Université de Montpellier Années 2015-2017
Master 1 mathématiques

ANALYSE FONCTIONNELLE (HMMA113)
ABRÉGÉ DU COURS

Stéphane Baseilhac
http://www.math.univ-montp2.fr/ baseilhac/students.html

Abstract. Ces notes résument les principaux résultats au programme de mon cours d'analyse fonctionnelle (destiné aux étudiants des parcours Mathématiques Fondamentales et Modélisation et Analyse Numérique du M1 de mathématiques). Des exercices et sujets d'examens corrigés se trouvent sur ma page web. Le cours suit de près [1], chapitres 1 à 4. Je conseille aussi la lecture de [2], chapitres 1, 3, 4, 5 et 9, et de [4] ou [3] pour ce qui concerne les résultats de topologie étudiés en L3.

Contents

1. Rappels sur les espaces de Banach

Ce chapitre est introductif. On y revient sur les notions et résultats suivants, étudiés ou énoncés dans le cours de Topologie de L3 :

- Suites de Cauchy, espace métrique complet, espace de Banach, exemples;
- L'espace $(\mathcal{C}_b(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues et bornées d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé Y, muni de la norme sup.

- Caractérisations de la continuité d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés; exemples.
- L'espace $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ des applications linéaires et continues entre deux espaces vectoriels normés X et Y, muni de la norme subordonnée, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.
- Familles équicontinues d'applications.
- **(Complété)** Pour tout espace métrique X (resp. tout e.v.n.), il existe un espace métrique complet (resp. un espace de Banach) dans lequel X se plonge isométriquement comme sous-espace dense. Cet espace est unique à isométrie près, on l'appelle le *complété* de X.
- **(Théorème de Baire)** Dans un espace métrique complet, une union dénombrable de fermés d'intérieurs vide est d'intérieur vide.
- Si Y est un espace de Banach, les espaces $(\mathcal{C}_b(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ le sont aussi.
- **(Théorème d'Ascoli)** Soit X métrique compact. Une partie A de $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est relativement compacte si et seulement si A est équicontinue et si pour tout $x \in X$ l'ensemble $A(x) := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.
- **(Théorème de Stone-Weierstrass)** Soit X métrique compact. Une sous-algèbre A de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ qui contient une fonction constante non nulle est dense pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si pour tous points $x_1 \neq x_2$ il existe $f \in A$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. Théorèmes de Banach & al.

Ce chapitre pose les bases de la théorie des espace de Banach.

2.1. **Théorème de Hahn-Banach.** On s'intéresse tout d'abord au problème du prolongement de formes linéaires définies sur un sous-espace vectoriel; en dimension infinie l'existence d'un prolongement n'est pas automatique.

Soit X un espace vectoriel, que nous supposerons défini sur $\mathbb{R}$ pour simplifier les énoncés. Nous dirons qu'une application $p\colon X \to \mathbb{R}$ est une *jauge* sur X si pour tous x, $y \in X$ et $\lambda > 0$ on a

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \tag{1}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y). \tag{2}$$

Une jauge p est une *semi-norme* si $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; notons que cette condition est plus forte que (1). On vérifie sans peine que si p est une semi-norme sur X, alors $p(0) = 0$, $p(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$, et pour tous x, $y \in X$ on a

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y). \tag{3}$$

Une semi-norme p telle que l'ensemble $N(p) := \{x \in X \mid p(x) = 0\}$ est réduit au seul vecteur nul est une norme (en général, $N(p)$ est un sous-espace vectoriel de X; si $N(p)$ est fermé, alors p induit une norme sur l'espace quotient $X/N(p)$).

On utilisera souvent la propriété suivante : si $p, q\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sont deux applications vérifiant (1), et s, $t > 0$ deux réels tels que $\forall x \in X$, $q(x) \leq s \implies p(x) \leq t$, alors $\forall x \in X$, $p(x) \leq ts^{-1}q(x)$.

Théorème 2.1. (Hahn-Banach, forme analytique) *Soient $p\colon X \to \mathbb{R}$ une jauge sur X, F un sous-espace vectoriel de X, et $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F telle que $\lambda(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\lambda}\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x)$ pour tout $x \in F$, et telle que $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in X$.*

Ce résultat est de nature algébrique (il n'y a aucune hypothèse topologique sur X); il repose sur le théorème de maximalité de Haussdorff. On dit que $\tilde{\lambda}$ *prolonge* λ à l'espace X tout entier.

Pour appliquer le théorème 2.6 nous supposerons désormais que X est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Le *dual topologique* X' de X est défini comme l'espace vectoriel réel des formes linéaires *continues* sur X, à valeurs réelles, muni de la norme subordonnée (cf. chapitre 1)

$$\|\lambda\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda(x)\|.$$

En posant $p(x) = \|\lambda\|_{X'}\|x\|$ dans le théorème 2.6, on obtient :

Corollaire 2.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de X et $\lambda : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue sur F. Il existe une forme linéaire continue sur X, $\tilde{\lambda} \in X'$, qui prolonge λ et vérifie $\|\tilde{\lambda}\|_{X'} = \|\lambda\|_{F'}$.*

Voici deux autres conséquences très utiles du théorème 2.6.

Corollaire 2.3. *Soit F un sous-espace de X. Un point $x \in X$ est dans l'adhérence $\bar{F}$ de F si et seulement si toute forme linéaire continue $\lambda \in X'$ identiquement nulle sur F est aussi nulle en x.*

En particulier, un sous-espace F de X est dense si et seulement si toute forme linéaire continue $\lambda \in X'$ nulle sur F est identiquement nulle.

Corollaire 2.4. *Pour tout point $x_0 \in X$ il existe une forme linéaire continue $\lambda_0 \in X'$ telle que $\lambda_0(x_0) = \|x_0\|^2$ et $\|\lambda_0\|_{X'} = \|x_0\|$.*

En particulier, pour tous points distincts x_1, $x_2 \in X$, la forme $\lambda_0 \in X'$ associée à $x_0 := x_1 - x_2$ vérifie $\lambda_0(x_1) \neq \lambda_0(x_2)$. Le dual topologique X' est donc *toujours* plus gros que $\{0\}$, et il *sépare* les points de X. De plus, pour tout point $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, la forme $\lambda := \|x_0\|^{-1}\lambda_0$ vérifie $\|\lambda\|_{X'} = 1$ et $\lambda(x) = \|x_0\|$. On a donc (l'inégalité $\geq$ étant conséquence de la continuité)

$$\|x\| = \sup_{\lambda \in X', \|\lambda\| \leq 1} |\lambda(x)|.$$

Nous étudierons aussi en TD une forme dite *géométrique* du théorème de Hahn-Banach. Elle repose sur la proposition suivante, très intéressante pour elle-même, qui montre que les parties convexes de X contenant l'origine sont la contrepartie géométrique des jauges sur X. Rappelons qu'une partie $C \subset X$ est *convexe* si pour tous points x_1, $x_2 \in C$ le segment d'extrémités x_1 et x_2, $\{tx_1 + (1-t)x_2 \mid t \in [0,1]\}$, est contenu dans X.

Proposition 2.5. *Soit C une partie convexe et ouverte de X contenant l'origine 0. L'application*

$$p_C : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ p_C(x) = \inf\{t > 0 \mid x/t \in C\}$$

définit une jauge sur X, et il existe une constante $M \geq 0$ telle que $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$. De plus C est la "boule unité" définie par p_C:

$$C = \{x \in X \mid p_C(x) < 1\}.$$

Si de plus $\lambda C \subset C$ pour tout $|\lambda| \leq 1$ (on dit alors que C est équilibré), alors p_C est une semi-norme.

Théorème 2.6. (Hahn-Banach, forme géométrique) *Soient A et B deux convexes non vides et disjoints de X.*

(1) *Si A est ouvert, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in X'$ tels que $f(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in B$. (On dit que l'hyperplan fermé $\{x \in X, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B au sens large.)*

(2) *Si A est fermé et B est compact, alors il existe $f \in X'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ tels que $f(x) \leq \alpha - \epsilon$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha + \epsilon$ pour tout $x \in B$. (On dit que l'hyperplan fermé $\{x \in X, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B au sens strict.)*

2.2. **Le théorème de Banach-Steinhaus.** Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de X dans Y, muni de la norme subordonnée (cf. chapitre 1)

$$||T||_{\mathcal{L}} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y.$$

On s'intéresse ici aux propriétés des familles $(T_i)_{i \in I}$ d'applications de $\mathcal{L}(X, Y)$. L'ensemble des indices est quelconque (il peut-être non dénombrable).

Théorème 2.7. (Banach-Steinhaus) *Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires et continues de X dans Y. Si pour tout $x \in X$ on a*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_Y < +\infty$$

alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}} < +\infty.$$

La famille $(T_i)_{i \in I}$ est donc équicontinue, et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T_i(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

pour tout $x \in X$ et tout $i \in I$.

Remarque 2.8. L'hypothèse dit que si on note B l'ensemble des points $x \in X$ tels que l'ensemble $\{T_i(x), i \in I\} \subset Y$ est borné, alors B coincide avec X. En fait la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que B n'est pas maigre dans X (au sens du théorème de Baire). Cf. TD, Ex. 9 F2.

Corollaire 2.9. *Soit (T_n) une suite d'applications linéaires et continues de X dans Y qui converge simplement. Pour tout point $x \in X$ notons $T(x)$ la limite de la suite $(T_n(x))$, et $T : X \to Y$ l'application $x \mapsto T(x)$. Alors T est linéaire, continue, et vérifie*

$$\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}}.$$

Notons qu'en général la suite des normes $(\|T_n\|_{\mathcal{L}})$ n'est pas nécessairement convergente. Nous verrons en TD de nombreuses applications du théorème 2.7. Citons, notamment, la relation entre parties bornées de X et parties *faiblement bornées* (Cf. TD, Ex. 12 F2) :

Corollaire 2.10. *Soit B un sous-ensemble de X tel que pour tout $\lambda \in X'$ l'ensemble $\{\lambda(x), x \in B\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Alors B est borné dans X. Réciproquement, une partie B' de X' telle que pour tout $x \in X$ l'ensemble $\{\lambda(x), \lambda \in B'\}$ est borné de $\mathbb{R}$, est bornée dans X'.*

2.3. **Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.** Soient X et Y deux espaces de Banach. On s'intéresse maintenant aux propriétés d'une application linéaire $T: X \to Y$.

Théorème 2.11. (Théorème de l'application ouverte) *Toute application linéaire continue* et surjective *$T: X \to Y$ est* ouverte *(ie. l'image d'un ouvert de X est un ouvert de Y).*

Il est facile de voir que cet énoncé équivaut à dire qu'il existe une constante $r > 0$ telle que $B_Y(0, r) \subset T(B_X(0, 1))$. En remarquant que l'application réciproque T^{-1} est continue si et seulement si $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est un ouvert de Y pour tout ouvert U de X, on obtient :

Corollaire 2.12. (Théorème de Banach) *Si $T: X \to Y$ est une application linéaire continue et bijective, alors T est un homéomorphisme.*

Ce théorème permet d'établir l'existence d'homéomorphismes entre espaces de Banach. En particulier, soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur X telles que $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(X, \|\cdot\|_2)$ sont des espaces de Banach. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in X$; autrement dit, $T = id_X: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ est continue. Alors d'après le corollaire les deux normes sont équivalentes, de sorte qu'il existe $C' > 0$ telle que $\|x\|_1 \leq C'\|x\|_2$ pour tout $x \in X$.
Considérons finalement une application linéaire $T: X \to Y$. Supposons que le graphe de T, $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = T(x)\}$, soit un fermé de $X \times Y$. Alors $G(T)$ est un sous-espace de Banach de $X \times Y$. On peut identifier $G(T)$ et X via l'application $x \mapsto (x, T(x))$. Alors les normes $\|x\|_1 := \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$ (la norme induite par $X \times Y$) et $\|x\|_2 := \|x\|_X$ munissent X d'une structure d'espace de Banach. En appliquant la remarque précédente, on en déduit la caractérisation suivante, très puissante, de la continuité des applications linéaires entre espaces de Banach (la partie "$\Longrightarrow$" est immédiate, et connue depuis le L3).

Théorème 2.13. (Théorème du graphe fermé) *Une application linéaire de X dans Y est continue si et seulement si son graphe est un fermé de $X \times Y$.*

2.4. **Topologies faible, faible-$*$, et théorème de Banach-Alaoglu.** Les compacts d'un espace de Banach X de dimension infinie sont d'intérieurs vide, d'après le théorème de Riesz. Or ils jouent un rôle très important dans la résolution de problèmes fonctionnels ou différentiels, via leur propriété de sous-convergence séquencielle. On introduit alors la *topologie faible* sur X et la *topologie faible-$*$* sur le dual topologique X', qui admettent plus de compacts que les topologies usuelles de ces espaces. Nous verrons notamment que la boule unité fermée de X' pour la topologie forte, $B_{X'}(0,1] = \{\lambda \in X', \|\lambda\|_{X'} \leq 1\}$, est compacte pour la topologie faible-$*$ (Théorème 2.24).

Soient X un ensemble, $\{Y_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $\varphi_i : X \to Y_i$ ($i \in I$) des applications. Rappelons que si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux topologies sur X, alors $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$ si tout ouvert de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}'$.

Lemma 2.14. *Il existe une topologie sur X telle que les applications φ_i soient toutes continues. De plus, la topologie la moins fine vérifiant cette propriété est unique. Cette topologie $\mathcal{T}$ est telle que :*

- *Les ouverts sont les unions quelconques d'intersections finies d'ensembles de la forme $\varphi_i^{-1}(V_i)$, où $i \in I$ et V_i est un ouvert de Y_i.*
- *Les voisinages d'un point $x \in X$ sont les unions quelconques d'intersections finies d'ensembles de la forme $\varphi_i^{-1}(V_i(\varphi_i(x))$, où $i \in I$ et $V_i(\varphi_i(x))$ est un voisinage de $\varphi_i(x)$ dans Y_i.*

Clairement, une suite (x_n) de X converge pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $i \in I$ la suite $(\varphi_i(x_n))$ converge vers $(\varphi_i(x))$. On utilise souvent le résultat élémentaire suivant (c'est une conséquence des définitions) :

Proposition 2.15. *Soient Z un espace topologique, et X muni de la topologie $\mathcal{T}$. Une application $\psi : Z \to X$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$ l'application $\varphi_i \circ \psi$ est continue.*

Nous allons appliquer le Lemme 2.14 dans le cas où X est un espace de Banach (réel, pour simplifier les notations), I est le dual X' (vu comme ensemble d'indices !), $Y_\lambda = \mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in X'$, et les applications $\varphi_\lambda \colon X \to Y_\lambda = \mathbb{R}$ sont les "applications d'évaluation"

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lambda(x). \end{array}$$

Définition 2.16. La *topologie faible* sur X, notée $\sigma(X, X')$, est la topologie la moins fine parmi celles qui rendent les applications φ_λ, $\lambda \in X'$, continues. On dit qu'une suite (x_n) de X *converge faiblement* vers un point $x \in X$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, lorsque (x_n) converge vers x au sens de la topologie faible $\sigma(X, X')$.

En contrepoint de cette définition, on appelle *topologie forte* de X la topologie définie par sa norme. Si en général la topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble X, associée à une famille d'applications $(\varphi_i)_{i\in I}$, peut être très "bizarre", dans le cas d'un espace de Banach la topologie faible $\sigma(X, X')$ reste assez raisonnable :

Proposition 2.17. *La topologie faible $\sigma(X, X')$ est séparée (ie. pour tous points distincts x_1, x_2 de X il existe des ouverts disjoints $O_1 \ni x_1$ et $O_2 \ni x_2$), et tout voisinage d'un point $x \in X$ peut s'écrire comme une union d'ensembles de la forme*

$$\bigcap_{i\in I} \{y \in X, |\lambda_i(y - x)| < \varepsilon\}$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in X'$, et $\varepsilon > 0$. De plus, si $dim(X) < +\infty$, alors $\sigma(X, X')$ coincide avec la topologie forte de X.

Remarque 2.18. Les ouverts (resp. les fermés) de $\sigma(X, X')$ sont toujours des ouverts (resp. des fermés) de X pour la topologie forte. Cependant, lorsque X est de dimension infinie, la réciproque n'est pas vraie. Ainsi la boule unité ouverte de X n'est jamais ouverte pour $\sigma(X, X')$, et la sphère unité n'est jamais fermée pour $\sigma(X, X')$; en fait, $\bar{\mathbb{S}}^\sigma = B_X(0, 1]$ (cf F2, Ex. 19).

Proposition 2.19. *Soit (x_n) une suite de X. On a :*

- $x_n \rightharpoonup x$ *si et seulement si pour tout* $\lambda \in X'$ *on a* $\lambda(x_n) \to \lambda(x)$.
- *Si* $x_n \to x$, *alors* $x_n \rightharpoonup x$.
- *Si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors la suite* $(\|x_n\|)$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $\|\lambda_n - \lambda\|_{X'} \to 0$, *alors* $\lambda_n(x_n) \to \lambda(x)$.

En appliquant la proposition 2.15 et le théorème du graphe fermé on montre que :

Proposition 2.20. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $T : X \to Y$ est continue si et seulement si elle est continue lorsqu'on munit X et Y de leurs topologies faibles $\sigma(X, X')$ et $\sigma(Y, Y')$.*

On peut également considérer le dual X' d'un espace de Banach X, et procéder comme dans la définition 2.16 pour définir sa topologie faible $\sigma(X', X'')$. Mais on peut aussi affaiblir encore un peu plus cette topologie de la manière suivante. Rappelons qu'on a une application linéaire canonique

$$J : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X'' \\ x & \longmapsto & (\varphi_x \colon \lambda \mapsto \lambda(x)) \end{array}.$$

D'après l'exercice 11 F2, J est une isométrie : $\|J(x)\|_{X''} = |x\|$ pour tout $x \in X$; en particulier, J est injective. On peut donc identifier X et le sous-espace $J(X) \subset X''$.

Définition 2.21. La *topologie faible-$*$* sur X', notée $\sigma(X', X)$, est la topologie la moins fine parmi celles qui rendent les applications $\varphi_x : X' \to \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$ continues. On dit qu'une suite (λ_n) de X' *converge $*$-faiblement* vers un point $\lambda \in X'$, et on note $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$, lorsque (λ_n) converge vers λ au sens de la topologie faible-$*$ $\sigma(X', X)$.

En passant de $\sigma(X', X'')$ à $\sigma(X', X)$ on restreint l'ensemble des formes linéaires sur X' qu'on désire rendre continues, en ne considérant que celles de la forme φ_x, $x \in X$. Donc la topologie $\sigma(X', X)$ est moins fine que $\sigma(X', X'')$, qui est moins fine que la topologie forte de X', définie via la norme subordonnée (cf Remarque 2.18).

Définition 2.22. Un espace de Banach X est *réflexif* si l'isométrie injective $J : X \to X''$ est surjective.

Si X est réflexif, les topologie faible-$*$ et faible coincident. Nous avons vu qu'en général ces deux topologies sont moins fines que la topologie forte sur X'; cependant, lorsque $dim(X) < +\infty$, elles coincident.

La topogie faible-$*$ $\sigma(X', X)$ vérifie des propriétés analogues à celles décrites dans les Propositions 2.17 et 2.19 (les preuves sont similaires, voire plus simples) :

Proposition 2.23. *La topologie faible-$*$ $\sigma(X', X)$ est séparée, et tout voisinage d'une forme linéaire $\lambda \in X'$ peut s'écrire comme une union d'ensembles de la forme*

$$\bigcap_{i \in I} \{\mu \in X', |(\lambda - \mu)(x_i)| < \varepsilon\}$$

où I est un ensemble fini, $x_i \in X$, et $\varepsilon > 0$. De plus, pour toute suite (λ_n) de X' on a les propriétés suivantes :

- *$\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ si et seulement si pour tout $x \in X$ on a $\lambda_n(x) \to \lambda(x)$.*
- *Si $\lambda_n \to \lambda$ (convergence au sens de la topologie forte de X'), alors $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, et si $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, alors $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$.*
- *Si $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$, alors la suite $(\|\lambda_n\|_{X'})$ est bornée et $\|\lambda\|_{X'} \leq \liminf \|\lambda_n\|_{X'}$.*
- *Si $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ et $x_n \to x$, alors $\lambda_n(x_n) \to \lambda(x)$.*

Théorème 2.24. Banach-Alaoglu) *Soit X un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de X' pour la topologie forte, $B_{X'}(0,1] = \{\lambda \in X', \|\lambda\|_{X'}\| \leq 1\}$, est compacte pour la topologie faible-$*$ $\sigma(X', X)$.*

Notons qu'il n'est pas nécessaire de supposer que X est un Banach (même si tous les exemples que nous considèrerons plus loin le sont). Nous démontrerons en TD les propriétés suivantes des espaces réflexifs :

Théorème 2.25. *Soit X un espace de Banach réflexif. Alors:*

1. *La boule unité fermée de X est faiblement compacte.*
2. *Tout convexe borné fermé fort de X est faiblement compact.*

3. Les espaces L^p

Les espaces de fonctions L^p sur $\mathbb{R}^N$ seront nos exemples favoris d'espaces de Banach.

On munit $\mathbb{R}^N$ de la mesure de Lebesgue dx. Dans la suite nous utiliserons souvent les résultats suivants de la théorie de l'intégration (cf. cours de L3, et [2]):

- Inégalités de Hölder et de Minkowski.
- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- Densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.
- Théorème de Fubini-Tonelli.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que deux fonctions mesurables $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ sont *égales presque partout* si $f(x) = g(x)$ en tout point x situé en dehors d'un ensemble de mesure nulle; on note alors $f = g$ *pp*, et on dit que f et g ont même classe. Pour tout $1 \leq p < +\infty$ on note $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel complexe des classes de fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Lorsque $p = +\infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions mesurables $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ et un ensemble $N \subset \Omega$ de mesure nulle tels que $|f(x)| < C$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$. On pose alors

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0 \mid |f(x)| < C \ pp\}.$$

On vérifie facilement que pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

On munit chaque espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, de la norme $\|\cdot\|_p$. Par abus de language nous parlerons souvent de "fonctions" de $L^p(\Omega)$, plutôt que de "classes de fonctions".

Pour simplifier les énoncés, sauf mention contraire nous supposerons que les fonctions sont à valeurs réelles (les formes linéaires intégrales, produits scalaires, etc sont alors définis sans conjugaison complexe).

Théorème 3.1. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace vectoriel normé $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Nous verrons au cours de la preuve la propriété importante suivante : pour toute suite (f_n) de $L^p(\Omega)$ qui converge *dans* $L^p(\Omega)$ vers un élément f, il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ tels que (f_{n_k}) converge vers f *presque partout* et $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ pour tout k et presque tout point $x \in \Omega$.

Théorème 3.2. *Pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues et à support compact de Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Dans la preuve nous utiliserons le lemme suivant, qui est très utile dans de nombreuses circonstances. On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $f\mathbf{1}_K \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Lemma 3.3. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $\int_\Omega f(x)u(x)dx = 0$ pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, alors f est nulle presque partout sur Ω.*

Notons que $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur le sous-espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$, sans qu'il soit nécessaire de le quotienter par la relation d'équivalence engendrée par l'égalité presque partout (comme ça l'est pour “descendre” $\|\cdot\|_p$ de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ sur l'espace $L^p(\Omega)$). Donc ce théorème dit que pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ *est le complété de l'espace normé* $(\mathcal{C}_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$.
En revanche, lorsque $p = \infty$ le complété de $(\mathcal{C}_c(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ des fonctions continues $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ “nulles à l'infini”, ie. telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \subset \Omega$ compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \Omega \setminus K$ (cf. TD, F1). En fait, à l'aide du théorème 3.2 on peut montrer que :

Corollaire 3.4. (Admis) *Les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, sont* séparables *: il existe une partie de $L^p(\Omega)$ dénombrable et dense.*

À l'inverse, $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable (cf. TD, F3).

3.1. **$L^2(\Omega)$, théorème de Riesz-Fischer et séries de Fourier.** Rappelons qu'un *espace de Hilbert* $H := (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, euclidien si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, et hermitien si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, tel que H est un espace vectoriel normé *complet* pour la norme $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Si l'on ne suppose pas que H est complet, on dit que c'est un espace *préhilbertien.*
En dimension finie tout espace vectoriel normé est complet, et l'existence de bases orthonormales pour tout produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ montre que tout espace de Hilbert est isométrique à $(\mathbb{K}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ est le produit scalaire usuel. En dimension infinie, l'espace $L^2(X, \mu)$, où μ est une mesure positive sur un ensemble X, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\bar{g}(x)d\mu(x).$$

Nous allons montrer que, de manière analogue au cas de la dimension finie, *tout espace de Hilbert H possède des bases orthonormales* (qu'il faut définir en un sens convenable); ceci s'appliquera, en particulier, aux espaces $L^2(\Omega)$. Ces bases sont des outils puissants pour étudier les opérateurs de H, et permettent de l'identifier comme un espace L^2 (cf. Théorème 3.12).

Commençons par quelques rappels. Soit H un espace pré-hilbertien quelconque. Pour tout sous-ensemble $M \subset H$ notons

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{y \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \ \forall x \in M\} \\ &= \bigcap_{x\in M} \mathrm{Ker}(y \mapsto \langle x, y\rangle). \end{aligned}$$

Il est clair que $M^\perp$ est un sous-espace de M (et ceci quel que soit M !). De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on voit que l'application linéaire $H \to H$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$, est continue. Donc $M^\perp$ est un sous-espace *fermé* de H. Si M est un sous-espace de H, alors $M^{\perp\perp} = \bar{M}$ (cf. TD, Ex. 1 F3).

Théorème 3.5. (Minima) *Si M est un sous-ensemble convexe, complet et non vide de H, alors il existe un unique point $x_0 \in M$ tel que $\|x_0\| \le \|x\|$ pour tout point $x \in M$.*

Ce résultat, de même que le suivant, s'applique en particulier lorsque H est un espace de Hilbert, et M est un sous-espace fermé non vide de H.

Théorème 3.6. (Projection) *Pour tout sous-espace complet M de H, il existe une décomposition en somme directe orthogonale topologique*

$$H = M \oplus M^\perp.$$

De plus, le projecteur $p_M : H \to M$ associé à cette décomposition vérifie en tout point $x \in H$ l'égalité $\|p_M(x)\| = \inf_{y\in M^\perp} \|x - y\|$.

Nous montrerons :

Théorème 3.7. (Théorème de représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue $\lambda \in H'$ il existe un unique point $y \in H$ tel que $\lambda(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in H$.*

On en déduit immédiatement :

Corollaire 3.8. (Réflexivité) *L'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H' \\ y & \longmapsto & (x \mapsto \langle x, y\rangle) \end{array}$$

est une isométrie. En particulier, H est un espace réflexif.

Définition 3.9. Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert H est un *système orthonormé* si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour tous i, $j \in I$. On dit qu'il est *complet*, ou que $\{e_i\}_{i\in I}$ est une *base orthonormale*, si cette famille est maximale (ie. il n'existe aucune famille orthonormale de H la contenant strictement).

Le théorème de maximalité de Hausdorff (déjà utilisé pour démontrer le théorème de Hahn-Banach) implique :

Théorème 3.10. *Tout système orthonormal est contenu dans un système maximal. En particulier, tout espace de Hilbert possède une base orthonormale.*

Remarque 3.11. La définition des système orthonormaux vaut pour tout espace de Hilbert H, éventuellement non séparable. Dans ce dernier cas l'ensemble I des indices n'est pas dénombrable. La définition d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de H par la condition de maximalité est la généralisation naturelle de l'existence, en dimension finie, de relations linéaires dans les familles contenant $\{e_i\}_{i\in I}$. En revanche, il faut prendre garde à ce que la maximalité ne dit pas, en dimension infinie, que tout élément de H est combinaison linéaire des vecteurs e_i, $i \in I$. Dans ce dernier cas on dit que la base est *algébrique*; sinon on dit qu'elle est *topologique*. Cette terminologie est justifiée par le théorème 3.12 (2).

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormal d'un espace de Hilbert H. Deux objets sont naturellement associés à l'ensemble d'indices I. D'une part, on a une application

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & F(I;\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & (\hat{x}\colon i \mapsto \langle x, e_i\rangle). \end{array}$$

D'autre part, on peut considérer l'espace vectoriel complexe $l^2(I)$ des fonctions $f\colon I \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{E\subset I, |E|<\infty}\left(\sum_{i\in E}|f(i)|^2\right) < +\infty.$$

Le membre de gauche est, par définition, l'intégrale de Lebesgue de $|f|^2$ pour la mesure de dénombrement sur I. On le note souvent $\sum_{i\in I}|f(i)|^2$. Le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i\in I} f(i)\overline{g(i)} := \sup_{E\subset I, |E|<\infty}\left(\sum_{i\in E} f(i)\overline{g(i)}\right)$$

munit $l^2(I)$ d'une structure d'espace de Hilbert. On peut vérifier que si $f \in l^2(I)$, alors son support $\{i \in I \mid f(i) \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Notons $\overline{Vect\{e_i\}}_{i\in I}$ l'adhérence de l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_i\}_{i\in I}$.

Théorème 3.12. (Riesz-Fischer) *1) L'application*

$$\varphi\colon H \to F(I;\mathbb{C})\ ,\ x \mapsto \hat{x}$$

est linéaire, continue, et à valeurs dans $l^2(I)$. De plus, sa restriction à $\overline{Vect\{e_i\}}_{i\in I}$ est une isométrie.
2) Le système $\{e_i\}_{i\in I}$ est maximal ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\overline{Vect\{e_i\}}_{i\in I} = H$;
- *Pour tout $x \in H$, on a* $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\hat{x}(i)|^2\ \ (=: \|\hat{x}\|^2)$;
- *(Identité de Parseval) Pour tous x, $y \in H$, on a*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\hat{x}(i)\hat{y}(i) \quad (=: \langle \hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{y}}\rangle).$$

En particulier, pour tout choix de système maximal $\{e_i\}_{i\in I}$ l'application $\varphi\colon H \to l^2(I)$ est une isométrie.

On peut isoler tout de suite une propriété importante de φ, qui implique directement qu'elle prend ses valeurs dans $l^2(I)$: pour toute partir finie $E \subset I$ on a

$$\sum_{i\in E} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Par passage au sup, on en déduit *l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Exemples 3.13. Nous verrons en TD des exemples de bases orthonormales dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. Un autre exemple fondamental et déjà partiellement étudié en L2 est celui de $L^2(S^1)$, l'espace vectoriel complexe des classes de fonctions mesurables $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

Ici, on identifie S^1 et l'ensemble des nombres complexes $z = e^{it}$ de module 1, muni de la mesure induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$, et on regarde les fonctions $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ comme définies sur $\mathbb{R}$, de variable t, et 2π-périodiques. Le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

fait de $L^2(S^1)$ un espace de Hilbert. Posons $e_n(t) := e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$. C'est un théorème classique que $\{e_n\}_n$ est une base orthonormale de $L^2(S^1)$. Par définition, l'isométrie $\varphi\colon L^2(S^1) \to l^2(\mathbb{N})$ vérifie

$$\varphi(f)(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

C'est le n-ième coefficient de Fourier de f. L'inclusion $L^2(S^1) \subset L^1(S^1)$ (via Cauchy-Schwartz) et le théorème 3.12 impliquent que pour toute suite $\{c_n\}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, il existe $f \in L^2(S^1)$ telle que $c_n = \hat{f}(n)$. L'identité de Parseval s'écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Enfin, posons $s_N(t) := \sum_{n=-N}^{+N} \hat{f}(n)e^{int}$. Alors $\|f - s_N\|^2 = \sum_{|n|>N} |\hat{f}(n)|^2 \to_{N\to\infty} 0$, et donc f est limite de sa série de Fourier au sens L^2.

3.2. **Théorème de représentation de Riesz.** Nous admettrons le résultat suivant; c'est une conséquence d'une propriété de convexité uniforme des espaces $E := L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, impliquant que l'isométrie canonique $J : E \to E''$ vérifie $B_{E''}(0, 1] \subset J(B_E(0, 1])$, et qu'elle est donc surjective.

Théorème 3.14. (Admis) *Pour tout $1 < p < +\infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.*

Voici une application frappante du théorème de Banach-Alaoglu (cf. TD, Ex. 14 F2) :

Corollaire 3.15. *Pour tout $1 < p < +\infty$, tout borné de $L^p(\Omega)$ est relativement faiblement compact.*

En revanche les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs (cf. TD, Ex. 5 F3). On a une inclusion stricte

$$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'$$

définie en associant à une classe $f \in L^1(\Omega)$ la forme linéaire continue $\lambda_f \in (L^\infty(\Omega))'$ telle que

$$\forall g \in L^\infty(\Omega), \quad \lambda_f(g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

On va préciser cette dernière affirmation. On appelle *exposant conjugué* du réel p, $1 \leq p \leq +\infty$ (éventuellement infini), le réel $1 \leq q \leq +\infty$ (idem) tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Du théorème 3.14 nous déduirons la généralisation suivante du Théorème 3.7 :

Théorème 3.16. (Riesz) *Soit $1 \leq p < +\infty$. Pour toute forme linéaire continue $\lambda \in (L^p(\Omega))'$, il existe une unique classe $u_\lambda \in L^q(\Omega)$ telle que*

$$\forall f \in L^p(\Omega), \quad \lambda(f) = \int_\Omega u_\lambda(x)f(x)dx.$$

De plus on a $\|u_\lambda\|_q = \|\lambda\|_{(L^p(\Omega))'}$, de sorte que l'application $\lambda \mapsto u_\lambda$ définit une isométrie linéaire $(L^p(\Omega))' \to L^q(\Omega)$.

Ce théorème permet d'identifier les espaces $L^q(\Omega)$ et $(L^p(\Omega))'$, pour tout $1 < p < +\infty$. On utilise constamment cette identification.

3.3. **Convolution, régularisation.** Soient $f, g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. On définit le *produit de convolution* $f * g$ par la formule :

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que lorsque f et g sont de carré intégrable, $f*g$ est une fonction à valeurs complexes *bien définie en tout point* $x \in \mathbb{R}^N$; clairement, $(f*g)(x)$ ne dépend alors pas du choix des représentants de f et g dans leurs classes dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous verrons que le théorème de Tonelli-Fubini et l'inégalité de Hölder impliquent aussi :

Proposition 3.17. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors $|(f*g)(x)| < \infty$ pour presque tout point $x \in \mathbb{R}^N$. De plus $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

De manière équivalente, pour toute classe $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ l'opérateur de convolution

$$L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)\ ,\ g \mapsto f * g$$

est continu.

En termes savants, le produit de convolution munit $L^1(\mathbb{R}^N)$ d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{C}$, et les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ d'une structure de module sur $L^1(\mathbb{R}^N)$. Notre but est d'étudier les deux résultats suivants, qui permettent notamment de prolonger à des espaces fonctionnels compliqués des opérateurs qui ne sont définis *a priori* que sur les fonctions lisses à supports compact. Nous avons besoin de la notion suivante.

Définition 3.18. Une famille de fonctions (ρ_ε) est *régularisante* si pour chaque ε la fonction ρ_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$, $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$, et $supp(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.

Par exemple, soit

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et (ε_k) une suite de réels positifs de limite nulle lorsque $k \to +\infty$. Notons $C = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx$. Alors $\rho_{\varepsilon_k}(x) = \varepsilon_k^{-N}\rho(x/\varepsilon_k)/C$ définit une suite régularisante (ρ_{ε_k}).

Théorème 3.19. (Régularisation) *Pour toute classe $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, et toute suite régularisante (ρ_{ϵ_k}), la suite des convolées $(\rho_{\epsilon_k} * f)$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Corollaire 3.20. (Densité) *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et tout réel $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

La preuve du théorème 3.19 repose sur le fait que $f * g$ hérite de la régularité de f, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et à support compact (mais attention, $f * g$ n'est pas nécessairement à support compact; cela dépend du support de g). Plus précisément, rappelons que $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace des classes de fonctions mesurables $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ telles que $f\mathbf{1}_K \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K. Comme d'habitude, pour tout multi-indice $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ notons

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_N}} f.$$

Proposition 3.21. *Soient $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$, et on a*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g.$$

3.4. **Les fonctions $L^p_{loc}(\Omega)$ vues comme distributions.** Voici une application importante du corollaire 3.20 que nous traiterons en TD (Ex. 10, F3). Munissons chaque espace $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, de la topologie définie par la famille de semi-normes, indexée sur les compacts $K \subset \Omega$,

$$||f||_{p,K} = (\int_K |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

C'est un exemple d'*espace de Fréchet*. Rappelons d'autre part que l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω est muni d'une topologie faible-*, associée à la famille de semi-normes

$$\|u\|_\varphi = |u(\varphi)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

où l'on note $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions test, suivant les conventions usuelles en théorie des EDP. Pour tout $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ posons

$$u_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Théorème 3.22. *L'application linéaire*

$$\phi\colon L^p_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)\ ,\ f \mapsto u_f$$

est injective et continue.

Ainsi, toute classe de fonctions L^p peut être vue comme une distribution (d'ordre 0), et on peut donc lui appliquer les opérations définies sur ces dernières : dérivées faibles, etc...

4. Transformée de Fourier

La transformée de Fourier des fonctions L^1 et L^2 transforme des opérations complexes (telles que la différentiation ou la convolution) en opérations élémentaires (multiplication par un polynôme, produit ponctuel des fonctions,...). Nous établirons ces propriétés (Propositions 4.3 à 4.5), ainsi que deux résultats fondamentaux de la théorie : la formule d'inversion (Théorème 4.8) et le théorème de Plancherel (Théorème 4.13).

4.1. **Définitions, premières propriétés.** Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^N$. Pour toute classe de fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ à valeurs complexes on définit

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) dx. \tag{4}$$

On appelle $\hat{f}$ la *transformée de Fourier* de f; notons qu'une autre normalisation de $\hat{f}$ est souvent utilisée, où le facteur $(2\pi)^{-N/2}$ et supprimé et $\langle x,\xi\rangle$ est remplacé par $2\pi\langle x,\xi\rangle$.

Théorème 4.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. L'application $\hat{f}$ est bien définie en tout point ξ de $\mathbb{R}^N$, et elle est continue, bornée, et vérifie $\lim_{\|\xi\|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. De plus on a*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-N/2}\|f\|_1$$

de sorte que l'application linéaire $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, $f \mapsto \hat{f}$, est continue.

Il n'est pas vrai en général que $\hat{f}$ est absolument intégrable (ie. est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$), comme le montre le premier exemple ci-dessous.

Exemples 4.2. 1. Pour tout $a > 0$ et $\xi \neq 0$ on a $\hat{\mathbf{1}}_{[-a,a]}(\xi) = \sqrt{2}\sin(a\xi)/\sqrt{\pi}\xi$. Cette formule est aussi vraie au point $\xi = 0$, en prolongeant $\sin(a\xi)/\xi$ par continuité. La fonction $\xi \mapsto \sin(a\xi)/\xi$ est continue, bornée, intégrable sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas pas absolument intégrable.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$ posons $g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon\|x\|^2}$. On a (Cf. TD, Ex. 14, F3)

$$\hat{g}_\varepsilon(\xi) = (2\varepsilon)^{-N/2} e^{-\|\xi\|^2/4\varepsilon}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ notons $\tau_h(f)$ la fonction $x \mapsto f(x+h)$, où $h \in \mathbb{R}^N$ est fixé. On vérifie facilement que

$$\widehat{\tau_h(f)}(\xi) = e^{i\langle h,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\ ,\ \widehat{e^{-i\langle h,\cdot\rangle}f}(\xi) = (\tau_h\hat{f})(\xi).$$

On utilise souvent les trois résultats suivants.

Proposition 4.3. *Pour toutes classes de fonction f, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ on a $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{N/2}\hat{f}\hat{g}$.*

Proposition 4.4. *Soit $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ dont toutes les différentielles $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$, sont intégrables. Alors*

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Ici et plus bas, on note $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$ la *longueur* d'un multi-indice $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et pour tout $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ on note

$$(i\xi)^\alpha := \left(\prod_{j=1}^N (i\xi_j)^{\alpha_j}\right).$$

Proposition 4.5. *Soit $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ et $1 \leq k \leq \infty$ tels que les fonctions $x \mapsto x^\alpha f(x)$ sont intégrables pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ de longueur $|\alpha| \leq k$. Alors $\hat{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, et si $|\alpha| \leq k$, alors*

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi).$$

Tirons quelques conséquences remarquables de ces propositions. Du Théorème 4.1 et de la Proposition 4.4, on déduit

$$|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-N/2} \|D^\alpha f\|_1 \tag{5}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. Ceci montre que des hypothèses de régularité sur f (différentiabilité et intégrabilité des dérivées) impliquent un comportement modéré de $\hat{f}$ en l'infini. En particulier, l'inégalité (5) implique immédiatement :

Corollaire 4.6. *Sous les hypothèses de la Proposition 4.4, pour toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_N]$ de degré $\leq k$, la fonction $\xi \mapsto P(\xi)\hat{f}(\xi)$ est bornée.*

La Proposition 4.5 peut être vue comme une sorte de réciproque de la Proposition 4.4. Elle implique imédiatement :

Corollaire 4.7. *Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ intégrable et nulle hors d'un compact, la transformée de Fourier $\hat{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Nous verrons plus loin que ces "échanges" de propriétés de régularité et de décroissance à l'infini conduisent naturellement à la définition d'un *sous-espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de $L^1(\mathbb{R}^N)$, la *classe de Schwartz*, stable sous l'application $\mathcal{F}$ (cf. Définition 4.11 et Proposition 4.12).

4.2. **Formule d'inversion, théorème de Plancherel.** Rappelons que la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction absolument intégrable f n'est pas toujours absolument intégrable. Lorsque c'est le cas, le théorème suivant montre qu'on peut échanger leurs rôles, et décrire la classe de f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ à partir de $\hat{f}$. Pour toute classe $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ posons

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi) d\xi.$$

On appelle $\mathcal{F}^{-1}f$ la *transformée de Fourier inverse de f* (nous préciserons plus loin des espaces sur lesquels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont des applications réciproques, justifiant ainsi la notation $\mathcal{F}^{-1}$). Notons que

$$\mathcal{F}^{-1}f = \overline{\mathcal{F}\bar{f}}\ , \text{ et } (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N). \tag{6}$$

Théorème 4.8. *(Formule d'inversion). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ pp., c'est-à-dire*

$$f(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi) d\xi$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Avec la seconde relation (6) et le Théorème 4.1, on déduit :

Corollaire 4.9. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors f est la classe d'une fonction continue qui tend vers 0 en l'infini.*

D'autre part, le Théorème 4.8 implique que pour toutes classes f, g de fonctions intégrables, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ implique $f - g = \mathcal{F}^{-1}0 = 0$. Donc :

Corollaire 4.10. *L'application $\mathcal{F} \colon L^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ est injective.*

Enfin, rappelons le commentaire qui suit le Corollaire 4.7.

Définition 4.11. On appelle *classe de Schwartz*, et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, l'espace vectoriel des fonctions $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dites *à décroissance rapide*, telles que pour tous multi-indices α, $\beta \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Clairement, on a des inclusions d'espaces vectoriels

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{7}$$

On vérifie facilement que pour toute fonction polynomiale P sur $\mathbb{R}^N$, si f est à décroissance rapide alors la fonction $x \mapsto P(x)f(x)$ l'est aussi, et qu'on a une inclusion

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}^N).$$

Proposition 4.12. *L'application $\mathcal{F}$ restreinte à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est une bijection linéaire*

$$\mathcal{F}_| : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

dont la bijection réciproque est $\mathcal{F}_|^{-1}$. De plus, $\mathcal{F}_|$ est une isométrie lorsqu'on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de la norme $\|\cdot\|_2$.

Ce résultat permet de prolonger $\mathcal{F}_|$ à $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors même que la formule (4) n'a pas de sens pour une fonction de carré intégrable mais non absolument intégrable (rappelons que $L^2(\mathbb{R}^N) \not\subset L^1(\mathbb{R}^N)$!). Précisément :

Théorème 4.13. *(Théorème de Plancherel).*
1) Les applications $\mathcal{F}_|$ et $\mathcal{F}_|^{-1}$ se prolongent de manière unique en isométries réciproques $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2^{-1} \colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour toutes classes f, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_2 f\|_2 \ , \ \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}_2 f, \mathcal{F}_2 g \rangle.$$

2) Pour tout classe $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier-Plancherel $\mathcal{F}_2 f$ coincide avec la transformée de Fourier $\hat{f}$ $(= \mathcal{F}f)$.

Remarque 4.14. Pour tout *fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\hat{f}$ est une fonction bien définie en tout point de $\mathbb{R}^N$. En revanche, si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathcal{F}_2 f$ définit seulement une *classe* de fonction dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Le point 1) du Théorème 4.13 est une conséquence directe de (7), du fait que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est un sous-espace dense du Banach $L^2(\mathbb{R}^N)$ (cf. 3.19), et du théorème de prolongement des applications linéaires continues entre espaces de Banach, appliqué aux isométries $\mathcal{F}_|$ et $\mathcal{F}_|^{-1}$. Il garantit l'existence et l'unicité du prolongement de $\mathcal{F}_|$, mais ne fournit pas de formule pour $\mathcal{F}_2 f$, lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \setminus L^1(\mathbb{R}^N)$. Cependant, on a :

Proposition 4.15. *Pour toute classe $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a*

$$\mathcal{F}_2 f(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \lim_{A \to +\infty} \int_{\|x\| \leq A} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

où la limite du membre de droite est prise dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ ce résultat est en accord avec le point 2) du Théorème 4.13 (en tenant compte de ce que la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ implique la sous-convergence presque partout). Cette discussion vaut également pour $\mathcal{F}_2^{-1}$. Donc, par la formule d'inversion :

Corollaire 4.16. *Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mathcal{F}_2 f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors*

$$f(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \xi \rangle} (\mathcal{F}_2 f)(\xi) d\xi$$

presque partout sur $\mathbb{R}^N$.

References

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Coll. Math. appliquées pour la maîtrise, Masson (1983)
[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Coll. Sciences Sup, Dunod, Paris (1998)
[3] G. Skandalis, *Topologie et analyse, 3ème année*, Coll. Sciences Sup, Dunod (2004).
[4] C. Tisseron, *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels*, Hermann, Paris (1985)