) = f(-z)$ . Montrer que  $\deg(f)$  est un entier pair.
9. Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  une application continue et impaire, i.e. telle que  $f(-z) = -f(z)$ . On va montrer que  $\deg(f)$  est impair. On raisonne par l'absurde.
- (a) Notons  $p: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ . Montrer qu'il existe  $g: S^1 \rightarrow S^1$  telle que  $p \circ f = g \circ p$ .
- (b) Montrer que si  $\deg(f)$  est pair, alors  $g$  se relève en une application  $\tilde{g}: S^1 \rightarrow S^1$  telle que  $p \circ \tilde{g} = g$ .
- (c) Montrer que  $\tilde{g} \circ p$  et  $f$  sont deux relevés de  $g \circ p$ , et que nécessairement ils coïncident en 1 ou en  $-1$ .
- (d) Conclure.
10. (Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2) Montrer que pour toute application continue  $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  il existe un point  $x \in S^2$  tel que  $F(x) = F(-x)$ .  
 (Indication : la restriction à  $S^1$  de l'application  $x \mapsto \frac{F(x)-F(-x)}{\|F(x)-F(-x)\|}$  est impaire.)
11. (Théorème de la boule chevelue en dimension 2) Montrer que tout champs de vecteurs continu  $v: S^2 \rightarrow TS^2$  s'annule en au moins un point.  
 (Indication : raisonner par l'absurde, et construire à l'aide de  $v$  une homotopie entre  $id_{S^2}$  et l'application antipodale  $-id_{S^2}$ . Conclure à l'aide de la question 7.)
12. (\*) Soient  $U$  un voisinage ouvert de  $\mathbb{D}$ , et  $g$  une fonction méromorphe sur  $U$ , avec un unique pôle ou zéro en 0, de multiplicité  $k$ . On note  $g_1 := g|_{S^1}$ . Montrer que

$$\text{Ind}(g(S^1), 0) = k = \deg \left( \frac{g_1}{|g_1|} \right).$$

(Indication : on pourra utiliser les questions 3 et 7.)

Généraliser ce résultat au cas où  $U$  est un domaine quelconque contenant 0.

**Exercice 10** (\*) Soient  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$ , et  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction holomorphe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in n\mathbb{Z}$  pour tout lacet  $\Gamma \subset U$ .

(ii) Il existe  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  holomorphe telle que  $f = \tilde{f}^n$ .

(Indication : considérer le morphisme  $f_*$  entre groupes fondamentaux, et le revêtement  $p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$ .)

L'équivalence de (i) et (ii) donne une interprétation topologique de l'Ex. 20 du TD1.

**Exercice 11** On considère sur la sphère unité  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  la relation définie par :

$$M \sim M' \Leftrightarrow M = M' \text{ ou } M = -M'.$$

(On dit que deux points  $M$  et  $M'$  de  $S^2$  sont antipodaux si  $M' = -M$ .)

1. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $S^2$ .

On note  $\mathbb{R}P^2$  l'ensemble quotient, et  $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  l'application quotient. On munit  $\mathbb{R}P^2$  de la topologie quotient, de sorte que  $p$  est continue.

2. Montrer que  $p$  est un revêtement de  $\mathbb{R}P^2$ .

3. Calculer  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$  (on utilisera  $\pi_1(S^2) = 0$ , cf. cours).

4. On note  $S_+$  la demi-sphère fermée dans  $S^2$  définie par la condition  $z \geq 0$ . Montrer que  $\mathbb{R}P^2$  est homéomorphe à l'espace quotient de  $S_+$  par la relation d'équivalence qui identifie deux points antipodaux du bord.

5. En notant que  $S_+$  est homéomorphe à un disque fermé, en déduire une représentation plane de  $\mathbb{R}P^2$  et du générateur de son groupe fondamental.

**Exercice 12** On considère la sphère unité  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ , et on définit  $\mathbb{R}P^3$  de manière analogue à  $\mathbb{R}P^2$  dans l'exercice 11. On note  $B$  la boule ouverte  $B(0, \pi) \subset \mathbb{R}^3$ , et  $\bar{B} = B(0, \pi]$  son adhérence. On considère l'application  $f: \bar{B} \rightarrow SO(3)$  qui à 0 associe l'identité, et à un point  $M \neq 0$  associe la rotation d'axe orienté  $\vec{OM}$  et d'angle  $\|\vec{OM}\|$ .

1. Montrer que  $f$  est surjective et n'est pas injective.

2. Montrer que la restriction de  $f$  à  $B$  est injective et que deux points distincts de  $\bar{B} \setminus B$  ont même image si et seulement s'ils sont antipodaux.

3. En utilisant l'exercice 11 et  $\pi_1(S^3) = 0$ , montrer que  $SO(3)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}P^3$  et calculer  $\pi_1(SO(3))$ .

4. (\*) En utilisant la décomposition polaire des matrices, en déduire  $\pi_1(SL(3, \mathbb{R}))$ .

(Indication : l'espace  $\text{Sym}_{\text{tr}=1}^{\geq 0}(3, \mathbb{R})$  des matrices  $3 \times 3$  symétriques réelles définies positives et de trace 1 est affine, et homéomorphe à l'espace  $\text{Sym}_{\text{det}=1}^{\geq 0}(3, \mathbb{R})$  des matrices  $3 \times 3$  symétriques réelles définies positives et de déterminant 1.)

**Exercice 13** Un graphe est un espace topologique de la forme

$$\Gamma = (\Gamma^0 \coprod_i I_i) / (v \sim \varphi_i(v), v \in \partial I_i),$$

où  $\Gamma^0$  est un ensemble discret (les *sommets* de  $\Gamma$ ),  $\{I_i\}_{i \in I}$  est une collection d'intervalles fermés (les *arêtes* fermées de  $\Gamma$ ), et pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_i: \partial I_i \rightarrow \Gamma^0$  est une application dite de *recollement*. L'union disjointe est munie de la topologie de l'union disjointe, et  $\Gamma$  de la topologie quotient.

L'exercice est : montrer que tout revêtement d'un graphe est un graphe (On pourra utiliser les relèvements de chemins et de leurs homotopies).