Analyse Complexe et Topologie (HAX803X) [1]
Notes de cours

Stéphane Baseilhac
stephane.baseilhac@umontpellier.fr
IMAG, Université de Montpellier

1. M1 Mathématiques Fondamentales, 2023-2024, Faculté des Sciences, Univ Montpellier

Table des matières

1 Ce cours, et après **2**

2 Révisions, I : formule de Cauchy et conséquences **3**
- 2.1 Cycles, indice, homologie et simple connexité 3
- 2.2 Formule de Cauchy homologique 8
- 2.3 Holomorphie = analyticité 11
- 2.4 Zéros isolés, principes du max/min, Liouville 13

3 Révisions, II : pôles et théorie des résidus **16**
- 3.1 Fonctions holomorphes dans une couronne 16
- 3.2 Résidus 19
- 3.3 ($*$) Relation avec la formule de Stokes-Cartan 22
- 3.4 Application au calcul d'intégrales 26
  - 3.4.1 Intégrales de fractions rationnelles 26
  - 3.4.2 Intégrales de fractions trigonométriques 27
  - 3.4.3 Calculs de transformées de Fourier 28
- 3.5 Théorèmes de Rouché et de l'application ouverte 29

4 Le théorème de représentation conforme de Riemann **32**
- 4.1 Isomorphismes analytiques 32
- 4.2 Exemples 34
- 4.3 La sphère de Riemann 36
- 4.4 Le théorème de représentation conforme 39
- 4.5 Caractérisations de la simple connexité 44
- 4.6 ($*$) Transformations de Schwarz-Christoffel 45
  - 4.6.1 Intégrales elliptiques et fonctions de Jacobi 50

5 Revêtements et groupe fondamental **51**
- 5.1 Revêtements 51
- 5.2 Homotopies et relèvements d'applications, I 55
- 5.3 Groupe fondamental et relèvements d'applications, II 57
- 5.4 Groupe fondamental et type d'homotopie 61
- 5.5 Calcul des groupes fondamentaux : outils, sphères, cercle, graphes finis 63
- 5.6 ($*$) Le théorème de monodromie 68

Chapitre 1

Ce cours, et après

Le but de ce cours est de :

1. chapitres 2, 3 et 4 : consolider les bases de la théorie des fonctions d'une variable complexe, dans la suite du cours de 3ème année de Licence de Mathématiques de l'Université de Montpellier ;
2. chapitre 5 : aborder quelques rudiments de topologie algébrique, et de théorie des surfaces de Riemann de fonctions analytiques.

Les paragraphes plus difficiles et de nature "culturelle" (: plutôt abordables en vue de développements, dans une seconde lecture) sont indiqués par les symboles "($*$)".

En dehors des références utilisées dans le texte et qu'on trouvera dans la bibliographie, pour des (très nombreux) compléments et développements je recommande les cours suivants (accessibles en ligne à la date de rédaction de ce cours) :

1. J.-P. Demailly, L. Bonavero, *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann*, notes (très augmentées) d'un cours donné à l'École Normale Supérieure de Lyon en 1995-1997 et 2003-2005.

   http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/variablecomplexe.pdf.
2. J.-C. Sikorav, *Surfaces de Riemann*, M1 Mathématiques approfondies, second semestre, ENS Lyon (2011-2012). TD par M. Bourrigan.

   http ://www.bourrigan.fr/ENSL/riemann.html
3. J. Sauloy, *Initiation aux surfaces de Riemann*, Cours de M1, deuxième semestre, Université Paul Sabatier, Toulouse (2010-2011)

Chapitre 2

Révisions, I : formule de Cauchy et conséquences

Les notions suivantes sont considérées comme connues depuis le L3 (cf. [Cas]) :

- intégrale le long d'un arc paramétré d'une fonction d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$;
- fonction holomorphe, équations de Cauchy-Riemann ;
- fonctions analytiques (et propriétés de base des séries entières) ;
- exemples : fonctions circulaires/hyperboliques, exp, Log complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$;
- l'inclusion $\{$fonctions analytiques sur $U\} \subset \{$fonctions holomorphes sur $U\}$ où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert.

Dans ce chapitre nous revenons sur les principaux résultats directement liés à la formule de Cauchy et déjà vus en L3, en rappelant les points clés de certaines preuves, et en donnant quelques compléments nécessaires pour la suite.

2.1 Cycles, indice, homologie et simple connexité

Rappelons tout d'abord quelques points de terminologie. On appellera *arc paramétré* dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. L'image $\Gamma = \gamma([a,b])$ est appelée *support* de l'arc, et l'application γ s'appelle une *paramétrisation* de Γ. On notera (Γ, γ) un tel arc. On dira que (Γ, γ) est un lacet lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$. Notons que γ n'est pas supposée injective.

La donnée d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta : [a', b'] \to [a, b]$ permet d'obtenir un nouveau paramétrage du support Γ de l'arc (Γ, γ), la fonction composée $\gamma \circ \theta$. On dit dans ce cas qu'on fait un changement de paramétrage de Γ. On sait que pour un tel difféomorphisme θ, soit $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in [a', b']$, soit $\theta'(t) < 0$ pour tout $t \in [a', b']$. On parlera de changement de paramétrage *admissible* lorsque $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in [a', b']$. On appellera *arc (orienté)* toute classe d'équivalence d'un arc paramétré (Γ, γ) modulo les changements de paramétrages admissibles.

Toute notion associée à un arc orienté qui ne dépend que de la classe admissible du paramétrage sera appelée *invariant de l'arc orienté*. Il est facile de voir que les extrémités d'un arc sont un invariant puisqu'un changement admissible donnera le même point source et le même point but de l'arc (par contre, les difféos non-admissibles échangent ces points). Par conséquent, la propriété pour un arc d'être un lacet est aussi un invariant de l'arc orienté. Si on effectue un changement de paramétrage non admissible de l'arc Γ le nouvel arc paramétré représente ce que nous appellerons l'arc opposé, que nous noterons $-\Gamma$. Plus précisément, en utilisant le difféomorphisme $\theta(t) = a+b-t$, $t \in [a,b]$, on peut représenter l'arc opposé $-\Gamma$ par le paramétrage $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$.

On appelle *longueur de l'arc* paramétré (Γ, γ) le nombre

$$\ell(\Gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Il est immédiat que l'intégrale est bien définie, puisque γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de sorte que γ' existe et est continue sauf en un nombre fini de points. De plus, on vérifie aisément qu'il s'agit d'un invariant de l'arc orienté. En fait, la longueur est même invariante pour tout changement de paramétrage de Γ, puisqu'il est facile de voir que $\ell(-\Gamma) = \ell(\Gamma)$.

Finalement, rappelons que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et (Γ, γ) un arc paramétré dont le support Γ est contenu dans U, l'intégrale curviligne de f sur Γ est par définition le nombre complexe

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Comme pour la longueur, ce nombre complexe est un invariant de l'arc orienté : il ne dépend pas du paramétrage γ dans une même classe admissible. Un changement non admissible introduit un signe, donc en résumé

$$\ell(-\Gamma) = \ell(\Gamma) \quad \text{et} \quad \int_{-\Gamma} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz.$$

On utilisera souvent :

- l'inégalité
$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq ||f||_\Gamma \,.\, \ell(\Gamma) \tag{2.1}$$
où $||f||_\Gamma := \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| = \sup_{t\in[a,b]} |f \circ \gamma(t)|$. La preuve est une application immédiate de l'inégalité de la moyenne pour l'intégrale sur $[a,b]$ de la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $(f \circ \gamma) \times \gamma'$.
- Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une primitive F sur U (donc F est holomorphe et $F' = f$). Alors pour tout arc paramétré $\gamma\colon [a,b] \to U$ d'image Γ, on a
$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{2.2}$$
La preuve est un exercice élémentaire sur les intégrales curvilignes.

L'exemple fondamental d'intégrale curviligne est le suivant ; nous l'utiliserons sans cesse dans ce cours. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le paramétrage du cercle de centre 0 et de rayon R parcouru n fois, donné par $\gamma_n(t) := Re^{int}$. Alors l'intégrale de f le long de ce lacet paramétré vaut

$$\int_{\Gamma_n} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{int})Rine^{int}dt.$$

En particulier, si $f(z) = z^p$ pour $p \in \mathbb{Z}$ alors on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n} z^p dz &= \int_0^{2\pi} R^p e^{inpt} Rine^{int} dt \\ &= R^{p+1} in \int_0^{2\pi} e^{in(p+1)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n(p+1) \neq 0 \\ 2i\pi n R^{p+1} & \text{si } n(p+1) = 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Lorsque $p = -1$ ceci donne

$$\int_{\Gamma_n} \frac{1}{z} dz = 2i\pi n. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une chaine de U est une somme algébrique (formelle)*

$$\Gamma = n_1\Gamma_1 + \ldots + n_p\Gamma_p,$$

où les coefficients n_i sont des entiers relatifs et les Γ_i sont des arcs (orientés) dont le support est contenu dans U. Le support de la chaine Γ est la réunion $\cup_{i=1}^p \Gamma_i$, c'est donc une partie de U ; on dira que Γ est une chaîne tracée dans U. Une chaine sera appelée cycle si tous les arcs Γ_i sont des lacets.

On étend formellement aux chaines les notions associées aux arcs orientés : la longueur de la chaine $\Gamma = \sum_{i=1}^p n_i\Gamma_i$ est $\ell(\Gamma) := \sum_{i=1}^p |n_i| \ \ell(\Gamma_i)$, et pour tout ouvert U contenant le support de Γ, et toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$, on pose

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^p n_i \int_{\Gamma_i} f(z)dz.$$

On fixe maintenant un cycle Γ et on introduit l'ouvert $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Gamma$, qui possède plusieurs composantes connexes. Puisque Γ est un compact de $\mathbb{C}$, Ω possède une unique composante connexe non bornée. Pour $z_0 \in \Omega$, la fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est continue sur le support de Γ et on peut donc considérer son intégrale le long de Γ.

Définition 2.1.2 *L'indice de z_0 par rapport au cycle Γ est le nombre complexe $\mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)$ défini par :*

$$\mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Théorème 2.1.3 *L'indice $\mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)$ est un entier relatif. De plus, la fonction $\mathrm{Ind}(\cdot, \Gamma) : z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)$ est continue sur $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Gamma$ (et donc constante sur ses composantes connexes), et nulle lorsque z_0 appartient à la composante connexe non bornée de Ω.*

Preuve. Il suffit de considérer le cas d'un lacet (Γ,γ). On fixe $z_0 \in \Omega$ et pour tout $x \in [a,b]$ on pose

$$\alpha(x) := \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt$$

de sorte que $\alpha(b) = 2i\pi \mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)$. La fonction h définie par $h(x) := e^{-\alpha(x)}(\gamma(x)-z_0)$ est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En dehors d'un nombre fini de points de $[a,b]$ on peut calculer sa dérivée :

$$h'(x) = e^{-\alpha(x)}(\gamma'(x)-(\gamma(x)-z_0)\alpha'(x)) = e^{-\alpha(x)}(\gamma'(x)-(\gamma(x)-z_0)\gamma'(x)/(\gamma(x)-z_0)) = 0.$$

Donc, pour tout $x \in [a,b]$ on a $h(x) = h(a)$, et en particulier $h(b) = h(a)$. Comme Γ est un lacet, cela donne $e^{\alpha(b)} = 1$, ce qui n'est possible que si $\alpha(b) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. On conclut que $\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma) \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, en utilisant (2.1) on obtient immédiatement

$$|\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi d(z_0,\Gamma)}$$

où $d(z_0,\Gamma)$ est la distance de z_0 à Γ. Puisque Γ est compact et donc borné dans $\mathbb{C}$, la limite de $\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)$ lorsque z_0 tend vers l'infini est bien nulle.

Montrons maintenant que $\mathrm{Ind}(\cdot,\Gamma)$ est continue sur Ω. Supposons que le disque $D(z_0,r[$ est contenu dans Ω et soit $z_1 \in D(z_0,r/2[$. Alors pour tout $z \in \Gamma$ on a $|z-z_0| \geq r$ et $|z-z_1| \geq r/2$. On peut donc écrire :

$$|\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma) - \mathrm{Ind}(z_1,\Gamma)| = \left| \frac{|z_0-z_1|}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dz}{(z-z_0)(z-z_1)} \right| \leq \frac{|z_0-z_1|}{\pi r^2} \times \ell(\Gamma).$$

Ceci montre la continuité de $\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)$ en z_0. Le raisonnement étant valable en tout point $z_0 \in \Omega$, ceci termine la preuve. □

Intuitivement, $\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)$ compte le nombre de tours que Γ fait autour de z_0. Par exemple, si $\Gamma = \Gamma_n$ est le cercle de rayon R centré en 0 et parcouru n fois, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$ a deux composantes connexes, le disque ouvert $D(0,R[$ et $\mathbb{C} \setminus D(0,R]$. Le théorème 2.1.3 et le calcul (2.4) impliquent

$$\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma) = \mathrm{Ind}(0,\Gamma) = n \text{ si } |z_0| < R\ ,\ \mathrm{Ind}(z_0,\Gamma) = 0 \text{ si } |z_0| > R.$$

Soient maintenant U un *domaine* (=ouvert+connexe) de $\mathbb{C}$, et Γ un cycle tracé dans U.

Définition 2.1.4 *On dira que Γ est homologue à zéro, et on notera $\Gamma \sim_U 0$, lorsque l'indice* $\mathrm{Ind}(z_0,\Gamma)$ *est nul pour tout point $z_0 \notin U$. Deux cycles Γ et Γ' tracés dans U sont dits homologues, et on note $\Gamma \sim_U \Gamma'$, si le cycle $\Gamma - \Gamma'$ est homologue à zéro.*

Intuitivement, $\Gamma \sim_U 0$ si Γ ne tourne autour d'aucun point z_0 de $\mathbb{C} \setminus U$.

On peut maintenant introduire un concept important en topologie et en géométrie, qui peut être défini assez simplement dans le cas d'ouverts de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.5 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. On dira que U est simplement connexe si tout cycle tracé dans U est homologue à 0.*

Comme cette définition repose sur une propriété qui peut être difficile à vérifier, la notion suivante se révèle très utile en pratique.

Définition 2.1.6 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. On dira que U est étoilé s'il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout point $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans U. On appellera un tel point z_0 un centre de U.*

Théorème 2.1.7 *(Poincaré) Tout ouvert étoilé est simplement connexe.*

Preuve. Notons d'abord qu'un ouvert étoilé est connexe par arcs, donc connexe : c'est un domaine de $\mathbb{C}$. De plus, la propriété d'être étoilé est invariante par translation, donc il suffit de démontrer le résultat pour un ouvert U contenant l'origine 0 et tel que 0 est un centre de U (ce qui simplifie les paramétrages ci-dessous). Soit $\gamma : [a, b] \to U$ un lacet tracé dans U, et soit z un point en dehors de U. On sait que pour tout $t \in [a, b]$ le segment $[0, \gamma(t)]$ est contenu dans U. La fonction suivante est donc bien à valeurs dans U,

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [0,1] \times [a,b] & \longrightarrow & U \\ & (s,t) & \longmapsto & s\gamma(t). \end{array}$$

Cette fonction est clairement continue. Pour tout $s \in]0, 1]$, on définit un lacet de U en posant $\gamma_s(t) := \Phi(s, t)$. Il est facile de voir que

$$\mathrm{Ind}(z, \gamma_s) = \mathrm{Ind}(z/s, \gamma).$$

De plus, comme U est étoilé, pour tout $s \in]0, 1]$ le point z/s est en dehors de U, donc $z/s \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. D'après le théorème 2.1.3, il s'ensuit de ces deux faits que la fonction $s \mapsto \mathrm{Ind}(z, \gamma_s)$ est continue, et qu'elle tend vers zéro lorsque $|s| \to 0$. Puisque $\mathrm{Ind}(z, \gamma_s) \in \mathbb{Z}$, cette fonction est constante nulle sur $]0, 1]$. Alors $\mathrm{Ind}(z, \gamma_1) = \lim_{s\to 0} \mathrm{Ind}(z, \gamma_s) = 0$. Comme $\gamma_1 = \gamma$, la preuve est complète pour les lacets. Le résultat pour les cycles découle immédiatement de ce calcul pour les lacets qui composent le cycle. □

Corollaire 2.1.8 *Tout ouvert convexe est simplement connexe.*

Preuve. Il est clair que tout convexe est étoilé. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Poincaré. □

Exemple 2.1.9 1) Le domaine $\Omega := \mathbb{C}\setminus]-\infty; 0]$ est clairement étoilé de centre tout point de $]0; +\infty[$, donc simplement connexe. Rappelons que c'est le domaine de définition de la branche principale du logarithme complexe, $\mathrm{Log}\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $re^{i\theta} \mapsto \ln(r) + i\theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$.

2) Soient $\alpha \in]0; \pi[$, et $S(\alpha) := \{z \in \mathbb{C}, 0 < \arg(z) < \alpha \text{ ou } -\pi < \arg(z) < -\pi + \alpha\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $S(\alpha) \cup D(0, \varepsilon[$ est un domaine étoilé de $\mathbb{C}$, de centre (unique) 0.

3) Pour tous $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 < r < R$, la couronne $U(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$ est un domaine qui n'est pas simplement connexe, puisque l'indice de z_0 par rapport à tout cercle de centre z_0 et de rayon $\rho \in]r, R[$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique vaut 1.

2.2 Formule de Cauchy homologique

Théorème 2.2.1 *(Théorème de Cauchy) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout cycle Γ tracé dans U et homologue à 0 on a*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Esquisse de preuve. On va rappeler après cette esquisse une preuve détaillée dans le cas où U est un ouvert convexe. Ce cas implique les théorèmes de Liouville (Théorème 2.4.7) et de prolongement de Riemann (Proposition 3.1.6). L'holomorphie sous le signe intégral (Proposition 2.3.6) et le théorème de prolongement de Riemann permettent de montrer que les fonctions $h\colon z \mapsto \int_\Gamma \frac{f(u)-f(z)}{u-z}du$ et $k\colon z \mapsto \int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}du$ sont holomorphes sur U et $\Omega_\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}(z, \Gamma) = 0\}$ respectivement. Ces deux fonctions coincident sur $U \cap \Omega_\Gamma$, et sont restriction d'une même fonction entière puisque $\mathbb{C} = U \cup \Omega_\Gamma$ (ceci car $\Gamma \sim_U 0$ implique ${}^c\Omega_\Gamma \subset U$; noter que Ω_Γ est un voisinage ouvert de l'infini). Comme $\lim_{|z|\to+\infty} |k(z)| = 0$, le théorème de Liouville implique que cette fonction entière est nulle, donc h aussi. Cela donne la formule de Cauchy

$$\mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

En appliquant cette formule à la fonction $z \mapsto f(z)(z - a)$ pour $a \notin \Gamma$, on obtient $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Pour des détails sur ces arguments, je renvoie au théorème 8.4 du cours [Hul].

Voici une autre approche par approximation, nettement moins élémentaire. Le théorème est facile à démontrer lorsque $f = P/Q$ est une fraction rationnelle. En effet, à l'aide d'une décomposition en éléments simples de P/Q, on peut écrire

$$\int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_\Gamma R(z)dz + \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\int_\Gamma \frac{c_{i,j}}{(z - z_i)^j}dz\right)$$

où les $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, les z_i sont les racines de Q, et les n_i leurs multiplicités. Polynômes et fonctions $z \mapsto (z - z_i)^{-j}$ pour $j > 1$ sont clairement primitivables sur U, donc leurs intégrales sont nulles d'après (2.2). Pour $j = 1$, on utilise $\Gamma \sim_U 0$ pour conclure. Maintenant, si une suite (f_n) de fonctions complexes continues sur Γ converge uniformément vers f, alors

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{n\to+\infty}\int_\Gamma f_n(z)dz. \tag{2.5}$$

La preuve de ce fait, facile (de niveau L2) et laissée en exercice, repose sur l'inégalité (2.1). Il implique le théorème de Cauchy pour les fonctions qui sont limites uniformes de suites de fractions rationnelles. La conclusion vient alors d'un théorème d'approximation de Runge, qui affirme que les fractions rationnelles forment un sous-espace dense des fonctions holomorphes sur U pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Ce résultat de densité ne sera pas détaillé ici. Pour sa preuve, je renvoie au théorème II.12.2 de [DeM]. (Si U est simplement connexe, les *polynômes* forment un sous-espace dense des fonctions holomorphes sur U, et on a donc un analogue strict du théorème d'approximation des fonctions continues sur un compact ; cf. le théorème II.11.2 de [DeM] lorsque U est un disque ; le cas général vient alors du théorème de représentation conforme 4.4.1.) □

Il sera utile plus tard de revenir sur certains arguments 'standards" utilisés pour démontrer le théorème 2.2.1 dans le cas particulier où U est un ouvert convexe (donc simplement connexe, par le corollaire 2.1.8) :

1) **(Lemme de Goursat étendu - cf cours de L3, [Cas])** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Alors pour tout triangle T contenu dans U on a

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

2) **(Théorème de Cauchy pour les convexes)** Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Alors pour tout cycle Γ tracé dans U on a

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{2.6}$$

Preuve. Soient $a, z \in U$. Le segment $[a, z]$ est contenu dans U, donc on peut définir l'intégrale

$$F_a(z) := \int_{[a,z]} f(u)du.$$

D'après le lemme de Goursat, en considérant le triangle de sommets a, z_0 et z on obtient

$$F_a(z) - F_a(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(u)du.$$

Comme $f(z_0) = \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} f(z_0)du$, il vient

$$\frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(u) - f(z_0))du. \tag{2.7}$$

Mais la continuité de f en z_0 donne pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que $|z'-z_0| < \eta$ implique $|f(z') - f(z_0)| < \varepsilon$. Supposons donc $|z - z_0| < \eta$. Alors pour tout $u \in [z_0, z]$ on a aussi $|u - z_0| < \eta$, et donc

$$\left|\frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Ceci montre que la fonction F_a est holomorphe sur U, de dérivée f. D'après (2.2), on a donc $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. $\square$

Le théorème 2.2.1 donne immédiatement la caractérisation suivante des domaines simplement connexes :

Corollaire 2.2.2 *Un domaine U de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si et seulement si pour tout cycle Γ tracé dans U et toute fonction holomorphe f sur U, on a $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Preuve. Par définition, U est simplement connexe si et seulement si tout cycle Γ tracé dans U est homologue à 0. Or, d'après le théorème de Cauchy, pour tout cycle Γ tracé dans U et homologue à 0, on a $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ pour toute fonction holomorphe f sur U. Réciproquement, si Γ est un cycle tracé dans U et $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ pour toute fonction holomorphe f sur U, alors en prenant en particulier pour f la fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$, où $z_0 \notin U$, on a $2i\pi \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) = \int_\Gamma \frac{1}{z-z_0} dz = 0$ et donc $\Gamma \sim_U 0$. $\square$

Théorème 2.2.3 *(Formule intégrale de Cauchy) Soit U un domaine quelconque de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout point $z_0 \in U$ et tout cycle Γ homologue à 0 dans U et ne passant pas par z_0, on a*

$$\mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Preuve. Ona déjà esquissé une démonstration de ce résultat au début de la preuve du théorème 2.2.1. Montrons-le ici directement à partir de ce théorème. Montrons tout d'abord que la formule est vraie lorsque U est un convexe. Posons

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Alors il est clair que g est continue sur U puisque f y est holomorphe. De plus, g est holomorphe en dehors de z_0. D'après le théorème de Cauchy pour les convexes rappelé ci-dessus, on a

$$\int_\Gamma g(z)dz = 0.$$

Ceci donne exactement la formule de Cauchy annoncée. Traitons maintenant le cas général. Notons $\delta(z_0)$ la distance de z_0 à l'image Γ du cycle, et pour tout $0 < r < \delta(z_0)$, $\mathcal{C}(z_0; r)$ le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté positivement et parcouru une fois. On sait déjà que la formule de Cauchy est vraie pour $\Gamma = \mathcal{C}(z_0; r)$, puisque tout disque contenant $\mathcal{C}(z_0; r)$ et inclus dans U est convexe. Donc

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0;r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

On considère alors l'ouvert $U' := U \setminus D(z_0; r/2]$, qui est clairement connexe (exercice), ainsi que le cycle $\Gamma' := \Gamma - \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)\mathcal{C}(z_0; r)$, dont le support est contenu dans U'. Il suffit de vérifier que le cycle Γ' est homologue à 0 dans U' ; en effet, en appliquant le théorème de Cauchy 2.2.1 à la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$, qui est holomorphe sur U', on aura $\int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$ et donc

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) \int_{\mathcal{C}(z_0;r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) f(z_0) 2i\pi.$$

Montrons maintenant que $\Gamma' \sim_{U'} 0$. Soit d'abord $a \notin U$. Dans ce cas $\mathrm{Ind}(a, \Gamma) = 0$, puisque $\Gamma \sim_U 0$, et on a aussi $\mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}(z_0; r)) = 0$, donc $\mathrm{Ind}(a, \Gamma') = 0$. Si maintenant $a \in D(z_0, r/2]$ alors $\mathrm{Ind}(a, \Gamma) = \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)$ (puisque la fonction $\mathrm{Ind}(\cdot, \Gamma)$ est constante sur les composantes connexes), tandis que $\mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}(z_0; r)) = 1$. D'où

$$\mathrm{Ind}(a, \Gamma') = \mathrm{Ind}(a, \Gamma) - \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma)\mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}(z_0; r)) = \mathrm{Ind}(a, \Gamma) - \mathrm{Ind}(z_0, \Gamma) = 0.$$

Ceci montre bien que $\Gamma' \sim_{U'} 0$. □

2.3 Holomorphie = analyticité

Dans cette section nous rappelons quelques résultats essentiels qui découlent des théorèmes de Cauchy et ont déjà été vus en L3. On se bornera à rappeler l'articulation entre ces résultats, et nous détaillerons seulement les arguments que nous utiliserons plus tard. Compléter les détails est un exercice.

Tout d'abord, mentionnons le résultat suivant, qui s'obtient immédiatement en explicitant la formule de Cauchy sur le cercle de centre a et de rayon r.

Théorème 2.3.1 *(Théorème de la valeur moyenne) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U quelconque de $\mathbb{C}$. Alors pour tout point $a \in U$, et pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r] \subset U$, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Remarque 2.3.2 La valeur de f au centre du disque est donc égale à la moyenne de f sur le bord. En d'autres termes, une fonction holomorphe satisfait la "propriété de la moyenne". Cette propriété de la moyenne n'est pas caractéristique des fonctions holomorphes. Elle est satisfaite par toutes les fonctions $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ qui sont *harmoniques*, c'est-à-dire telles que $\Delta h := \partial_x^2 h + \partial_y^2 h = 0$ (et seulement par elles). La partie réelle, et la partie imaginaire, d'une fonction holomorphe sont harmoniques : cela suit des équations de Cauchy-Riemann. Réciproquement, on peut montrer qu'une fonction harmonique réelle est toujours localement (sur tout ouvert convexe) la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Rappelons maintenant que toute fonction analytique f sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur U, et que f est indéfiniment dérivable au sens complexe sur U (ses dérivées successives sont donc toutes holomorphes sur U). Le théorème suivant montre que la réciproque est vraie :

Théorème 2.3.3 *Toute fonction holomorphe f sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique sur U, et donc indéfiniment dérivable au sens complexe sur U. De plus, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est son développement en série entière sur un disque $D(z_0; R[\subset U$, alors pour tout cercle $\mathcal{C}(z_0; r)$ de centre z_0 et de rayon $0 < r < R$ on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \tag{2.8}$$

Idées de la preuve. On note que pour tout $z \in D(z_0, r[$ avec $r < R$, on a $\mathrm{Ind}(z, \mathcal{C}(z_0; r)) = 1$ et donc $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0;r)} \frac{f(u)}{u-z} du$ par la formule de Cauchy. Comme $|(z-z_0)/(u-z_0)| < 1$ pour tout $u \in \mathcal{C}(z_0; r)$, nous avons le développement de la série de Neumann, qui converge normalement sur $\mathcal{C}(z_0; r)$:

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-z_0)(1-\frac{z-z_0}{u-z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}.$$

La conclusion vient alors en remplaçant $f(u)/(u-z)$ par cette série dans l'intégrale, et en faisant une interversion série-intégrale (cf. (2.5)). □

Notons en passant que le même argument de développement en série de Neumann sous le signe intégral au voisinage d'un point $z_0 \in U$ montre le fait suivant, qu'on utilise très souvent pour construire des fonctions holomorphes :

Proposition 2.3.4 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, Γ un cycle tracé dans U, et φ une fonction complexe* continue *sur le support de Γ. Alors l'expression*

$$f(z) := \int_{\Gamma} \frac{\varphi(u)}{u-z} du$$

définit une fonction analytique f sur l'ouvert $U \setminus \Gamma$.

On déduit du théorème 2.3.3 une caractérisation des fonctions holomorphes sur un ouvert :

Théorème 2.3.5 *(Critère de Morera) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue U. Alors*

$$\text{f est holomorphe sur } U \iff \int_{\partial T} f(z)dz = 0 \text{ pour tout triangle } T \subset U.$$

Si U est convexe, alors

$$\text{f est holomorphe sur } U \iff \int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ pour tout cycle } \Gamma \text{ dans } U.$$

Preuve. La partie directe est conséquence du lemme de Goursat et du théorème de Cauchy pour les convexes, respectivement. Pour la réciproque, dans le cas où U est convexe, comme après (2.6) on obtient que pour tout $z_0 \in U$ la fonction $F_{z_0}(z) :=$

$\int_{[z_0,z]} f(u)du$ est holomorphe sur U, de dérivée f, donc f est holomorphe. Dans le premier cas, on observe qu'il suffit de tester l'holomorphie de f sur un disque ouvert $D(z_0;r[$ contenu dans U, et on applique le même argument dans $D(z_0;r[$ (qui est convexe). □

On utilise souvent le critère de Morera au travers du critère suivant :

Proposition 2.3.6 (Holomorphie sous le signe intégral) *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $g\colon [0,1] \times U \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $g_t := g(t,\cdot)$ est holomorphe sur U. Alors $h(z) := \int_0^1 g(t,z)dt$ est holomorphe sur U, de dérivée $h'(z) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z}(t,z)dt$.*

Esquisse de preuve. Continuité de h : classique (eg. comme conséquence du théorème de convergence dominée). Holomorphie de h : on applique le critère de Morera sur ∂T, et Fubini sur le compact $\partial T \times [0,1]$ pour échanger les deux intégrales $\int_{\partial T}$ et $\int_0^1$. La formule (2.8) pour $h'(z)$ peut se réécrire sous la forme donnée à l'aide du théorème de Fubini. □

Si U est un domaine de $\mathbb{C}$, on rappelle que l'espace $\mathcal{C}(U)$ des fonctions continues sur U à valeurs complexes peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On sait alors que $\mathcal{C}(U)$ est métrisable et complet. Notons $\mathcal{H}(U)$ le sous-espace des fonctions holomorphes sur U. Le résultat suivant, corollaire du théorème de Morera, est une version d'un fameux théorème de Weierstrass :

Théorème 2.3.7 *L'espace $\mathcal{H}(U)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U)$. Autrement dit, toute fonction f, qui est limite uniforme sur les compacts de U d'une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur U, est elle-même holomorphe sur U.*

Preuve. Il suffit de le vérifier sur un disque ouvert inclus dans U. Tout cycle Γ tracé dans un tel disque est compact, donc f est limite uniforme de (f_n) sur Γ. D'après le critère de Morera pour les convexes, on a $\int_\Gamma f_n(z)dz = 0$, donc la conclusion vient en appliquant (2.5). □

Remarque 2.3.8 Noter le contraste avec les fonctions de variable réelle. Considérer la suite de fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2 + 1/n)^{1/2}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui converge localement uniform'ment vers la fonction $t \mapsto |t||$ non dérivable en l'origine.

2.4 Zéros isolés, principes du max/min, Liouville

Dans cette section encore, nous nous bornons à rappeler quelques résultats essentiels vus en L3, ne détaillant que les arguments que nous rencontrerons à nouveau plus tard. Compléter les détails est un exercice.

On va maintenant faire intervenir la notion de connexité et supposer que U est un *domaine* de $\mathbb{C}$, c'est à dire un ouvert connexe, et $f \in \mathcal{H}(U)$.

Soit

$$A := \{z \in U, f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \geq 0\}.$$

On montre sans peine que A est un fermé de U, et en utilisant le fait que f est analytique (théorème 2.3.3), que A est ouvert dans U. Donc si A est non vide, la connexité de U implique $A = U$, et donc f est identiquement nulle.

Ceci montre que si f n'est pas identiquement nulle et $f(a) = 0$, alors il existe un plus petit entier $p \geq 1$ tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$; on appelle cet entier *la multiplicité de a.* Le développement en série entière de f sur un disque ouvert $D(a, r[$ contenu dans U donne alors :

$$f(z) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(z-a)^p[1 + c_1(z-a) + \ldots] \tag{2.9}$$

avec $[1 + c_1(z-a) + \ldots]$ une série entière normalement convergente dans $D(a, r[$ et qui tend vers 1 lorsque $z \to a$. Ceci montre qu'il existe $\rho > 0$ tel que f ne s'annule pas sur le disque $D(a, \rho[\setminus\{a\}$. En conclusion :

Théorème 2.4.1 *(Zéros isolés) Soit f une fonction holomorphe sur un domaine U de $\mathbb{C}$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Alors les zéros de f sont tous isolés dans U, et la multiplicité d'un zéro a de f est le seul entier $p \geq 1$ tel que la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^p}$ soit holomorphe sur U avec $g(a) \neq 0$.*

Dans la pratique on utilise le plus souvent ce résultat sous la forme suivante : si f, g sont deux fonctions holomorphes quelconques sur un domaine U de $\mathbb{C}$, et il existe une suite (z_n) non-stagnante d'éléments de U telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n, et convergeant dans U, alors $f = g$ sur U (en effet la limite de (z_n) est un zéro non isolé de la fonction holomorphe $f - g$ sur U).

Le résultat suivant est une conséquence du théorème des zéros isolés et du théorème de la valeur moyenne, 2.3.1 :

Théorème 2.4.2 *(Principe du maximum) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur un domaine U de $\mathbb{C}$. Alors aucun point de U ne peut être un maximum local pour f ; autrement dit, pour tous $a \in U$ et $R > 0$ il existe $b \in D(a, R[\cap U$ tel que $|f(b)| > |f(a)|$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $|f(a)|$ est un maximum local pour f. Soit $r > 0$ tel que $D(a, r] \subset U$, et $|f(a)|$ est un maximum sur ce disque. Alors pour tout θ on a $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. Montrons qu'en fait on a égalité. S'il existait θ_0 tel que $|f(a + re^{i\theta_0})| < |f(a)|$, alors on aurait $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ sur un petit voisinage de θ_0 et donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta < |f(a)|$$

C'est absurde, car la formule de la moyenne dans le disque $D(a, r]$ implique l'inégalité large opposée, $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta$. On conclut donc que $|f|$ est constante sur le cercle de centre a et de rayon $|f(a)|$. En appliquant cette méthode à tout disque contenu dans $D(a, r]$, on déduit que $|f|$ est constante sur tout le disque $D(a, r]$ (faire un dessin !). Puisque U est un domaine, le théorème des zéros isolés implique que f est constante sur U. $\square$

Les deux corollaires ci-dessous découlent immédiatement du principe du maximum et du théorème des zéros isolés. On laisse les preuves en exercice.

Corollaire 2.4.3 *Si U est domaine borné, et $f\colon U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe continue sur l'adhérence $\bar{U}$, alors $|f|$ atteint toujours son maximum sur le bord de $\bar{U}$.*

Corollaire 2.4.4 *(Principe du minimum) Soit f holomorphe non constante sur un domaine U de $\mathbb{C}$. Si un point a de U réalise un minimum relatif de $|f|$, alors $f(a) = 0$. En particulier, une fonction holomorphe non constante et ne s'annulant pas sur un domaine U ne possède pas de minimum local dans U.*

Corollaire 2.4.5 *(Lemme de Schwarz) Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et qui satisfait $f(0) = 0$. Alors*

$$(|f(z)| \leq 1, \text{ pour } |z| = 1) \Rightarrow \big(|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \bar{\mathbb{D}}\big).$$

Preuve. La fonction $g\colon \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) := f(z)/z$ pour $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ (clair), et holomorphe sur $\mathbb{D}$ puisque $f(0) = 0$ et f analytique impliquent $f(z) = zk(z)$ avec k holomorphe sur $\mathbb{D}$. On peut donc appliquer le principe du maximum : d'après l'hypothèse, pour $|z| = 1$ on a $|g(z)| = |f(z)| \leq 1$, donc pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$ on a $|g(z)| \leq 1$. Cela montre $|f(z)| \leq |z|$ pour $z \neq 0$. Le cas $z = 0$ est évident. □

Corollaire 2.4.6 *(Lemme de Schwarz, version 2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Preuve. Pour $0 < r < 1$ on pose $f_r(z) := f(rz)$. Alors f_r satisfait les hypothèses du lemme de Schwartz précédent, donc $|f_r(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$. En particulier, pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $r < 1$ on voit que $|f(rz)| \leq |z|$. Comme f est continue, on peut faire tendre r vers 1 pour conclure. □

Enfin, tournons-nous vers les théorèmes de Liouville. Rappelons qu'une fonction entière est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$. Il y a identité entre fonctions entières et séries entières de rayon de convergence infini (exercice).

Théorème 2.4.7 *(Théorème de Liouville généralisé) Soit f une fonction entière telle qu'il existe un entier $k \geq 0$ et deux constantes $A \geq 0$ et $B > 0$ telles que*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k.$$

Alors f est un polynôme de degré au plus k. En particulier, une fonction entière qui est bornée sur $\mathbb{C}$ (ie.$k = 0$) est nécessairement constante, et une fonction entière f telle que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = \ell$ existe est nécessairement identiquement égale à ℓ.

Preuve. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série de f en 0. L'identité (2.8) pour les coefficients a_n implique facilement

$$|a_n| \leq ||f||_{\mathcal{C}(0;R)} \times R^{-n}.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, l'hypothèse implique $a_n = 0$ pour tout $n > k$. Ceci prouve les deux premières affirmations. La dernière vient en notant qu'une fonction qui admet une limite en l'infini ℓ est nécessairement bornée, donc constante par ce qui précède. La constante coincide nécessairement avec ℓ. □

Chapitre 3

Révisions, II : pôles et théorie des résidus

3.1 Fonctions holomorphes dans une couronne

On considère pour $0 \leq r < R$ la couronne de centre $a \in \mathbb{C}$ définie par

$$U_a(r, R) := \{z \in \mathbf{C}, r < |z - a| < R\}.$$

Il s'agit d'un ouvert connexe qui n'est pas simplement connexe. On notera $\mathcal{C}(a, \rho)$ le cercle de centre a et de rayon ρ paramétré dans le sens trigonométrique et parcouru une fois (par exemple avec $\gamma(t) := a + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$), et lorsque $a = 0$ on notera $U_a(r, R)$ simplement $U(r, R)$.

Proposition 3.1.1 *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $U_a(r, R)$. Alors pour tout $\rho \in]r, R[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ l'intégrale*

$$\int_{\mathcal{C}(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

ne dépend pas de ρ.

Preuve. Soient ρ et ρ' tels que $r < \rho < \rho' < R$. Le cycle $\Gamma := \mathcal{C}(a, \rho') - \mathcal{C}(a, \rho)$ est homologue à 0 dans la couronne $U_a(r, R)$. La fonction $f(z)/(z-a)^{n+1}$ étant holomorphe sur $U_a(r, R)$, on peut appliquer le théorème de Cauchy et déduire

$$\int_{\mathcal{C}(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \int_{\mathcal{C}(a,\rho')} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

□

Théorème 3.1.2 *(Développement de Laurent) Soient $0 \leq r < \rho < R$. Toute fonction f holomorphe sur la couronne ouverte $U_a(r, R)$ est développable en série dite* de Laurent, *de la forme*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{avec} \quad a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Preuve. Soient ρ et ρ' deux rayons tels que $r < \rho < \rho' < R$, et soit z tel que $\rho < |z-a| < \rho'$. Comme $\Gamma = \Gamma := \mathcal{C}(a,\rho') - \mathcal{C}(a,\rho)$ est homologue à 0 dans la couronne $U_a(r,R)$, on peut appliquer la formule intégrale de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z)}du = \text{Ind}(z,\Gamma)f(z).$$

Or, $\text{Ind}(z,\Gamma) = \text{Ind}(z,\mathcal{C}(a,\rho')) - \text{Ind}(z,\mathcal{C}(a,\rho)) = 1 - 0 = 1$, et donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho')} \frac{f(u)}{(u-z)}dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho)} \frac{f(u)}{(u-z)}dz.$$

Si $u \in \mathcal{C}(a,\rho')$, alors $\dfrac{|z-a|}{|u-a|} < 1$ et on a

$$\frac{1}{u-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Si $u \in \mathcal{C}(a,\rho)$, alors $\dfrac{|u-a|}{|z-a|} < 1$ et on a

$$\frac{1}{u-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Les deux séries convergent uniformément sur les cercles respectifs, donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho')} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du + \sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^{-(n+1)}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho)}(u-a)^n f(u)du.$$

Si on réindexe on obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho')} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du + \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho)}(u-a)^{-(n+1)} f(u)du.$$

□

Définition 3.1.3 (Des singularités) *Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $U_{z_0}(0,R) = D(z_0,R[\backslash\{z_0\}$, et $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ son développement de Laurent dans $U_{z_0}(0,R)$. Alors :*

- *S'il existe une infinité d'indices $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$, on dit que z_0 est une singularité essentielle de f.*
- *S'il existe $q < 0$ tel que pour tout $n < q$ on a $a_n = 0$, on dit que z_0 est un pôle de multiplicité (ou d'ordre) $-q$, et que f est méromorphe en z_0 ;*
- *Si f peut être prolongée en une fonction holomorphe en z_0, on dit que z_0 est une fausse singularité, ou singularité effaçable, de f.*

Définition 3.1.4 *Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $U_{z_0}(0,R) = D(z_0,R[\backslash\{z_0\}$, et $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ son développement de Laurent sur $U_{z_0}(0,R)$. Le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f est appelé le résidu de f en z_0 et noté* $\mathrm{Res}(f,z_0)$. *Donc pour tout $0 < \rho < R$,*

$$\mathrm{Res}(f,z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,\rho)} f(z)dz.$$

Exemple 3.1.5 (1) Soit $f(z) := 1/z(z-1)$, qui est holomorphe sur la couronne $U(0,1)$. Le développement de Laurent de f au voisinage de 0 est

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

On voit que 0 est un pôle d'ordre 1, et $\mathrm{Res}(f,0) = -1$.
(2) Soit $f(z) := e^{1/z}$, qui est holomorphe sur toute couronne $U(0,R)$. Pour tout $z \neq 0$ on a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1/n!}{z^n},$$

donc 0 est ici une singularité essentielle de f, et $\mathrm{Res}(f,0) = 1$.

Clairement, si pour tout $n < 0$ on a $a_n = 0$, alors a est une fausse singularité de f.

Proposition 3.1.6 (Les fausses singularités) *Une fonction f holomorphe sur un disque épointé $D(z_0,r[\ \backslash\{z_0\}$ est holomorphe en z_0 si, et seulement si, $|f|$ est bornée sur $D(z_0,r[\ \backslash\{z_0\}$. En particulier, si $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$, alors z_0 est une fausse singularité de f.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On sait que f est holomorphe dans la couronne $U_{z_0}(0,R)$ pour un rayon $R > 0$, donc elle y admet un développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, avec

$$a_{-(n+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,\rho)} (z-z_0)^n f(z)dz$$

pour tout $n \geq 0$ et $\rho \in]0,R[$. On a

$$\begin{aligned}|a_{-(n+1)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \times \sup_{|z-z_0|=\rho} |(z-z_0)^n f(z)| \times 2\pi\rho \\ &= \rho^{n+1} \times \sup_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \leq C\rho^{n+1}\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$, d'après l'hypothèse. Lorsque ρ vers zéro, le membre de droite tend vers zéro. Donc $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. □

Théorème 3.1.7 (Casorati-Weierstrass) *Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D(z_0,R[\backslash\{z_0\}$, avec une singularité essentielle en z_0. Alors, pour tout $0 < \rho < R$, l'ensemble $f(D(z_0,\rho[\backslash\{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si $f(D(z_0,\rho[\setminus\{z_0\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$ il existe $w \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ tels que $|f(z)-w| > \epsilon$. La fonction $g : z \mapsto (f(z)-w)^{-1}$ est donc bornée sur tout disque épointé $D(z_0,\rho'[\setminus\{z_0\}$, où $0 < \rho' < \rho$. La proposition 3.1.6 implique alors que z_0 est une fausse singularité de g : on peut prolonger g en une fonction $\tilde{g}$ holomorphe sur tout le disque $D(z_0,\rho[$. Si $\tilde{g}(z_0) \neq 0$, alors $1/\tilde{g}(z) = f(z) - w$ est holomorphe en z_0, ce qui contredit l'hypothèse. Si $\tilde{g}(z_0) = 0$, alors pour tout z dans un voisinage de z_0 on a $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^p h(z)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et h holomorphe telle que $h(z_0) \neq 0$. Donc dans ce voisinage $f(z) - w = 1/(z - z_0)^p h(z)$ avec $1/h(z)$ holomorphe, ce qui implique que z_0 est un pôle de f, contredit à nouveau l'hypothèse. En conclusion, $f(D(z_0,\rho[\setminus\{z_0\})$ est nécessairement dense dans $\mathbb{C}$. □

Remarque 3.1.8 Le grand théorème de Picard, beaucoup plus difficile, complète ce théorème. Il affirme, sous les mêmes hypothèses, qu'on a l'alternative suivante : soit $f(D(z_0,\rho[\setminus\{z_0\})) = \mathbb{C}$ pour tout $0 < \rho < R$, soit il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $0 < \rho < R$ assez petit, l'image $f(D(z_0,\rho[\setminus\{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$. Les fonctions $z \mapsto \sin(1/z)$ et $z \mapsto \exp(1/z)$ illustrent, au voisinage de l'origine, l'un et l'autre cas. On peut reformuler ce résultat comme suit. Soit f holomorphe possédant une singularité isolée au point z_0. Si il existe un voisinage épointé de z_0 dont l'image par f omet deux points de $\mathbb{C}$, alors la singularité est un pôle ou bien une singularité effaçable.

On tire de ces deux résultats la règle pratique qui suit pour déterminer la nature d'une singularité (les équivalences étant faciles à démontrer) :

Corollaire 3.1.9 *Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D(z_0,R[\setminus\{z_0\}$. Alors :*

- *f est bornée dans un voisinage de z_0 si, et seulement si, z_0 est une fausse singularité ;*
- *$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ si, et seulement si, z_0 est un pôle ;*
- *il existe au moins deux suites (z_n) et (w_n) qui convergent vers z_0 et telles que $\lim_{n\to+\infty} f(z_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(w_n)$ sont distinctes ou n'existent pas si, et seulement si, z_0 est une singularité essentielle.*

3.2 Résidus

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit f une fonction holomorphe sur U sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable de points z_n, $n \geq 1$, de U.

Définition 3.2.1 *On dit que f est une fonction méromorphe sur U lorsque l'ensemble des points z_n, $n \geq 1$, est sans point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, et chaque point z_n est un pôle de f.*

Notons que l'absence de points d'accumulation implique que si une fonction méromorphe a une infinité de singularités, alors leur ensemble n'est pas borné. Si g et h sont deux fonctions holomorphes sur U, leur quotient $f = g/h$ est méromorphe sur U puisque ses singularités sont les zéros de h, qui sont isolés dans U d'après le théorème des zéros isolés.

Remarque 3.2.2 En fait, toute fonction méromorphe sur U peut s'écrire comme un tel quotient g/h (pour $U = \mathbb{C}$ c'est un théorème classique de Weierstrass, voir par exemple [Hul], Corollaire 10.17). Comme $\mathcal{H}(U)$ est un anneau intègre si U est connexe (cf. TD1), il s'ensuit que dans ce cas l'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méroromorphes sur U est un corps, le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{H}(U)$.

Théorème 3.2.3 (Théorème des résidus) *Soient U un ouvert simplement connexe, et f une fonction méromorphe sur U de singularités z_n, $n \geq 1$. Soit Γ un cycle dans U qui ne contient aucune singularité de f. Alors le nombre de singularités z_n telles que* $\mathrm{Ind}(z_n, \Gamma) \neq 0$ *est fini, et on a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n\geq 1} \mathrm{Ind}(z_n, \Gamma)\mathrm{Res}(f, z_n).$$

Preuve. Le complémentaire de Γ est la réunion de plusieurs composantes connexes, et contient une seule composante connexe non bornée. Pour tout point z_n dans cette composante non bornée, on a $\mathrm{Ind}(z_n, \Gamma) = 0$ (théorème 2.1.3). Les autres singularités vivent toutes dans la réunion des composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Cette réunion étant relativement compact, on ne peut en avoir une infinité sans avoir de point d'accumulation. Donc, la somme dans le membre de droite est bien une somme finie et on ne considérera dans la suite de cette preuve que ces singularités (en nombre fini) qui contribuent à la somme.

On choisit pour chaque singularité z_n un rayon $r_n > 0$ tel que

$$\bigcup_{n\geq 1} D(z_n, r_n[\subset U \cap (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \quad \text{et} \quad D(z_n, r_n[\bigcap D(z_m, r_m[= \emptyset \quad \text{pour} \quad n \neq m.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ notons $\mathcal{C}_n$ le cercle de centre z_n et de rayon $r_n/2$. Soit $U' := U \setminus \cup_{n\geq 1} D(z_n, r_n/4]$. Posons $\Gamma' := \Gamma - \sum_n \mathrm{Ind}(z_n, \Gamma)\mathcal{C}_n$; c'est un cycle de U', qui est homologue à 0 dans U'. En effet, si $a \notin U'$, alors $a \notin U$ ou a est dans l'un des disques $D(z_n, r_n/4]$. Si $a \notin U$, alors $\mathrm{Ind}(a, \Gamma) = 0$ et $\mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}_n) = 0$ pour tout n, puisque U est simplement connexe. Donc $\mathrm{Ind}(a, \Gamma') = 0$ dans ce cas. Si a appartient à un disque $D(z_{n_0}, r_{n_0}/4]$ alors

$$\mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}_n) = 0 \text{ si } n \neq n_0, \ \mathrm{Ind}(a, \mathcal{C}_{n_0}) = 1, \text{ et } \mathrm{Ind}(a, \Gamma) = \mathrm{Ind}(z_{n_0}, \Gamma).$$

Par conséquent, $\mathrm{Ind}(a, \Gamma') = \mathrm{Ind}(a, \Gamma) - \mathrm{Ind}(z_{n_0}, \Gamma) = 0$ dans ce cas aussi. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy à la fonction f holomorphe sur le domaine U' avec le cycle $\Gamma' \sim_{U'} 0$ pour obtenir :

$$\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)dz - \sum_n \mathrm{Ind}(z_n, \Gamma) \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} f(z)dz = 0.$$

Cela donne le résultat puisque $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} f(z)dz = \mathrm{Res}(f, z_n)$. □

Remarque 3.2.4 On vérifie sans peine que le théorème reste vrai :

1) si l'on suppose seulement que les singularités z_n sont isolées (pôles ou singularités essentielles ; même preuve).

2) en remplaçant l'hypothèse "U simplement connexe" par "$\Gamma \sim_U 0$". Je laisse la preuve en exercice (indication : (a) le théorème de Cauchy assure que l'intégrale de f le long de Γ est égale à l'intégrale de la somme des parties singulières (qui sont finies !) des développements de Laurent de f aux points z_n tels que $\mathrm{Ind}(z_n, \Gamma) \neq 0$; (b) par calcul immédiat, cette dernière intégrale donne le résultat.)

Voici un cas particulier que nous utiliserons plus tard : si f est une fonction méromorphe dans le disque ouvert $D(0, R[$, alors f'/f l'est aussi, et si a est un zéro (resp. pôle) de f de multiplicité m, on a (exercice !)

$$\mathrm{Res}(f'/f, a) = m \quad (\text{resp. } -m). \tag{3.1}$$

Alors pour $0 < r < R$ tel que le cercle $\mathcal{C}(0, r)$ ne contient ni zéro ni pôle de f, le théorème des résidus implique immédiatement :

Corollaire 3.2.5 (Principe de l'argument) *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (\textit{nombre de zeros de } f \textit{ dans } D(0, r[) \\ - (\textit{nombre de poles de } f \textit{ dans } D(0, r[).$$

Remarque 3.2.6 En fait, le théorème des résidus implique le principe de l'argument sous les hypothèse suivantes, plus générales : U est un domaine de $\mathbb{C}$, $f \colon U \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, et K un compact simplement connexe inclus dans U et dont le bord ∂K est connexe, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et ne contient aucun des zéros ni aucun des pôles de f. Alors, désignant par $\mathcal{Z}(f)$ (resp. $\mathcal{P}(f)$) le nombre de zéros (resp. pôles) de f contenus dans K, comptés avec multiplicités, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}(f) - \mathcal{P}(f)$$

où le chemin ∂K est parcouru une fois positivement. En effet les formules (3.1) restent valides. Ce sens de parcours "positif", intuitivement clair, peut être défini comme suit : ∂K est parcouru positivement si, étant donné un paramétrage admissible $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$, le vecteur $i\gamma'(t)$ pointe vers l'intérieur de K (noter que $i\gamma'(t)$ est toujours orthogonal au vecteur $\gamma'(t)$, tangent à ∂K).

En pratique, on applique la formule ci-dessus au cas où l'on se donne une *courbe de Jordan* $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'image d'une application $S^1 \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective. C'est un théorème que le complémentaire d'une courbe de Jordan a deux composantes connexes : l'une est non bornée, et l'autre, bornée, est homéomorphe à un disque. Alors dans les notations ci-dessus on prend K cette composante bornée (on l'appelle souvent *l'intérieur* de $\mathcal{C}$), et donc $\mathcal{C} = \partial K$.

Soient maintenant U un domaine, f méromorphe sur U, et $z_0 \in U$ une singularité de f qui est un pôle.

Lemme 3.2.7 (Calcul des résidus aux pôles) *Si z_0 est un pôle de f d'ordre $q \geq 1$, alors*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(q-1)!}[(z - z_0)^q f(z)]^{(q-1)}(z_0).$$

En particulier, si z_0 est un pôle simple de $f = g/h$, où g, h sont des fonctions holomorphes sur U, on a $\operatorname{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z)$.

Preuve. On sait que dans un disque épointé $D(z_0, r[\setminus \{z_0\}$ on peut écrire

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^q}$$

avec F holomorphe sur $D(z_0, r[$. Si on écrit le développement de Taylor de F au voisinage de z_0 alors on voit facilement que le résidu de f en z_0 coincide avec le coefficient de $(z - z_0)^{q-1}$ dans ce développement de Taylor, i.e. $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(q-1)!} F(z_0)^{(q-1)}$. Comme $F(z) = (z - z_0)^q f(z)$, la conclusion suit. □

3.3 (∗) Relation avec la formule de Stokes-Cartan

Le but de cette section est strictement culturel. Nous allons reformuler le théorème des résidus en termes de formes différentielles. Il apparaîtra comme un avatar du résultat fondamental du calcul différentiel (cf. par exemple l'article Wikipedia, "Generalized Stokes theorem" et ses références) :

Théorème 3.3.1 (Théorème de Stokes-Cartan) *Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et degré $(n-1)$ à support compact sur une variété compacte orientée M de classe $\mathcal{C}^k$ et dimension n, à bord ∂M muni de l'orientation induite. Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

L'application de ce théorème dans notre situation sera élémentaire : on va prendre U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $M \subset U$ un compact à bord ∂M de classe $\mathcal{C}^1$.

Rappelons (cf. cours de géométrie différentielle) qu'on peut associer à l'ouvert U l'*algèbre différentielle des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$*,

$$\Omega^*(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega^1(U, \mathbb{R}) \oplus \Omega^2(U, \mathbb{R}).$$

Concrètement :

- une 0-forme $f \in \Omega^0(U, \mathbb{R})$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de U dans $\mathbb{R}$;
- une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ est la donnée pour tout point $p \in U$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p \colon T_pU \to \mathbb{R}$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de p ;

- une 2-forme $\omega \in \Omega^2(U, \mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in U$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pU \times T_pU \to \mathbb{R}$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de p.

Dans le système de coordonnées (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on peut donc écrire

$$\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy \tag{3.2}$$
$$\omega = k(x, y)dx \wedge dy \tag{3.3}$$

où g, h et k sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Le produit d'une 0-forme f et d'une k-forme $(k = 1, 2)$ est la multiplication usuelle par la fonction f, le produit d'une 1-forme et d'une 2-forme ou de deux 2-formes est nul, et on a le *produit extérieur* $\wedge : \Omega^1(U, \mathbb{R}) \times \Omega^1(U, \mathbb{R}) \to \Omega^2(U, \mathbb{R})$ et la *différentielle* $d\colon \Omega^k(U, \mathbb{R}) \to \Omega^{k+1}(U, \mathbb{R})$ $(k = 0, 1)$, qui vérifient $d \circ d = 0$ et :

$$\begin{aligned}(g(x, y)dx + h(x, y)dy) \wedge (g'(x, y)dx + h'(x, y)dy)\\ = (g(x, y)h'(x, y) - h(x, y)g'(x, y))dx \wedge dy\end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$d(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy \ , \ d(g(x, y)dx + h(x, y)dy) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \tag{3.5}$$

En complexifiant, on obtient l'*algèbre différentielle des formes différentielles complexes*,

$$\Omega^*(U, \mathbb{C}) = \Omega^0(U, \mathbb{C}) \oplus \Omega^1(U, \mathbb{C}) \oplus \Omega^2(U, \mathbb{C}).$$

Concrètement :

- une 0-forme $f \in \Omega^0(U, \mathbb{C})$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de U dans $\mathbb{C}$;
- une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ est la donnée pour tout point $p \in U$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p\colon T_pU \to \mathbb{C}$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de p ;
- une 2-forme $\omega \in \Omega^2(U, \mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in U$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pU \times T_pU \to \mathbb{C}$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de p.

Les formules (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5) restent valables, avec cette fois g, g', h, h' et k dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$. Nous allons exprimer tout cela en remplaçant x et y par z et $\bar{z}$. On a $dx = \mathfrak{Re}(dz) = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ et $dy = \mathfrak{Im}(dz)\frac{i}{2}(-dz + d\bar{z})$, donc la 1-forme $\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ s'écrit

$$\alpha = \underbrace{\frac{g(z) - ih(z)}{2}dz}_{\alpha^{1,0}} + \underbrace{\frac{g(z) + ih(z)}{2}d\bar{z}}_{\alpha^{0,1}}.$$

Le terme $\alpha^{1,0}$ est la composante $\mathbb{C}$-linéaire de α, et $\alpha^{0,1}$ est sa composante anti-$\mathbb{C}$-linéaire (où α est considérée comme une fonction $TU_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, où $TU_{\mathbb{C}} := \cup_{p\in U}(T_pU \otimes \mathbb{C})$ est le fibré tangent complexifié). Ils sont définis de façon intrinsèque, par :

$$\alpha^{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha \circ J), \alpha^{0,1} = \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha \circ J)$$

où l'endomorphisme $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de matrice

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique (e_1, e_2), est vu comme un endomorphisme de T_pU, pour tout $p \in U$, en identifiant (e_1, e_2) avec la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pU. En particulier, si $f(z) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ on a

$$d(f(z)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} dz}_{df^{1,0}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{df^{0,1}} \tag{3.6}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ , \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On notera $\partial f := \frac{\partial f}{\partial z}$, $\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, et $\Omega^{1,0}(U, \mathbb{C})$ et $\Omega^{0,1}(U, \mathbb{C})$ les espaces de formes $\mathbb{C}$-linéaires et anti-$\mathbb{C}$-linéaires sur U, c'est-à-dire d'écriture gdz et $hd\bar{z}$ respectivement. Une forme $\alpha \in \Omega^{1,0}(U, \mathbb{C})$ (resp. $\Omega^{0,1}(U, \mathbb{C})$) est dite de type $(1,0)$ (resp. $(0,1)$). On a donc une décomposition naturelle en deux sous-espaces vectoriels complexes, conjugués l'un de l'autre :

$$\Omega^1(U, \mathbb{C}) = \Omega^{1,0}(U, \mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,1}(U, \mathbb{C}).$$

Une 1-forme complexe $\omega \in \Omega^{1,0}(U, \mathbb{C})$ est une *différentielle holomorphe* si $\omega = f(z)dz$, où f est une fonction holomorphe sur U. Une *différentielle méromorphe* sur U est une différentielle holomorphe définie sur $U \setminus P$, où P est un sous-ensemble localement fini, de la forme $\omega = f(z)dz$, où f est méromorphe sur U de pôles P.

Proposition 3.3.2 *Soit $\omega \in \Omega^{1,0}(U, \mathbb{C})$. Alors ω est holomorphe si et seulement si $d\omega = 0$.*

Preuve. De (3.6) on tire que f est holomorphe si et seulement si $\bar{\partial} f = 0$. Comme $dz \wedge dz = 0 = d\bar{z} \wedge d\bar{z}$ et $dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy = -d\bar{z} \wedge dz$, on a de plus

$$\begin{aligned} d(g(z)dz + h(z)d\bar{z}) &= dg \wedge dz + dh \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial z} dz + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

D'après ce calcul, si $\omega = f(z)dz$, alors $d\omega = -\bar{\partial} f dz \wedge d\bar{z}$, donc $d\omega = 0$ équivaut à $\bar{\partial} f = 0$, soit f est holomorphe. □

Remarque 3.3.3 Ce résultat est profond : il caractérise les fonctions holomorphes $f\colon U \to \mathbb{C}$ comme les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U dont les 1-formes $f(z)dz$ engendrent le noyau de l'opérateur $d\colon \Omega^{1,0}(U, \mathbb{C}) \to \Omega^2(U, \mathbb{C})$.

Soit ω une différentielle méromorphe sur U ; donc $\omega = f(z)dz$ où f est méromorphe. On définit bien sûr le résidu de ω en un point $p \in U$ par :

$$\mathrm{res}_p(\omega) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\omega$$

où D est un petit disque compact contenant p et dont le bord est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.3.4 *On a* $\mathrm{res}_p(\omega) = 0$ *si et seulement si* ω *admet une primitive méromorphe sur un voisinage de* p.

Preuve. L'expression intégrale montre que c'est une condition suffisante. Réciproquement, si $\mathrm{res}_p(\omega) = 0$, alors le développement de Laurent de g au point p donne

$$\omega = \sum_{n\neq -1} a_n z^n dz = d\left(\sum_{n\neq -1} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right).$$

□

Théorème 3.3.5 (Théorème des résidus, II) *Si* ω *est une différentielle méromorphe sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$, *et* $M \subset U$ *un compact dont le bord* ∂M *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et ne contient aucun des pôles de* ω, *alors*

$$\int_{\partial M}\omega = 2i\pi \sum_{p\in \mathrm{Int}(M)} \mathrm{res}_p(\omega).$$

Preuve. On peut supposer ω non nulle. La somme est finie puisque ω n'a qu'un nombre fini de pôles dans M. Si $p_1 \ldots, p_n$ sont ces pôles, soient D_j des disques fermés disjoints contenant les p_i dans leur intérieur et dont le bord est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la forme ω est lisse sur $V = U \setminus (\cup_{i=1}^n D_i)$, et $d\omega = 0$ d'après la proposition 3.3.2. D'après la formule de Stokes (Théorème 3.3.1) et le fait que $M \cap V$ a pour bord $\partial M \cup_{i=1}^n (-\partial D_i)$ (avec l'orientation opposée sur les cercles ∂D_i), il s'ensuit

$$\begin{aligned} 0 = \int_{M\cap V} d\omega &= \int_{\partial M \cup_{i=1}^n (-\partial D_i)} \omega \\ &= \int_{\partial M}\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i}\omega = \int_{\partial M}\omega - 2i\pi\sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{p_i}(\omega). \end{aligned}$$

□

Notons que l'hypothèse "U simplement connexe" ou "$\Gamma \sim_U 0$" (cf. Remarque 3.2.4) n'apparaît pas dans cette version du théorème des résidus, car elle ne sert que pour montrer que $\int_{\partial M}\omega$ ne dépend que de la classe d'homologie de ∂M.

3.4 Application au calcul d'intégrales

En pratique on applique souvent le théorème des résidus avec des cycles Γ qui sont des lacets, et même des lacets assez simples constitués d'une courbe de Jordan, comme dans la remarque 3.2.6, c'est-à-dire divisant le plan en deux domaines : les points "intérieurs à Γ", d'indice 1, et les points "extérieurs à Γ", d'indice nul. Dans ce cas la formule des résidus devient assez simple, puisqu'il suffit de sommer les résidus de toutes les singularités qui se trouvent à l'intérieur de Γ. On va considérer des intégrales de trois types.

3.4.1 Intégrales de fractions rationnelles

On va commencer par les intégrales du type suivant : $I := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, où $f = P/Q$ est une fraction rationnelle telle que :

- Q n'a pas de zéros sur l'axe réel.
- $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$.

Les deux conditions assurent que l'intégrale impropre I est définie. Puisque Q est un polynôme, il a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On peut donc trouver un rayon $R > 0$ assez grand tel que le disque $D(0, R[$ contienne tous ces zéros. En fait il suffit de travailler avec les zéros qui sont dans le demi-plan supérieur. En effet, le lacet de choix pour ce type d'intégrales est la concaténation Γ du segment $[-R, +R]$ avec le demi cercle γ_R^+ de centre 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur. On peut tout à fait travailler dans le demi-plan inférieur et cela ne changera pas le résultat bien entendu. Ainsi

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz = (2i\pi) \times \sum_{z_k} \mathrm{Res}(f, z_k),$$

où la somme porte sur les zéros z_k de Q tels que $\mathfrak{Im}(z_k) > 0$, et la dernière égalité vient du théorème des résidus. Il est ensuite facile de vérifier qu'on a $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)dz = 0$, de sorte que nous trouvons

$$I = (2i\pi) \times \sum_{z_k} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

De manière générale, la limite nulle de l'intégrale $\int_{\gamma_R^+} f(z)dz$, utilisée ci-dessus, vient du fait suivant, obtenu par une simple majoration (exercice) :

Lemme 3.4.1 (Lemme de Jordan) *Soit f une fonction holomorphe dans un secteur $S_{A,\theta_1,\theta_2} := \{z \in \mathbb{C}, |z| > A, \theta_1 < \arg(z) < \theta_2\}$. Si $|zf(z)|$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini dans le secteur S_{A,θ_1,θ_2}, alors*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_{A,\theta_1,\theta_2} \cap \mathcal{C}(0,r)} f(z)dz = 0.$$

Traitons un exemple. Soit à calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}dx.$$

On cherche alors les zéros du dénominateur dans le demi-plan supérieur. Or :

$$z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = z_k = e^{i\pi/6 + k\pi/3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les pôles étant simples, leurs résidus se calculent facilement (Lemme 3.2.7) :

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{6z_k^5} = -z_k/6.$$

Nous avons donc exactement trois zéros simples du dénominteur se situant dans le demi-plan supérieur et à prendre en compte, à savoir $e^{i\pi/6}$, i et $e^{5i\pi/6}$. Finalement

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}dx &= \frac{1}{2} \times (-\frac{2i\pi}{6}) \times (e^{i\pi/6} + i + e^{5i\pi/6}) \\ &= (-\frac{i\pi}{6}) \times i(2\sin(\pi/6) + 1) \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

De la même manière on peut calculer l'intégrale suivante (: exercice)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.4.2 Intégrales de fractions trigonométriques

Le second type d'intégrales est de la forme $I = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))dt$, où $R(X,Y)$ est une fraction rationnelle en X et Y, dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité $X^2 + Y^2 = 1$. Ainsi l'intégrale est définie.

La méthode pour calculer ce type d'intégrales est de passer à la notation complexe $z = e^{it}$ et de voir $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ comme une paramétrisation du cercle unité sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Ainsi, en écrivant

$$\cos(t) = \frac{z^2+1}{2z} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{z^2-1}{2iz}$$

on voit que I est l'intégrale de la fonction rationnelle $f(z) = \frac{1}{iz} \times R(\frac{z^2+1}{2z}\frac{z^2-1}{2iz})$ sur le cercle unité. Si $z_1, \ldots, z_n$ sont les pôles de f dans le disque unité ouvert, on a donc

$$I = (2i\pi)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Traitons l'exemple suivant :

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Clairement $I(0) = 2\pi$. Supposons donc $x \neq 0$ et factorisons le dénominateur comme fonction de z :

$$x^2 - 2x\cos(t) + 1 = x^2 - x(z + 1/z) + 1 = (x - z)(x - 1/z).$$

Ainsi nous devons calculer les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{(x-z)(x-1/z)} = \frac{-i}{(x-z)(xz-1)}$ pour les pôles contenus dans le disque unité. Or il y a exactement deux pôles, $z = x$ et $z = 1/x$, qui sont distincts puisque $x^2 \neq 1$ par hypothèse, et un seul se situe à l'intérieur du disque unité ouvert. Les résidus se calculent facilement puisque les pôles sont simples ici :

$$\mathrm{Res}(f, x) = \lim_{z \to x}(z - x)f(z) = \frac{i}{x^2 - 1}$$
$$\mathrm{Res}(f, 1/x) = \lim_{z \to 1/x}(z - 1/x)f(z) = (1/x)\lim_{z \to 1/x}(zx - 1)f(z) = \frac{i}{1 - x^2}$$

Deux cas se présentent :

- si $|x| > 1$, alors $I(x) = (2i\pi)\mathrm{Res}(f, 1/x) = \dfrac{2\pi}{x^2 - 1}$;
- si $|x| < 1$, alors $I(x) = (2i\pi)\mathrm{Res}(f, x) = \dfrac{2\pi}{1 - x^2}$.

Notons que le résultat final englobe le cas $x = 0$.

3.4.3 Calculs de transformées de Fourier

On s'intéresse d'abord à des intégrales de la forme $I = \int_{\mathbb{R}} R(x)e^{ix}dx$ pour des fonctions rationnelles R satisfaisant les mêmes hypothèses qu'avant : $R = P/Q$ n'a pas de pôle sur la droite réelle, et $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$.

On verra plus loin qu'on peut alléger cette deuxième condition, et même remplacer R par une fonction méromorphe "nulle à l'infini" et avec un nombre fini de pôles. Ce type d'intégrales permet de calculer des transformées de Fourier en tout point ξ, en faisant le changement de variable $x = u\xi$. Mais le signe de ξ compte, comme nous allons le voir !

Lorsque $\mathfrak{Im}(z) > 0$, on a $|e^{iz}| = e^{-\mathfrak{Im}(z)} \leq 1$, donc on peut appliquer le lemme de Jordan 3.4.1 comme dans la section 3.4.1, pour obtenir le résultat suivant :

Lemme 3.4.2 *Soient $z_1, \ldots, z_n$ les pôles de la fraction rationnelle $R(z)$ qui se situent dans le demi-plan supérieur. Alors on a*

$$I = (2i\pi)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}((z \mapsto R(z)e^{iz}, z_k).$$

Plus généralement, on a la même conclusion en remplaçant R par une fonction f méromorphe dans un voisinage du demi-plan supérieur fermé $\{\mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$, qui a un nombre fini de pôles dont aucun n'est sur l'axe réel, et qui est telle que

$$\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0.$$

Exemple. Soit à calculer la transformée de Fourier de la fonction $1/(1+x^2)$, c'est à dire l'intégrale

$$I(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx.$$

Supposons que $\xi < 0$; la méthode s'applique, puisque pour $\mathfrak{Im}(z) > 0$ la fonction $e^{-i\xi z}$ est bornée par 1. Le seul pôle dont la partie imaginaire est > 0 est i, et c'est un pôle simple. Donc on peut déduire :

$$I(\xi) = (2i\pi)\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}, i\right) = (2i\pi) \times \frac{e^{\xi}}{2i} = \pi e^{\xi}.$$

Lorsque ξ est positif, on doit considérer les pôles dont la partie imaginaire est < 0 c'est-à-dire ici $-i$. On obtient dans ce cas :

$$I(\xi) = -(2i\pi)\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}, -i\right) = -(2i\pi) \times \frac{e^{-\xi}}{-2i} = \pi e^{-\xi}.$$

Le signe supplémentaire vient du fait qu'on intègre sur le segment $[+R, -R]$ (parcouru négativement) concaténé avec le demi-cercle dans le demi-plan inférieur. □

Enfin, le calcul d'intégrales de la forme $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix}dx$ pour des fonctions f nulles à l'infini dans certaines directions peut souvent être mené à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.4.3 *Soit f une fonction définie dans un secteur du demi-plan supérieur fermé, $S_{A,\theta_1,\theta_2} := \{z \in \mathbb{C}, |z| > A,\ \mathfrak{Im}(z) \geq 0, \theta_1 < \arg(z) < \theta_2\}$, et qui est telle que $f(z) \to 0$ pour $|z| \to +\infty$, $z \in S_{A,\theta_1,\theta_2}$. Alors*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_{A,\theta_1,\theta_2}\cap\mathcal{C}(0,r)} f(z)e^{iz}dz = 0.$$

Preuve. Cf TD. □

3.5 Théorèmes de Rouché et de l'application ouverte

Rappelons le principe de l'argument (Corollaire 3.2.5).

Corollaire 3.5.1 (Théorème de Rouché) *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un disque $D(0, R[$, telles que $|g(z)| < |f(z)|$ sur un cercle $\mathcal{C}_r$ de rayon $0 < r < R$. Alors les fonctions f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans le disque $D(0, r[$.*

Preuve. On remarque que ni f ni $f+g$ ne peuvent s'annuler sur le cercle $\mathcal{C}_r$. En effet, f ne peut pas s'annuler car $|f(z)| > |g(z)|$, et alors sur $\mathcal{C}_r$ on a :

$$h := \frac{f+g}{f} = 1 + \frac{g}{f} \quad \text{avec} \quad \left|\frac{g}{f}\right| < 1,$$

de sorte que $f+g$ non plus. Comme $f+g = fh$, on a :

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}.$$

Nous devons donc vérifier, grâce à l'identité (3.2.5), que $\int_{\mathcal{C}_r} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0$. On remarque que lorsque z parcourt $\mathcal{C}_r$ le nombre complexe $h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ parcourt un lacet Γ contenu dans $D(1,1[$, puisque $|g/f| < 1$ sur $\mathcal{C}_r$. Si on note $\gamma(t) := re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, un paramétrage admissible de $\mathcal{C}_r$, alors $h \circ \gamma$ est un paramétrage admissible de Γ, et on a

$$\int_{\mathcal{C}_r} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{(h' \circ \gamma)(t)\gamma'(t)}{(h \circ \gamma)(t)} dt = \int_\Gamma \frac{du}{u} = 2i\pi \mathrm{Ind}(0, \Gamma).$$

Puisque Γ est contenu dans $D(1,1[$, ce dernier indice est bien nul. □

Exercice. En utilisant la remarque 3.2.6, la même preuve montre que le théorème de Rouché reste vrai en remplaçant le disque $D(0, R[$ par un compact K simplement connexe, inclus dans un domaine où f et g sont holomorphes, et dont le bord ∂K admet un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux parcouru positivement, tel que $|g(z)| < |f(z)|$ sur ∂K.

Exemple 3.5.2 Soit $P(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k$ un polynôme de degré n (donc $b_n \neq 0$). Posons $f(z) = a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. Alors il existe $R > 0$ tel que $|g(z)| < |f(z)|$ pour $|z| = R$, et donc P a autant de zéros dans $D(0, R[$ que le monôme $f(z)$, c'est-à-dire n. Ceci redémontre le théorème de D'Alembert, avec de plus une information sur un disque contenant tous les zéros.

On peut déduire du théorème de Rouché les résultats suivants, importants :

Corollaire 3.5.3 *Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, R[$, et soit $r < R$. On suppose que l'equation $f(z) = w_0$ a exactement p solutions dans le disque ouvert $D(z_0, r[$, et aucune sur le cercle $\mathcal{C}_r := \mathcal{C}(z_0, r)$. Alors pour $|w - w_0| < d(w_0, f(\mathcal{C}_r))$, l'equation $f(z) = w$ admet aussi exactement p solutions dans $D(z_0, r[$.*

Preuve. Notons $\delta := d(w_0, f(\mathcal{C}_r))$. D'après l'hypothèse, $\delta > 0$. Quitte à remplacer f par $f - w_0$ on peut supposer que $w_0 = 0$. On considère alors la fonction g constante égale à $-w$ pour un $w \in D(0, \delta[$ fixé. Pour $z \in \mathcal{C}_r$ on a $|g(z)| = |w| < \delta \leq |f(z)|$, donc l'équation $f + g = 0$ admet exactement p solutions dans le disque $D(z_0, r[$ d'après le théorème de Rouché. □

Théorème 3.5.4 (Application ouverte) *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Alors pour toute fonction f holomorphe non constante sur U, $f(U)$ est un domaine de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Toute fonction continue transforme les connexes en connexes, donc il suffit de vérifier que $f(U)$ est un ouvert. Soit $w_0 = f(a)$ avec $a \in U$. On sait que f est holomorphe sur le disque $D(a, \delta(a)[$, où $\delta(a) = d(a, U^c)$, et qu'elle est non constante sur ce disque. Soit alors $r < \delta(a)$ tel que $f(z) \neq w_0$ sur le cercle $\mathcal{C}_r := \mathcal{C}(a, r)$; un tel rayon r existe, sinon l'équation $f(z) = w_0$ serait vérifiée par une infinité de valeurs de z dans $D(a, \delta(a)[$, qui devraient contenir une sous-suite convergente et donc contredirait le théorèmes des zéros isolés. L'équation $f(z) = w_0$ admet (au moins) la solution $z = a$ dans $D(a, r[$, donc par le corollaire 3.5.3, pour $|w - w_0| < \delta := d(w_0, f(\mathcal{C}_r))$, l'équation $f(z) = w$ a au moins une solution dans le disque $D(a, r[$. Donc le disque $D(w_0, \delta[$ est contenu dans $f(U)$. □

Rappelons qu'une application entre deux espaces topologiques est ouverte si l'image de tout ouvert est ouvert. Dans le théorème ci-dessus la condition de connexité de U est nécessaire, et donc l'appellation “Théorème de l'application ouverte” n'est pas tout à fait rigoureuse, mais indique simplement que le contenu de la conclusion du théorème est surtout le fait que $f(U)$ est ouvert, la connexité étant toujours vraie. En général, il faut que f ne soit constante sur aucune composante connexe pour être ouverte.

Chapitre 4

Le théorème de représentation conforme de Riemann

4.1 Isomorphismes analytiques

D'après le théorème de l'application ouverte, toute application holomorphe non constante transforme un domaine de $\mathbb{C}$ en un domaine de $\mathbb{C}$.

Définition 4.1.1 *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine U. On dit que f est univalente sur U si elle est injective, et donc une bijection entre les domaines U et $f(U)$.*

Faisons quelques rappels pour le théorème qui suit. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine U. On sait que la différentielle de f en un point $z_0 \in U$ est l'application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la multiplication par $f'(z_0)$,

$$df(z_0)\colon u + iv \mapsto f'(z_0)(u + iv).$$

En considérant f comme une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en $z_0 := (x_0, y_0) \in U$ apparaît comme une application $\mathbb{R}$-linéaire $df(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(df(x_0, y_0))_{can} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (4.1)\end{aligned}$$

où $f'(z_0) = a + ib = \lambda e^{i\theta}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Si $\lambda > 0$, $df(x_0, y_0)$ est une "similitude positive", composition de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport λ, de centres l'origine de $\mathbb{R}^2$. En particulier, $df(x_0, y_0)$ conserve les angles orientés. Une application $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle $df(x_0, y_0)$ vérifie cette propriété en tout point de U est appelée *transformation conforme* de U. Donc les applications holomorphes telles que $f'(z_0) \neq 0$ en tout point $z_0 \in U$ sont des transformations conformes de U ; les équations de Cauchy-Riemann impliquent que ce sont, en fait, toutes ses transformations conformes. De plus on a :

Théorème 4.1.2 *Soit U un domaine et f une fonction holomorphe univalente sur U. Alors pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$, et f est donc une transformation conforme en tout point de U.*

Preuve. Supposons que $f'(z_0) = 0$ pour un point z_0 de U. Alors l'équation $f(z) = f(z_0)$ a z_0 pour unique racine (injectivité de f), d'ordre $q \geq 2$ puisque $f'(z_0) = 0$. Choisissons $r > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $D(z_0, r[\backslash\{z_0\}$. Un tel r existe, puisque f est univalente, et donc non constante, sur U, de sorte que f', qui est aussi holomorphe, n'est pas identiquement nulle et ne peut donc avoir que des zéros isolés dans U, d'après le théorème des zéros isolés. Alors le corollaire 3.5.3 du théorème de Rouché implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in D(f(z_0), \delta[$, l'équation $f(z) = w$ admet aussi exactement q racines dans $D(z_0, r[$ (comptées avec multiplicités). Comme f' ne s'annule pas sur $D(z_0, r[\backslash\{z_0\}$, les solutions de $f(z) = w$ pour $w \neq f(z_0)$ sont toutes des racines simples, de sorte qu'on aboutit à l'existence d'au moins deux points z_1 et z_2 distincts de $D(z_0, r[$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Ceci contredit l'univalence de f. On conclut donc que f' ne s'annule pas sur U. Ainsi f est bien conforme. □

Remarque 4.1.3 La condition $f'(z) \neq 0$, $z \in U$, est nécessaire pour que f soit univalente sur U, mais pas suffisante. Par exemple, la transformation $f(z) = z^2$ sur le domaine $\{1 \leq |z| \leq 2, -\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\}$ n'est pas univalente.

Corollaire 4.1.4 *Si f est une fonction holomorphe univalente sur un domaine U, alors f est un isomorphisme analytique de U sur $f(U)$, i.e. l'application réciproque $f^{-1} : f(U) \to U$ est aussi holomorphe sur le domaine $f(U)$.*

Preuve. Grâce au théorème 4.1.2 l'application réciproque f^{-1} est automatiquement différentiable (car $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$ implique que f est un difféomorphisme au voisinage de tout point de U), et en fait dérivable au sens complexe (i.e. holomorphe) en tout point de $f(U)$, avec la formule habituelle $(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$ pour tout $z \in U$. □

Définition 4.1.5 *Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ on note* $\mathrm{Aut}(U)$ *le groupe formé par les automorphismes analytiques de U (pour la loi de composition).*

Le résultat suivant est très utilisé en théorie des surfaces complexes, où les familles de courbes définies par P et Q déterminent des systèmes de coordonnées locales dites "isothermales".

Corollaire 4.1.6 *Si $f = P + iQ$ est une fonction univalente sur un domaine U de $\mathbb{C}$, alors les deux familles de courbes $\{(x, y) \in U, P(x, y) = \alpha\}$ et $\{(x, y) \in U, Q(x, y) = \beta\}$, où $\alpha + i\beta \in f(U)$, forment deux réseaux de courbes orthogonales de U.*

Preuve. En effet, f transforme ces deux réseaux de courbes en les deux réseaux $X = \alpha$ (vertical) et $Y = \beta$ (horizontal) de $V = f(U)$. Ici X, Y sont les coordonnées dans V. Il suffit donc d'utiliser le fait que f est conforme pour conclure. □

Corollaire 4.1.7 *Soit $f = P + iQ$ une fonction univalente sur un domaine U telle que $f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Alors les courbes d'équation $P^2 + Q^2 = \rho^2$ et $P = \lambda Q$ forment deux réseaux orthogonaux de U.*

Preuve. Il suffit de composer f avec la détermination principale du logarithme complexe, et d'appliquer le corollaire précédent à la fonction $g := \mathrm{Log} \circ f$. □

4.2 Exemples

• **L'exponentielle.** Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ contenu dans une bande de la forme

$$\{z \in \mathbb{C}, y_0 \leq \mathfrak{Im}(z) < y_0 + 2\pi\},\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

L'application exponentielle est évidemment univalente sur U. Par le théorème 4.1.2 elle fournit donc un isomorphisme analytique de U sur son image. Un exemple simple est l'application

$$\exp : U :=]-\pi, +\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

C'est un isomorphisme analytique de U sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, avec pour application réciproque la détermination principale du logarithme complexe.

Remarque 4.2.1 On peut noter ici que exp transforme les droites verticales en des cercles centrés en l'origine, et les droites horizontales en des demi-droites issues de l'origine. En général, pour déterminer l'image d'un isomorphisme analytique $f \colon U \to f(U)$, voire pour vérifier si f est univalente, il peut être utile d'identifier l'image des portions de droites, demi-droites ou arcs de cercles dessinés U. Cf. TD3, exercices 2 et 6.

• **Les symboles de Blaschke B_α, $\alpha \in \mathbb{D}$.** Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} B_\alpha : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}. \end{array}$$

Proposition 4.2.2 *Les automorphismes analytiques du disque unité $\mathbb{D}$ sont exactement les transformations de la forme $z \mapsto R_\theta \circ B_\alpha$, où R_θ est la rotation d'angle θ et B_α le symbole de Blaschke associé à α, pour un couple $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{D}$.*

Preuve. Nous avons vu dans la feuille de TD1 que pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, B_α est un automorphisme analytique de $\mathbb{D}$ d'inverse $B_{-\alpha}$ (Exercice 13, question 1), et qu'une application holomorphe $h \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ qui fixe 0 vérifie $|h'(0)| \leq 1$; de plus, en cas d'égalité h est une rotation (Exercice 12, questions 1 et 3). Dans le cas où h est un automorphisme de $\mathbb{D}$ qui fixe 0, on a $(h^{-1})'(0)h'(0) = 1$, donc $|h'(0)| = 1$ et h est nécessairement une rotation. Si f est un automorphisme arbitraire de $\mathbb{D}$, l'automorphisme $B_{f(0)} \circ f$ fixe 0, c'est donc une rotation, ce qui permet de conclure. □

On en déduit immédiatement la description explicite des automorphismes analytiques de tout disque ouvert de $\mathbb{C}$. En particulier :

Corollaire 4.2.3 *Pour tout $R > 0$, les automorphismes analytiques du disque $D(0,R[$ sont exactement les transformations de la forme*

$$z \mapsto e^{i\theta} R^2 \frac{z - z_0}{R^2 - \bar{z}_0 z},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in D(0,R[$.

Preuve. En effet, l'application m_R de multiplication par R fournit un isomorphisme analytique de $\mathbb{D}$ sur $D(0,R[$, avec pour automorphisme réciproque la multiplication par $1/R$. Grâce au théorème précédent on déduit que les automorphismes analytiques de $D(0,R[$ sont nécessairement de la forme $z \mapsto m_R \circ R_\theta \circ B_\alpha \circ m_{1/R}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{D}$. Si on explicite cette transformation et qu'on pose $z_0 = R\alpha$ on obtient la conclusion. $\square$

• **Les homographies** $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$**, où** $ad - bc \neq 0$**.** Une telle fonction est automatiquement univalente sur son domaine de définition, d'inverse $f^{-1}(w) := \frac{dw-b}{-cw+a}$. Si $c = 0$ (nécessairement $a \neq 0$ dans ce cas), f définit évidemment un automorphisme analytique de $\mathbb{C}$, qui est une similitude affine. Si $c \neq 0$, f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, d'image $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, donc définit un isomorphisme analytique

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

Une homographie envoie un cercle ne passant pas par $-d/c$ sur un cercle, et un cercle passant pas $-d/c$ sur une droite (cf TD3).

On obtient des isomorphismes intéressants en considérant des restrictions d'homographies à des ouverts particuliers (...intéressants). Par exemple, la proposition 4.2.2 montre les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont des homographies. Nous verrons aussi en TD que la restriction de $f(z) = \frac{i-z}{i+z}$ au *demi-plan de Poincaré*

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) > 0\}$$

est un isomorphisme analytique de $\mathbb{H}$ vers le disque unité $\mathbb{D}$. De plus :

Proposition 4.2.4 *On a :*

(*a*) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *est l'ensemble des similitudes affines $z \mapsto az + b$, où $a \neq 0$;*

(*b*) $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *est l'ensemble des restrictions à $\mathbb{H}$ des homographies de la forme $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, où a b, c et d sont des réels tels que $ad - bc > 0$. On a donc des isomorphismes de groupes*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\} \subset GL_2(\mathbb{C}) \\ (z \mapsto az + b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) & \longrightarrow & PSL_2(\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\{-Id, Id\} \\ \left(z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{array}$$

Preuve. Voir TD. $\square$

4.3 La sphère de Riemann

Une fonction méromorphe sur un ouvert U n'est pas vraiment une fonction, puisqu'elle n'est définie que sur le complémentaire d'une partie discrète. Dans cette section on explique comment il est possible de "compléter" $\mathbb{C}$ en un espace $\hat{\mathbb{C}}$, de sorte à ce que les fonctions méromorphes sur U soient définies sur U tout entier, à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$. Ensuite nous décrirons le groupe $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ des automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$ (dans un sens convenable).

Pour définir l'espace complété $\hat{\mathbb{C}}$, notons que la seule valeur qu'on puisse imaginer associer à $1/z$ est "∞". L'espace $\hat{\mathbb{C}}$ sera effectivement obtenu en ajoutant un point à $\mathbb{C}$, jouant le rôle de l'infini pour une topologie adéquate (cette procédure est un cas particulier d'une construction générale pour compactifier les espaces localements compacts, due à P. Alexandrov).

Notons donc $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'union de $\mathbb{C}$ et d'un point noté ∞. On munit $\hat{\mathbb{C}}$ de la topologie définie par la base de voisinages suivante :

- en tout point $z \in \mathbb{C}$ on prend la base de voisinages de z formée par les disques ouverts centrés en z (ie. la base de voisinages en z pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}$) ;
- en $z = \infty$ on prend pour base de voisinages les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$, auxquels on ajoute le point ∞.

L'espace $\hat{\mathbb{C}}$ est clairement séparé. Afin de décrire les propriétés topologiques *globales* de $\hat{\mathbb{C}}$, introduisons

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

la sphère unité de l'espace euclidien de dimension 3, munie de la topologie induite, et

$$\mathbb{P}^1 := \left(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0\}\right) / ((x_0, x_1) \sim \lambda(x_0, x_1), \lambda \in \mathbb{C}^*)$$

l'espace projectif complexe de dimension 1, muni de la topologie quotient. On note $[x_0 : x_1]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^1$ d'un couple $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il est clair que $\mathbb{P}^1$ s'identifie à l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$, en associant à $[x_0 : x_1]$ la droite $\mathbb{C}(x_0, x_1)$.

Théorème 4.3.1 *L'espace topologique $\hat{\mathbb{C}}$ est compact, et homéomorphe à S^2 et à $\mathbb{P}^1$.*

Preuve. La première affirmation est un exercice standard de topologie, il suffit de vérifier la propriété de Borel-Lebesgue. Pour tout recouvrement ouvert $\hat{\mathbb{C}} = \cup_{i \in I} U_i$, l'un au moins des ouverts U_i contient le point ∞, donc également le complémentaire d'un disque $D(0, R[$. Notons-le U_∞. La collection des autres ouverts recouvre le compact $D(0, R]$, donc un nombre fini d'entre eux le recouvre aussi ; notons-les $U_1, \ldots, U_n$. Finalement on obtient que $U_1, \ldots, U_n$ et U_∞ recouvrent $\hat{\mathbb{C}}$.

Pour la seconde affirmation, un homéomorphisme $\varphi\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ est fourni par la projection stéréographique

$$(u, v, w) \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{cases} \dfrac{u + iv}{1 - w} & \text{si } w \neq 1 \\ \infty & \text{si } w = 1 \end{cases}$$

Géométriquement, φ associe à tout point P de S^2 distinct pôle nord N le point d'intersection de la droite (PN) et du plan équatorial de la sphère, $S^2 \cap \{w = 0\}$; et φ associe à N le point ∞. Cette description montre que φ est bijective, et la formule montre que la restriction de φ à $S^2 \setminus \{N\}$ est continue. On montre que ϕ est continue au point N en observant que l'image inverse d'un voisinage $U := (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ de ∞ (où K est un compact) est de la forme $\varphi^{-1}(U) = S^2 \setminus \varphi^{-1}(K)$, qui est un voisinage ouvert de N dans S^2. Puisque φ est une application bijective continue de l'espace compact S^2 dans l'espace compact $\hat{\mathbb{C}}$, c'est un homéomorphisme.

Enfin, montrons que $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$. Soit $S^3 = \{(u, v, w, t) \in \mathbb{R}^4, u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = 1\}$, la sphère euclidienne de dimension trois. En posant $x := u + iv$ et $y := w + it$ on voit que $S^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$, un sous-espace de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0\}$. En normalisant les représentants (x, y) des classes $[x : y] \in \mathbb{P}^1$ par la condition $|x|^2 + |y|^2 = 1$, on voit que $\mathbb{P}^1 = S^3/((x, y) \sim \lambda(x, y), |\lambda| = 1)$. L'espace S^3 est compact, donc $\mathbb{P}^1$ également (l'application quotient $S^3 \to \mathbb{P}^1$ étant continue). Les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ x & \longmapsto & \begin{cases} [x:1] & \text{si } x \neq \infty \\ [1:0] & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{array} \quad , \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ [x_0 : x_1] & \longmapsto & x_0/x_1 \end{array}$$

sont inverses l'une de l'autre, car si $x_1 \neq 0$ on a $[\lambda x_0 : \lambda x_1] = [x_0/x_1, 1]$ (prendre $\lambda = 1/x_1$), tandis que $[\lambda x_0 : 0] = [1 : 0]$ (prendre $\lambda = 1/x_0$). Elles sont aussi continues ; par exemple pour g, tout voisinage ouvert V de $w = x_0/x_1 \in \mathbb{C}$ contient l'image d'un voisinage ouvert des points $(\lambda x_0, \lambda x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0\}$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, par l'application $(x_0, x_1) \mapsto x_0/x_1$, qui est $g \circ p$ où $p\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{P}^1$ est l'application quotient. Donc $g^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de $[x_0, x_1]$, par définition de la topologie quotient. En $\infty \in \mathbb{P}^1$ on raisonne de la même façon, en considérant un voisinage de la forme $|z| > R$. On peut prouver de manière analogue que f est continue ; alternativement, ayant des bijections dont l'une est continue, à nouveau la compacité de $\hat{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{P}^1$ permet de conclure qu'ils fournissent des homéomorphismes $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$. $\square$

Définition 4.3.2 *On appelle $\hat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann.*

À une fonction méromorphe f sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ on peut maintenant associer une application bien définie sur tout U et à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$:

$$f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} f(z) \in \mathbb{C} & \text{si } z \text{ n'est pas un pole} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{4.2}$$

Cette application est continue, puisque l'image inverse d'un voisinage $\{|w| > R\}$ de $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ est un voisinage $\{z \in U, |f(z)| > R\}$ des pôles de f !

Nous allons appliquer la construction (4.2) aux fonctions définies sur $U = \mathbb{C}$ qui admettent un prolongement méromorphe à $\hat{\mathbb{C}}$ tout entier, dans un sens que nous devons préciser. Notons d'abord que la transformation $z \mapsto 1/z$ échange les voisinages de 0 et de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ (c'est un *changement de cartes*, au sens des variétés différentiables). Il est alors naturel de poser la définition suivante :

Définition 4.3.3 *une fonction f sur $\hat{\mathbb{C}}$ est holomorphe (resp. méromorphe) si sa restriction à $\mathbb{C}$ est holomorphe (resp. méromorphe) et si l'application $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe (resp. méromorphe) au voisinage de 0 – on dit alors que f est holomorphe (resp. méromorphe) en ∞.*

Par exemple, tout polynôme sur $\mathbb{C}$ de degré n définit une fonction méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, avec pôle en ∞ d'ordre n.

Proposition 4.3.4 *On a :*

(*a*) *Toute fonction holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ est constante.*

(*b*) *Une fonction entière f se prolonge en une fonction méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ si, et seulement si, f est un polynôme.*

(*c*) *Les fractions rationnelles sont les seules fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$.*

Preuve. (a) découle du théorème 2.4.7 (Liouville), et (b) de sa preuve : si f est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, et ∞ est un pôle d'ordre n, $z^n f(1/z)$ est bornée au voisinage de 0 donc il existe $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|z^n f(1/z)| \leq M$ si $|z| \leq \delta$. En posant $w = 1/z$ ceci s'écrit $|f(w)| \leq M|w|^n$ si $|w| \geq 1/\delta$; comme f est entière sur $\mathbb{C}$, la condition de croissance du théorème 2.4.7 est satisfaite et on peut conclure.

Pour (c), notons d'abord qu'une fonction méromorphe f sur $\hat{\mathbb{C}}$ a un nombre fini de zéros et de pôles. En effet, écrivons $\hat{\mathbb{C}}$ comme la réunion de deux compacts :

$$\hat{\mathbb{C}} = D(0, R+1] \cup (\mathbb{C} \setminus D(0, R[), \quad R > 0.$$

Comme $f(z)$ et $f(1/z)$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$, leurs zéros et leurs pôles sont en nombre fini dans les disques $D(0, R+1]$ et $D(0, 1/R]$ respectivement. Donc f a également un nombre fini de zéros et de pôles dans $\mathbb{C} \setminus D(0, R[$, et finalement dans $\hat{\mathbb{C}}$ tout entier. Maintenant, si on note $z_1, \ldots, z_n$ les pôles de f dans $\mathbb{C}$ et $m_1, \ldots, m_n$ leurs multiplicités, alors la fonction $(z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_n)^{m_n} f(z)$ est entière sur $\mathbb{C}$, méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, donc un polynôme d'après (b). □

Remarque 4.3.5 Cette proposition montre aussi que les fonctions entières ayant une infinité de zéros ne peuvent pas se prolonger en fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$, par exemple les fonctions circulaires ; ainsi, on le voit pour $\cos(z)$ en développant $\cos(1/z)$ sur un disque épointé $D(0, R[\setminus\{0\}$.

D'après (4.2) on peut associer à toute fonction méromorphe f sur $\hat{\mathbb{C}}$ une application $f \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. On dit qu'un tel f est un automorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ s'il est bijectif et si son application réciproque a les mêmes propriétés.

Théorème 4.3.6 *Les automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les homographies*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{avec} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Donc $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong PSL_2(\mathbb{C})$. *De plus, les homographies préservent les cercles de $\hat{\mathbb{C}}$.*

Preuve. Voir TD. □

Ce résultat et les propositions 4.2.2 et 4.2.4 montrent comment les groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ apparaissent comme des sous-groupes de $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, via leurs réalisations respectives par des homographies.

4.4 Le théorème de représentation conforme

Dans cette section nous démontrons le résultat fondamental suivant, qui caractérise les domaines de $\mathbb{C}$ qui sont analytiquement isomorphes à un disque ouvert, ou ce qui revient au même, au disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

Théorème 4.4.1 *(Riemann) Un domaine U de $\mathbb{C}$ est analytiquement isomorphe au disque unité ouvert $\mathbb{D}$ si, et seulement si, il est distinct de $\mathbb{C}$ et simplement connexe. De plus, si U est analytiquement isomorphe à $\mathbb{D}$, pour tout point $z_0 \in U$ il existe un unique isomorphisme analytique $\phi : U \to \mathbb{D}$ tel que $\phi(z_0) = 0$ et $\phi'(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité de ϕ, lorsque U est analytiquement isomorphe à $\mathbb{D}$. Si $\psi : U \to \mathbb{D}$ est une autre solution, alors $f := \phi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) \in \mathbb{R}_+^*$. En fait, les arguments rappelés dans la preuve de la proposition 4.2.2 montrent que $f'(0) = 1$, et alors la seule possibilité est que f soit l'identité, donc $\phi = \psi$. Montrons maintenant l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ La partie directe est très facile. D'une part, le théorème de Liouville implique que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ ne sont pas analytiquement isomorphes, puisqu'il existe des fonctions holomorphes bornées et non constantes sur $\mathbb{D}$. D'autre part, comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe, le résultat suivant montre qu'un domaine analytiquement isomorphe à $\mathbb{D}$ est nécessairement simplement connexe.

Proposition 4.4.2 *Supposons qu'il existe un isomorphisme analytique $f : U \to V$ entre deux domaines U et V. Alors U est simplement connexe si, et seulement si, V est simplement connexe.*

Preuve. Soit Γ un lacet dessiné dans V, avec un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\psi : [a, b] \to V$. L'image réciproque de Γ par f est un lacet γ dessiné dans U, de paramétrage $\phi := f^{-1} \circ \psi : [a, b] \to U$. Un calcul direct donne alors pour toute fonction g holomorphe sur V :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma g(Z)dZ &= \int_a^b (g \circ f)(\phi(t))\psi'(t)dt \\
&= \int_a^b (g \circ f)(\phi(t))f'(\phi(t))\phi'(t)dt \\
&= \int_\gamma (g \circ f)(z)f'(z)dz
\end{aligned}$$

où $(g \circ f)f'$ est une fonction holomorphe sur U. Si U est simplement connexe, la dernière intégrale s'annule (théorème de Cauchy), et on obtient donc $\int_\Gamma g(Z)dZ = 0$ pour toute fonction holomorphe g sur V et tout lacet Γ dessiné dans V. D'après le corollaire 2.2.2, ceci prouve que V est simplement connexe. La réciproque se prouve de la même manière, puisque f est automorphisme analytique de sorte que f^{-1} l'est aussi. □

$\boxed{\Longleftarrow}$ Attaquons maintenant la partie réciproque du théorème de Riemann. Soit donc U un domaine de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. La proposition 4.4.2 montre qu'il est important de mieux comprendre les propriétés liées à la connexité simple. Nous considérons les propriétés suivantes :

- (1) U est simplement connexe.
- (2) Toute fonction holomorphe f sur U possède une primitive dans U, i.e. il existe $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $F' = f$.
- (3) Toute fonction holomorphe f sur U qui ne s'annule pas possède un logarithme, i.e. il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f = e^g$.
- (4) Toute fonction holomorphe f sur U qui ne s'annule pas possède une racine carrée, i.e. il existe $h \in \mathcal{H}(U)$ telle que $h^2 = f$.

La proposition suivante résume des résultats déjà observés en TD.

Proposition 4.4.3 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. Alors :*

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4).$$

Preuve. $\underline{(1) \Longrightarrow (2)}$: (cf. TD1) Soit f une fonction holomorphe sur U et a un point de U. Pour tout $z \in U$ la connexité par arcs de U assure qu'il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant a à z, que nous pouvons paramétrer par $\gamma_z : [0,1] \to U$ de sorte que $\gamma_z(0) = a$ et $\gamma_z(1) = z$. Le support de ce chemin est noté Γ_z. On pose alors

$$F(z) := \int_{\Gamma_z} f(u)du.$$

Comme U est simplement connexe, $F(z)$ ne dépend pas du choix du chemin Γ_z. En effet, l'intégrale de toute fonction holomorphe sur U le long d'un cycle dans U est nulle (théorème de Cauchy), donc si Γ'_z est un autre chemin de a à z, on a $\int_{\Gamma_z - \Gamma'_z} f(u)du = 0$. Maintenant un argument standard (cf. l'identité (2.7)) montre que F est holomorphe sur U et vérifie $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

$\underline{(2) \Longrightarrow (3)}$: Partant d'une fonction holomorphe f ne s'annulant pas sur U, on peut considérer la fonction holomorphe f'/f, qui possède une primitive F par (2). La fonction fe^{-F} est holomorphe sur U, de dérivée nulle, donc constante puisque U est connexe. Cette constante est non nulle puisque fe^{-F} ne s'annule pas sur U. Il suffit d'écrire cette constante sous la forme e^C avec $C \in \mathbb{C}$ pour déduire que la fonction holomorphe $g = F + C$ satisfait la relation $f = e^g$ sur U.

$\underline{(3) \Longrightarrow (4)}$: Soit f une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur U, et soit g une fonction holomorphe sur U telle que $f = e^g$. Alors la fonction $h = e^{g/2}$ est une racine carrée holomorphe de f sur U. □

Nous dirons qu'un domaine U *vérifie la propriété de la racine carrée* si la propriété (4) est satisfaite.

Théorème 4.4.4 *Soit U un domaine U de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. Si U vérifie la propriété de la racine carrée, alors il existe un isomorphisme analytique $\phi\colon U \to D(0,R[$, pour un $R > 0$.*

Avec la proposition 4.4.3, et le fait que tout disque ouvert $D(0,R[$ est analytiquement isomorphe à $\mathbb{D}$, ce théorème conclut la partie "$\Longleftarrow$" de la preuve du théorème de Riemann. Avec la proposition 4.4.2 et le fait que $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il démontre en même temps :

Corollaire 4.4.5 *Pour tout domaine U de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$, les propriétés* (1)*,* (2)*,* (3) *et* (4) *sont équivalentes à l'existence d'un isomorphisme analytique $U \to \mathbb{D}$, et donc à l'existence d'un homéomorphisme $U \to \mathbb{D}$ (qui lui-même est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$).*

Preuve du théorème 4.4.4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ on note

$$M(f) := ||f||_U = \sup_{z\in U} |f(z)| \leq +\infty.$$

Un isomorphisme analytique $\phi : U \to D(0,R[$ satisfait nécessairement $M(\phi) = R$. L'idée principale de la preuve du théorème est de trouver une fonction holomorphe sur U, univalente, dont l'image contient 0, et qui minimise $M(f)$ pour $f \in \mathcal{H}(U)$. Le minimum donnera le rayon R recherché.

On fixe dès le départ un point $a \in U$ et on cherche cette fonction dans l'ensemble des fonctions univalentes s'annulant en a. On peut aussi normaliser ces fonctions : on sait qu'un isomorphisme analytique ψ de $D(0,R[$ dans $D(0,R[$ envoyant 0 sur 0 est égal à l'identité si et seulement si $\psi'(0) = 1$ (c'est une conséquence du corollaire 4.2.3, ou de l'exercice 12 de la feuille de TD1). Afin de mettre la main sur une unique solution ϕ, on imposera donc aussi que $\phi'(a) = 1$. En résumé, on va travailler dans l'ensemble

$$\mathcal{H}(a) := \{f \in \mathcal{H}(U), f \text{ univalente}, f(a) = 0 \text{ et } f'(a) = 1\}.$$

Lemme 4.4.6 *Supposons que le domaine $U \neq \mathbb{C}$ vérifie la propriété de la racine carrée,* (4)*. Alors il existe $h \in \mathcal{H}(a)$ telle que $M(h) < +\infty$.*

Preuve. Il suffit de trouver une fonction holomorphe univalente h_0 sur U telle que $M(h_0) < +\infty$. En effet, on pourra alors normaliser h_0 en posant $h := (h_0 - h_0(a))/h_0'(a)$; comme $M(h) \leq 2M(h_0)/|h_0'(a)|)$, on aura obtenu un élément de $\mathcal{H}(a)$ dont la borne supérieure $M(h)$ est finie.

Soit $b \notin U$ (rappelons que $U \neq \mathbb{C}$) ; d'après l'hypothèse, il existe une fonction holomorphe ϕ sur U telle que $\phi(z)^2 = z - b$ pour tout $z \in U$. Clairement, ϕ et ϕ' ne s'annulent pas sur U, et ϕ y est une fonction univalente. On voit même que pour tout couple $(u,v) \in U^2$ les nombres complexes $\phi(u)$ et $\phi(v)$ ne sont jamais opposés. Enfin, on sait aussi que $\phi(U)$ est un domaine, donc un ouvert qui ne contient pas 0.

Soit maintenant $D(z_0, r[$ un disque ouvert contenu dans $\phi(U)$; d'après ce qui précède, nécessairement $r \leq |z_0|$. Le disque $D(-z_0, r[$ est alors disjoint de $\phi(U)$, car sinon on aurait un point $u = \phi(z)$ de $D(-z_0, r[$ tel que $-u = \phi(z') \in D(z_0, r[$ avec $z, z' \in U$, ce qui est exclu d'après ce qui précède. Alors

$$|\phi(z) + z_0| \geq r, \forall\ z \in U.$$

Ainsi la fonction $h_0 := r/(\phi + z_0)$ est une fonction holomorphe univalente (en particulier sa dérivée ne s'annule pas) sur U et satisfait $M(h_0) \leq 1$. □

Afin de minimiser M sur $\mathcal{H}(a)$, on peut donc se restreindre aux fonctions f de $\mathcal{H}(a)$ qui satisfont $M(f) \leq M := M(h)$. Posons donc

$$\mathcal{H}(a, M) := \{f \in \mathcal{H}(a), M(f) \leq M\}.$$

Dans la suite on munit $\mathcal{H}(U)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ; par définition, une suite (f_n) de $\mathcal{H}(U)$ converge pour cette topologie s'il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que pour tout compact K de U on a $||f_n - f||_K \to 0$, $n \to +\infty$. On dit qu'une partie A de $\mathcal{H}(U)$ est *bornée* si elle est uniformément bornée sur tout compact K de U, ie. si pour tout compact K de U on a

$$\sup_{f \in A} ||f||_K < +\infty.$$

Théorème 4.4.7 *(Montel) Une partie A de $\mathcal{H}(U)$ est bornée si, et seulement si, A est relativement compacte dans $\mathcal{H}(U)$. En particulier, de toute suite (f_n) de $\mathcal{H}(U)$ formant une partie bornée on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U.*

Notons que le théorème implique que les parties compactes de $\mathcal{H}(U)$ sont les parties fermées et bornées. Un espace topologique vérifiant cette propriété est appelé *espace de Montel*. De plus, une partie de $\mathcal{H}(U)$ dont toute suite vérifie la conclusion du théorème est dite *famille normale* (c'est la terminologie "historique").

Preuve. . Ce résultat peut être vu comme une application du théorème d'Ascoli. Prouvons par exemple la deuxième affirmation. Soit (f_n) une suite comme dans l'énoncé. Les inégalités de Cauchy pour les dérivées f_n' impliquent facilement (cf. TD) que si $D(z_0, r] \in U$, alors pour tout $z \in D(z_0, r/2]$ on a

$$|f_n'(z)| \leq \frac{4}{r} ||f_n||_{D(z_0,r]}.$$

Puisque la suite (f_n) est uniformément bornée sur tout compact, il existe $C > 0$ tel que $||f_n||_{D(z_0,r]} < C$ pour tout n. L'inégalité des accroissements finis implique donc

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq \frac{4}{r} C|z - z_0|$$

pour tout $z \in D(z_0, r/2]$ et $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que (f_n) est équicontinue en tout point de U. Fixons un compact K de U. Comme f_n est uniformément bornée sur K, pour tout $z \in K$ l'ensemble $\{f_n(z), n \in \mathbb{N}\}$ est borné, donc relativement compact, dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème d'Ascoli dans $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$, il s'ensuit que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente sur K.

On considère alors une suite croissante de compacts (K_j), dont l'union recouvre U. Typiquement on peut prendre

$$K_j := \left\{z \in U, |z| \leq j, d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{j}\right\}.$$

“Par procédé diagonal”, on peut extraire de (f_n) une sous-suite qui converge uniformément sur tous les compacts K_j, donc sur tout compact de U. Rappelons ce procédé. D'après ce qui précède, il existe $(f_{\varphi_1(n)})$ une suite extraite de (f_n), uniformément convergente sur K_1. De même, on peut extraire de $(f_{\varphi_1(n)})$ une suite uniformément convergente sur K_2 ; elle est de la forme $(f_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(n)})$ avec $\varphi_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. En procédant de cette manière pour tout j, on obtient une suite $(f_{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_j)(n)})$ uniformément convergente sur K_j. On pose alors $\psi_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(n) = (\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n)(n)$. C'est une extractrice, et pour tout j la suite $(f_{\psi(n)})_{n\geq j}$ est extraite de $(f_{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_j)(n)})$. Donc $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément sur tout compact K de U (car sur tout K_j, et K est inclus dans une union finie des K_j), et sa limite est holomorphe d'après le théorème de Weierstrass 2.3.7, ce qui conclut. $\square$

Corollaire 4.4.8 *L'ensemble $\mathcal{H}(a, M)$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}(U)$.*

En fait on a :

Lemme 4.4.9 *La partie $\mathcal{H}(a, M)$ est compacte dans $\mathcal{H}(U)$. Par conséquent, il existe $\phi \in \mathcal{H}(a, M)$ telle que $M(\phi) = R := \inf_{f\in\mathcal{H}(a,M)} M(f)$, i.e. cette borne inférieure est atteinte. En particulier $R > 0$.*

Preuve. D'après le corollaire, Il nous reste à justifier que $\mathcal{H}(a, M)$ est une partie fermée dans l'espace métrisable $\mathcal{H}(U)$. Soit pour cela (f_n) une suite de $\mathcal{H}(a, M)$ qui converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Alors $M(f) \leq M$, $f(a) = 0$ et $f'(a) = 1$. Les deux premières assertions sont claires, et la dernière provient du fait que la dérivation $f \mapsto f'$ est continue sur $\mathcal{H}(U)$, par une application simple de la formule de Cauchy. Il nous reste donc à prouver que f est univalente. Or si $f(z_1) = f(z_2)$, le théorème des zéros isolés montre qu'il existe des disques fermés non vides et disjoints $D(z_1, r_1]$, $D(z_2, r_2] \subset U$ tels que $f - f(z_1)$ n'a pas d'autres zéros que z_1 et z_2 dans $D(z_1, r_1] \cup D(z_2, r_2]$. Notons $\epsilon_0 > 0$ la borne inférieure de $|f - f(z_1)|$ sur la réunion des cercles $|z - z_i| = r_i$, $i = 1, 2$. Par convergence uniforme sur la réunion de ces deux disques disjoints, on peut alors trouver N assez grand tel que pour $n \geq N$ et $i = 1, 2$:

$$|f_n(z) - f(z_1)| \geq \epsilon_0/2 \quad \text{pour } |z - z_i| = r_i, \text{ et } |f_n(z_i) - f(z_1)| < \epsilon_0/4.$$

Ces deux inégalités entrainent, pour $n \geq N$ et $|z - z_i| = r_i$:

$$|f_n(z) - f_n(z_1)| \geq \quad \big|\, |f_n(z) - f(z_1)| - |f(z_1) - f_n(z_1)| \,\big| \quad \geq \epsilon_0/4.$$

Il suit du principe du minimum que la fonction $f_n - f_n(z_1)$ doit nécessairement s'annuler sur chacun des deux disques. Ceci contredit l'univalence de f_n. $\square$

Remarque 4.4.10 L'univalence de f est le *théorème d'Hurwitz*, cf. Feuille TD3.

Fin de la preuve du théorème 4.4.4, et donc du théorème 4.4.1 (Riemann). On rappelle que l'hypothèse principale du théorème 4.4.4 est que U satisfait la propriété de la racine carrée. La preuve de ce théorème est complétée grâce au lemme suivant :

Lemme 4.4.11 *La fonction ϕ réalisant le minimum dans le lemme précédent est un isomorphisme analytique de U sur $D(0,R[$.*

Preuve. On sait que ϕ est univalente et donc non constante, et que $|\phi| \leq R$ sur U. Par le principe du maximum, on obtient $|\phi(z)| < R$ pour tout z dans U. Ainsi $\phi(U) \subset D(0,R[$. Supposons par l'absurde qu'il existe $b \in D(0,R[\backslash\phi(U)$. Alors grâce aux symboles de Blaschke sur $D(0,R[$ on va fabriquer une fonction ψ de $\mathcal{H}(a,M)$ telle que $M(\psi) < R$, ce qui donnera une contradiction. Notons $B_b(z) := R^2\frac{z-b}{R^2-\bar{b}z}$, le symbole de Blaschke s'annulant en b. Alors $B_b \circ \phi$ est une fonction univalente sur U qui ne s'annule pas, et qui admet donc une racine carrée holomorphe ψ_1 sur U, d'après l'hypothèse. La fonction $\psi_2 := \sqrt{R}\psi_1$ est alors univalente et envoie encore U dans $D(0,R[$; de plus elle satisfait $\psi_2(a)^2 = -Rb$ (rappelons que $\phi(a) = 0$). On peut alors considérer

$$\psi_3 := B_{\psi_2(a)} \circ \psi_2,$$

qui est encore univalente de U dans $D(0,R[$ et satisfait en plus $\psi_3(a) = 0$. Un calcul direct (laissé en exercice) montre alors que $\psi := \psi_3/\psi_3'(a)$ fournit un élément de $\mathcal{H}(a,M)$ qui satisfait $M(\psi) < R$, une contradiction. □

4.5 Caractérisations de la simple connexité

Le corollaire 4.4.5 nous donne de nouvelles caractérisations de la simple connexité. Ainsi, un domaine simplement connexe U peut toujours être paramétré par une transformation conforme $(\mathbb{D},\phi)$ (un isomorphisme analytique en fait), i.e.

$$\exists\ \phi : \mathbb{D} \to U \quad \text{transformation conforme telle que } \phi(\mathbb{D}) = U.$$

Grâce à ces résultats nous pouvons maintenant faire le lien avec la définition topologique de la simple connexité :

Définition 4.5.1 *On dira qu'un domaine U de $\mathbb{C}$ est simplement connexe au sens topologique si tout lacet de U est homotope à un lacet constant, ie. peut être déformé continuement sur un point sans sortir de U.*

Autrement dit, U est simplement connexe au sens topologique si pour tout lacet paramétré $\gamma\colon [a,b] \to U$ il existe une application continue $H\colon [0,1]\times[a,b] \to U$ telle que :

- *$H(0,t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, et $H(1,\cdot)$ est une application constante ;*
- *$H(s,\cdot)\colon [a,b] \to U$ est un lacet pour tout $s \in [0,1]$.*

(On dit que H est une homotopie libre de γ vers un lacet constant.)

Cette définition de la simple connexité est différente de celle utilisée jusqu'à présent pour des domaines de $\mathbb{C}$, et s'applique à des espaces plus généraux. Cependant les deux définitions coincident pour les domaines de $\mathbb{C}$, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.5.2 *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Alors U est simplement connexe si et seulement U est simplement connexe au sens topologique.*

Preuve. Supposons que U est simplement connexe au sens topologique. Pour tout $z_0 \notin U$, tout lacet paramétré γ dessiné dans U, et toute homotopie H de γ vers un lacet constant dans U comme dans la définition 4.5.1, l'application $s \mapsto \mathrm{Ind}(z_0, H(s,\cdot))$ est à valeurs entières (Théorème 2.1.3), et continue sur $[0,1]$ (par continuité de H et l'inégalité de la moyenne (2.1)). Comme $[0,1]$ est connexe, l'application est constante, égale à $\mathrm{Ind}(z_0, H(1,\cdot)) = 0$. Donc U est simplement connexe.

Réciproquement, si $U \neq \mathbb{C}$ est simplement connexe, alors on applique le théorème de Riemann pour déduire l'existence d'un isomorphisme analytique $\phi\colon U \to \mathbb{D}$. Mais il est immédiat que $\mathbb{D}$ est simplement connexe au sens topologique, car convexe : par exemple, si $H\colon (s,x) \mapsto \frac{s}{2} + (1-s)x$, alors pour tout lacet paramétré γ dessiné dans $\mathbb{D}$ l'application $(s,t) \mapsto H(s,\gamma(t))$ est une homotopie dans $\mathbb{D}$ de γ vers le lacet constant en $1/2$. Un isomorphisme analytique est en particulier un homéomorphisme, et les homéomorphismes préservent la propriété de simple connexité topologique : pour tout lacet paramétré γ dessiné dans U, l'application $(s,t) \mapsto \phi^{-1}(H(s,(\phi\circ\gamma)(t)))$ est une homotopie de γ vers le lacet constant en $\phi^{-1}(1/2)$. Donc U lui-même est simplement connexe au sens topologique. Lorsque $U = \mathbb{C}$, il est convexe donc on peut directement appliquer l'homotopie $(s,t) \mapsto H(s,\gamma(t))$. □

4.6 (∗) Transformations de Schwarz-Christoffel

Cette section est à considérer comme "exercice", afin de vérifier qu'on a bien saisi différentes techniques vues jusqu'à présent.

On va décrire ici une famille d'isomorphismes analytiques explicites entre le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ et l'intérieur de polygones convexes quelconques. Il faut cependant savoir qu'étant donné un domaine $U \subsetneq \mathbb{C}$ "générique", c'est en général un problème très délicat que de déterminer (ou approximer) l'isomorphisme analytique $U \to \mathbb{D}$ dont l'existence est garantie par le théorème de Riemann.

Soient n un entier ≥ 3 et :

- $a_1 < \ldots < a_n$ des réels strictement positifs,
- $\mu_1, \ldots, \mu_n \in]0,1[$ tels que $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$.

Afin de simplifier certaines notations ci-dessous (précisément, dans la définition des déterminations des logarithmes), nous supposerons que $a_1 > 0$; ce n'est pas restrictif bien sûr, puisque cette condition peut être achevée en appliquant une translation.

Notons

$$z \mapsto (z - a_k)^{\mu_k}$$

la fonction racine complexe μ_k-ième associée à la détermination du logarithme complexe de partie imaginaire dans $]-\pi/2, 3\pi/2]$. C'est donc la fonction analytique définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{Re}(z) = a_k, \mathfrak{Im}(z) \leq 0\}$ et telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, x < a_k, (x - a_k)^{\mu_k} = |x - a_k|^{\mu_k} e^{i\mu_k\pi}.$$

Soit

$$f(z) := \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\mu_k}.$$

C'est une fonction holomorphe sur le domaine $U := \mathbb{C} \setminus \cup_{k=1}^{n} \{\mathfrak{Re}(z) = a_k, \mathfrak{Im}(z) \leq 0\}$. Posons

$$F(z) := \int_{[0,z]} \frac{du}{f(u)}.$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 4.6.1 *La fonction $F\colon U \to \mathbb{C}$ est analytique, et sa restriction au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est un isomorphisme analytique de $\mathbb{H}$ vers l'intérieur d'un polygone convexe à n côtés et d'angles dièdres internes $(1-\mu_k)\pi$ aux sommets.*

Preuve. Puisque F est l'intégrale le long d'un segment d'une fonction analytique sur U, pour montrer que F y est également analytique il suffit de vérifier que U est simplement connexe (cf. l'argument "standard", par ex. dans la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) de la proposition 4.4.3). Grâce au théorème 4.5.2 il suffit en fait de vérifier que U est simplement connexe au sens topologique, soit donc d'exhiber une homotopie H déformant tout lacet $\gamma\colon [a,b] \to U$ sur un point. Mieux, il suffit que H déforme tout lacet *dans l'intérieur* du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, puisque, celui-ci étant simplement connexe (car étoilé), quitte à appliquer une nouvelle homotopie nous aurons la garantie que γ puisse effectivement être homotopé sur un point. Maintenant, pour tout $x+iy \in \mathbb{C}$, $s \in [0,1]$, posons

$$\psi(x+iy, s) = \begin{cases} x+iy+is & \text{si } y \geq 0 \\ x+i(1-s)y+is & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Cette application opère par "rétraction" de U dans $\mathbb{H}$. Il est facile de vérifier que $H\colon (t,s) \mapsto \psi(\gamma(t), s)$ convient.

Pour montrer que la restriction de F à $\mathbb{H}$ définit un isomorphisme analytique il nous suffit de vérifier qu'elle est univalente (Corollaire 4.1.4) ; notons d'emblée que la condition nécessaire que F soit une transformation conforme (ie. préserve les angles, cf. théorème 4.1.2) est satisfaite, puisqu'en tout point $z \in \mathbb{H}$ on a $F'(z) = f(z)^{-1} \neq 0$. Notons

$$D_{R,r} = (D(0,R] \cap \{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}) \setminus (\cup_{k=1}^{n} D(a_k, r[)$$

où $R > 0$ est grand et $r > 0$ est petit. Alors :

$F_{|\mathbb{H}}$ univalente

$\iff$ Pour tout $w \in F(\mathbb{H}), \mathrm{Card}\,(\{z \in \mathbb{H}, f(z) - w = 0\}) = 1$

$\iff$ Pour tous r petit, R grand, $w \in F(D_{R,r}), \mathrm{Card}\,(\{z \in D_{R,r}, f(z) - w = 0\}) = 1$

$\iff$ Pour tous r petit, R grand, $w \in F(D_{R,r}), \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\partial D_{R,r}} \frac{F'(z)}{F(z)-w} dz = 1.$

Dans la dernière équivalence on a appliqué le principe de l'argument 3.2.5. On reconnaît à droite l'indice

$$\mathrm{Ind}(w, F(\partial D_{R,r})) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_{R,r}} \frac{F'(z)}{F(z)-w} dz.$$

Puisque l'intérieur de $D_{R,r}$ recouvre $\mathbb{H}$ lorsque $r \to 0$ et $R \to +\infty$, nous devons montrer qu'en ces limites l'indice est égal à 1 pour tout $w \in F(\mathbb{H})$. En la limite $r \to 0$ le lacet

$\partial D_{R,r}$ est l'union du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle γ_R^+ centré en 0 et de rayon R ; lorsque $R \to +\infty$, $[-R,R]$ "tend vers" $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tandis que le demi-cercle γ_R^+ "se rapproche" de l'infini. Si nous pouvons reconnaître $\bar{\mathbb{R}}$ comme un lacet et définir son image $F(\bar{\mathbb{R}})$, celle-ci sera la limite naturelle de $F(\partial D_{R,r})$ lorsque $r \to 0$ et $R \to +\infty$, et la frontière naturelle de $F(\mathbb{H})$.

Pour donner un sens à cela, il est utile d'identifier $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ avec la demi-sphère $S^2_+ := S^2 \cap \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3, v \geq 0\}$ via l'homéomorphisme $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$ (Théorème 4.3.1), et donc $\bar{\mathbb{R}}$ avec le méridien $S^2 \cap \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3, v = 0\}$. Celui-ci apparaît alors comme l'union des deux demi-méridiens

$$C_+ :\cong [0,+\infty[\cup\{\infty\} \text{ et } C_- :\cong]-\infty,0] \cup \{\infty\}.$$

où $\pm\infty$ sont identifiés au pôle Nord N de S^2. Via cette identification, on voit qu'il existe une homotopie de $\partial D_{R,r}$ vers $\bar{\mathbb{R}}$ dans S^2, et même dans S^2_+, puisque S^2_+ est homéomorphe à un disque (par ex. par projection horizontale dans $\mathbb{R}^3$), et donc simplement connexe. Maintenant considérons la limite de $F(\partial D_{R,r})$. L'application restreinte

$$\begin{array}{rccc} F_{|\mathbb{R}}: & \mathbb{R} \setminus \{a_1,\ldots,a_n\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & F(x) \end{array}$$

se prolonge continûment aux points a_k, par critère de Riemann (car $0 < \mu_k < 1$ pour tout k), et sa limite est finie en $\pm\infty$ (car $\sum_{i=k}^n \mu_k = 2$). En fait ces limites sont égales. En effet, nous avons vu que $\partial D_{R,r}$ et $\bar{\mathbb{R}} = C_+ \cup C_-$ sont des lacets homotopes dans S^2_+ ; par continuité de l'indice, ils sont donc homologues dans tout voisinage ouvert de $D_{R,r}$ dans S^2_+. Or la fonction $u \mapsto 1/f(u)$, holomorphe sur $\mathbb{H}$, l'est aussi en $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ puisque $u \mapsto 1/f(1/u)$ est bornée au voisinage de 0. En appliquant le théorème de Cauchy et en faisant tendre $r \to 0$ et $R \to +\infty$ on obtient donc

$$\int_{C_+ + C_-} du/f(u) = \int_{\partial D_{R,r}} du/f(u) = 0$$

ce qui montre bien $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) \in \mathbb{C}$. Ici, il est important de noter que, quitte à effectuer un changement de variable par une homographie, tout calcul intégral sur des fonctions méromorphes définies sur un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$ peut être effectué dans un ouvert de $\mathbb{C}$ (ie. de $\hat{\mathbb{C}}$ ne contenant pas ∞).

Donc $F(\bar{\mathbb{R}})$ est un lacet bien défini de $\mathbb{C}$. Comme F est une transformation conforme et que tout point de l'axe réel orienté se trouve "à droite" de $\mathbb{H}$, tout point de $F(\bar{\mathbb{R}})$ se trouve "à droite" de $F(\mathbb{H})$. On vérifie sans peine que cela implique que $F(\bar{\mathbb{R}})$ est une courbe sans point d'auto-intersection, ie. une courbe de Jordan ; donc $F(\mathbb{H})$ est l'intérieur de la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus F(\bar{\mathbb{R}})$. Mais cela ne permet pas de conclure, comme le montre l'exemple de l'application $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto z^n$, qui fixe S^1 et vérifie $\mathrm{Ind}(w, F(S^1)) = n$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.

Nous devons calculer explicitement $\mathrm{Ind}(w, F(\bar{\mathbb{R}})) = 1$, et pour cela déterminer $F(\bar{\mathbb{R}})$ précisément. Découpons donc le lacet $F(\bar{\mathbb{R}})$ en n arcs d'extrémités les points $F(a_k)$, $k = 1,\ldots,n$. La définition de F implique que chacun de ces arcs est un segment de $\mathbb{C}$: l'intégrale sur chaque intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ est d'argument constant. Donc $F(\bar{\mathbb{R}})$

est une courbe polygonale, bord d'un polygone d'intérieur $F(\mathbb{H})$. Pour déterminer les angles dièdres du polygone $\overline{F(\mathbb{H})}$, notons que :

- $f(x) > 0$ pour tout x réel $< a_1$ ou $> a_n$;
- $\dfrac{f(a_k+\varepsilon)}{f(a_k-\varepsilon)} = e^{-i\mu_k\pi}$ pour tout $\epsilon > 0$ pas trop grand.

Alors le segment $[F(a_n), F(a_1)]$ est inclus dans $\mathbb{R}$, et

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{F(a_{k+1}) - F(a_k)}{F(a_k) - F(a_{k-1})}\right) = \mu_k\pi \tag{4.3}$$

pour $k = 2, \ldots, n-1$. Donc l'angle dièdre interne au sommet $F(a_k)$ de $\overline{F(\mathbb{H})}$ est égal à $\pi - \mu_k\pi$.

Enfin, calculons l'indice $\operatorname{Ind}(w, F(\bar{\mathbb{R}}))$. On va utiliser le lemme suivant, qui ne peut être bien compris qu'à l'aide d'une figure. Soit $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ un lacet tel que $0 \notin \gamma(I)$, et tel que $\gamma(I)$ intersecte l'axe réel $\{\mathfrak{Im}(z) = 0\}$ en un nombre fini non nul de points $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Notons

$$u(t) := \mathfrak{Re}(\gamma(t)) \ , \ v(t) := \mathfrak{Im}(\gamma(t)).$$

On peut supposer que $I = [t_1, t_N]$ (quitte à reparamétrer I par une translation), de sorte que $\gamma(t_1) = \gamma(t_N)$. On peut aussi prolonger γ à $\mathbb{R}$ tout entier, par périodicité de période $t_N - t_1$. Par définition la fonction v change de signe en chaque point t_k. On peut les répartir en quatre ensembles, selon que γ tourne au voisinage de t_k "dans le sens positif" ou "dans le sens négatif" autour de 0 :

- E_1 : où $u(t_k) > 0$ et $v(t)$ passe du signe $-$ au signe $+$ en traversant t_k dans le sens croissant ;
- E_2 : où $u(t_k) > 0$ et $v(t)$ passe du signe $+$ au signe $-$ en traversant t_k dans le sens croissant ;
- E_3 : où $u(t_k) < 0$ et $v(t)$ passe du signe $+$ au signe $-$ en traversant t_k dans le sens croissant ;
- E_4 : où $u(t_k) < 0$ et $v(t)$ passe du signe $-$ au signe $+$ en traversant t_k dans le sens croissant.

Posons

$$\delta_k = \begin{cases} +1 & \text{si } t_k \in E_1 \text{ ou } t_k \in E_3 \\ -1 & \text{si } t_k \in E_2 \text{ ou } t_k \in E_4. \end{cases}$$

Lemme 4.6.2 (Calcul effectif de l'indice) *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\operatorname{Ind}(0, \gamma) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \delta_k.$$

Preuve. Notons que t_1 et t_N sont dans le même ensemble E_k, et que N est impair, puisque pour $t = t_1 - h$ et $t = t_N + h$ avec $h > 0$ assez petit, v a des signes différents et a changé de signe N fois. On peut donc grouper les termes de la somme par paires. On décompose :

$$\mathrm{Ind}(0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_N} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt.$$

L'arc $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ a un voisinage simplement connexe sur lequel la fonction $1/z$ est holomorphe, évidemment non nulle, et donc possède une primitive. C'est une détermination du logarithme complexe, qu'il faut choisir ; notons-là Log. Supposons par exemple que $t_k \in E_2$; alors $v(t) < 0$ pour $t_k < t < t_{k+1}$, donc $t_{k+1} \in E_1$ ou $t_{k+1} \in E_4$. On peut donc écrire $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$, avec $\theta(t) \in [-\pi, 0]$ une fonction différentiable bien déterminée, telle que $\theta(t_k) = 0$, et $\theta(t_{k+1}) = 0$ si $t_{k+1} \in E_1$, et $\theta(t_{k+1}) = -\pi$ si $t_{k+1} \in E_4$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt &= \mathrm{Log}(\gamma(t_{k+1})) - \mathrm{Log}(\gamma(t_k)) \\ &= \ln(|\gamma(t_{k+1}|) - \ln(|\gamma(t_k)|) + i(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)).\end{aligned}$$

L'indice est à valeurs entières, donc il suffit de calculer la partie réelle de l'intégrale :

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt\right) = \frac{1}{2\pi}(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)) = \frac{1}{2}(\delta_{k+1} + \delta_k).$$

Les autres cas, pour $t_k \in E_1$, E_3 ou E_4, se traitent de la même façon, et la formule en découle. □

Par translation on peut appliquer ce lemme pour calculer l'indice $\mathrm{Ind}(w, \gamma)$ en un point $w \notin \gamma(I)$ quelconque. Par une rotation on peut aussi remplacer l'axe réel, relativement auquel on calcul les variations de $v(t)$, par n'importe quelle droite L ne passant pas par w et ne rencontrant $\gamma(I)$ qu'en un nombre fini de points.

Appliquons ce lemme au lacet $F(\bar{\mathbb{R}})$. Avec les identités (4.3) et les propriétés des μ_k on montre sans peine que toute droite verticale L passant par un point de $F(\mathbb{H})$ intersecte $F(\bar{\mathbb{R}})$ en exactement deux points, traversés dans le sens positif (car $F(\bar{\mathbb{R}})$ se trouve "à droite" de $F(\mathbb{H})$). Au vu de l'observation ci-dessus, on est dans les hypothèses du lemme avec $N = 3$, avec $t_1 = t_3$ et t_2 dans les ensembles du type E_1 et E_3 respectivement. Pour tout $w \in F(\mathbb{H})$ on a donc

$$\lim_{r\to 0, R\to+\infty} \mathrm{Ind}(w, F(\partial D_{R,r})) = \mathrm{Ind}(w, F(\bar{\mathbb{R}})) = 1.$$

Ceci montre que $F_{|\mathbb{H}}$ est univalente, donc un isomorphisme analytique sur son image, que nous avons déterminée plus haut. □

Remarque 4.6.3 Le calcul à la fin de la preuve du lemme ci-dessus justifie, à posteriori, le nom de "principe de l'argument" donné à l'identité (3.2.5).

4.6.1 Intégrales elliptiques et fonctions de Jacobi

Nous mentionnons ici un exemple important de transformation de Schwarz-Christoffel. Pour des développements, on renvoie aux nombreux cours sur les fonctions elliptiques.

On applique le théorème 4.6.1 au cas où $n = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/2$, et $a_1 = -1/k = -a_4$, $a_2 = -1 = -a_3$, où $0 < k < 1$. Donc

$$F(z) := \int_0^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Ici, la détermination de la racine carrée vaut 1 lorsque $u = 0$. On dit que F est une *intégrale elliptique de première espèce*. D'après le théorème, l'application $F\colon \mathbb{H} \to F(\mathbb{H})$ est un isomorphisme analytique, et $F(\mathbb{H})$ est un rectangle de sommets

$$-K := -F(1) = F(-1)\ ,\ K = F(1)\ ,\ K + iK' := F(1/k)\ ,\ -K + iK' := F(-1/k).$$

Ces relations définissent évidemment K', mais on peut vérifier aussi que

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

En effet, on peut décomposer $F(1/k)$ en une intégrale sur $[0,1]$ et une intégrale sur $[1,1/k]$; en traversant le point de ramification 1 l'intégrande de $F(1/k)$ "saute" de $e^{i\mu_4\pi} = i$, donc $K + iK' = F(1/k)$.

La fonction réciproque de $F\colon \mathbb{H} \to F(\mathbb{H})$, notée **sn**, est appelée *fonction sinus elliptique de Jacobi*. En appliquant le *principe de symétrie* de Schwarz (cf. TD1) le long des faces du rectangle $\overline{F(\mathbb{H})}$, on peut prolonger **sn** en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, vérifiant les relations de bi-périodicité

$$\mathbf{sn}(z + 4K) = \mathbf{sn}(z)\ ,\ \mathbf{sn}(z + 2iK') = \mathbf{sn}(z).$$

Par conséquent, **sn** descend en une fonction méromorphe

$$\mathbf{sn}\colon \mathbb{C}/(4K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}.$$

L'espace $\mathbb{C}/(4K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z})$, quotient de $\mathbb{C}$ par le groupe engendré par les translations d'affixes $4K$ et $2iK'$, est une *courbe elliptique* ; topologiquement c'est un tore réel de dimension deux.

Pour une preuve de ces propriétés avec des outils au niveau de ce cours (et pour bien d'autres choses), on renvoie aux pages 344–350 du livre [Dieu].

Chapitre 5

Revêtements et groupe fondamental

Dans le théorème 4.5.2 nous avons obtenu une caractérisation topologique de la propriété de *simple connexité* des domaines de $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre nous allons développer les rudiments de la théorie des revêtements, en relation directe avec ce théorème. Pour des développements je conseille les références [Pau] et [Hat], disponibles sur les pages web de leurs auteurs ; [Pau] est immédiatement accessible au niveau de ce cours, et on lira avec profit ses sections 2.2 et 3.1–3.7.

Une fois posés la définition et des exemples importants de revêtements dans la section 5.1, les résultats qu'il faut comprendre en priorité dans ce chapitre sont :

- le théorème 5.2.4 (unicité des relèvements d'homotopie ;
- les propositions 5.3.2 et 5.3.7 (définition et fonctorialité du groupe fondamental) ;
- le théorème 5.3.10 (CNS d'existence de relevés d'une application) ;
- la proposition 5.4.5 (propriétés des rétracts) et l'example 5.4.3.
- le groupe fondamental d'un espace simplement connexe (Proposition 5.5.3) et du cercle (théorème 5.5.7).

On se place immédiatement dans un cadre plus général que dans les chapitres précédents, où toutes les définitions ont un sens.

5.1 Revêtements

Soient X et B deux espaces topologiques séparés.

Définition 5.1.1 *On dit qu'une application continue $f : X \to B$ est un* revêtement *si tout point y de B admet un voisinage V tel que $f^{-1}(V)$ est une union disjointe non vide d'ouverts U_i de X, tels que chaque application $f_{|U_i} : U_i \to V$ soit un homéomorphisme.*

Dans ce cas on dit que B est la base de f, X l'espace total de f, et $f^{-1}(y)$ est la fibre de f au-dessus de y. On dit que V est un ouvert trivialisant de f, et également un voisinage distingué de y pour f.

L'exemple fondamental est fourni par l'application exponentielle. En effet, soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & e^{it}. \end{array}$$

Pour tout $y = e^{i\theta} \in S^1$, si $V = S^1 \backslash \{-y\}$ alors $f^{-1}(V) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]\theta+(2k-1)\pi, \theta+(2k+1)\pi[$ (union disjointe), et la restriction de f à chaque intervalle $]\theta+(2k-1)\pi, \theta+(2k+1)\pi[$ est un homéomorphisme sur V.

Pour tout revêtement $f\colon X \to B$ on a clairement les propriétés suivantes :

- f est une application surjective.
- f est un *homéomorphisme local* (ie. pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ soit ouvert et $f_{|U}\colon U \to f(U)$ soit un homéomorphisme).
- f est une application ouverte (ie. l'image par f de tout ouvert est un ouvert).

Les deux premières propriétés impliquent que X et B ont les mêmes propriétés topologiques locales (locale connexité, locale connexité par arcs, par exemple). De plus :

- si B est connexe, alors le cardinal des fibres $f^{-1}(y)$, fini ou infini (c'est un ensemble discret), est constant en y.

En effet, ce cardinal est constant sur chaque ouvert distingué V de B, donc deux ouverts distingués qui ont une intersection non vide ont des fibres de même cardinal. La conclusion vient alors en considérant un recouvrement ouvert de B.

Comme conséquence de cette dernière propriété, on peut identifier toutes les fibres $f^{-1}(y)$ à un même ensemble discret D, et au-dessus de chaque ouvert trivialisant V on a un homéomorphisme

$$h_V : V \times D \to f^{-1}(V) \tag{5.1}$$

tel que $h_V(V \times \{i\} = U_i$ (avec les notations de la définition 5.1.1). On appelle h_V une *trivialisation de f au-dessus de V.*

Définition 5.1.2 *Un revêtement $f\colon X \to B$ est dit* fini, *à $n \in \mathbb{N}^*$ feuillets, si pour tout y dans B le cardinal de $f^{-1}(y)$ est fini, égal à n.*

Clairement, un revêtement à un unique feuillet est un homéomorphisme (car il est alors injectif, et tout revêtement est continu, ouvert, surjectif).

Voici un outil pratique pour reconnaître un revêtement :

Lemme 5.1.3 *Si $f : X \to B$ est un homéomorphisme local et le cardinal de chaque fibre $f^{-1}(y)$ est constant, fini, et non nul, alors f est un revêtement fini, à $|f^{-1}(y)|$ feuillets.*

Preuve. L'hypothèse sur les fibres non vides implique que f est surjectif. Pour tout $y \in B$, et tout $x \in f^{-1}(y)$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $f_{|U_x} : U_x \to f(U_x)$ est un homéomorphisme. Puisque $|f^{-1}(y)|$ est fini, on peut supposer que les ouverts U_x associés aux différents points x de $f^{-1}(y)$ sont deux à deux disjoints (on utilise ici que

X est séparé). On pose alors $V = \cap_{x\in f^{-1}(y)} f(U_x)$; c'est un voisinage ouvert de y, car f est ouverte et $|f^{-1}(y)|$ est fini. On a bien sûr (l'union est disjointe)

$$\cup_{x\in f^{-1}(y)}(f^{-1}(V) \cap U_x) \subset f^{-1}(V),$$

mais comme le cardinal des fibres est constant, il y a égalité. De plus la restriction de f à $f^{-1}(V) \cap U_x$ est un homéomorphisme vers V. Donc V est un voisinage distingué de y, et f est un revêtement. □

Exemple 5.1.4 (1) Le revêtement $f : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{it}$, est un revêtement infini ; mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, ou $S^1 \to S^1$, définie par $z \mapsto z^n$ est un revêtement à n feuillets.

(2) L'application $\mathbb{R}^n \to (S^1)^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$ est un revêtement infini. On appelle $(S^1)^n$ le *tore de dimension n*.

(3) Soit P un polynôme complexe de degré $n > 0$. Soit Z l'ensemble des racines du polynôme dérivé P', F l'ensemble fini $P(Z)$ et U l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$. Alors $P_{|U} : U \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement à n feuillets. En effet, puisque $P'(z) \neq 0$ en tout point $z \in U$, $P_{|U}$ est un homéomorphisme local (par le théorème d'inversion locale). De plus, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus F$ l'équation $P(z) = w$ a n solutions distinctes (toutes ont multiplicité 1), qui forment la fibre $P^{-1}(\{w\})$. On utilise alors le lemme 5.1.3 pour conclure.

Les actions de groupes sont un outil très puissant pour construire des revêtements. Dans ce cadre, le résultat suivant est à consommer sans modération ; nous l'utiliserons en TD un peu comme une "boîte noire", en renvoyant à [Pau] ou [Hat] pour tous détails.

Rappelons qu'une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g.x \end{array}$$

telle que $(gg').x = g.(g'.x)$, et $e.x = x$ pour tous $g, g' \in G$. On dit que cette action est :

- *libre* si en tout point $x \in X$ le stabilisateur $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ est réduit à l'élément neutre de G. Ceci équivaut à : $gx = g'x \Rightarrow g = g'$;
- *continue* lorsque X est un espace topologique et pour tout $g \in G$ l'application $x \mapsto g.x$ est continue. Dans ce cas l'action définit une représentation $G \to Homeo(X)$.

Lorsque G est muni d'une topologie telle que l'application $G\times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue, on dit que G est un *groupe topologique*. Une action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est telle que l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est continue ; la définition d'action continue donnée ci-dessus correspond à la situation où G est muni de la topologie discrète. On dit alors que G est un *groupe discret*. Nous ne considérerons que cette situation, et donc dans la suite nous omettrons systématiquement de préciser que G est considéré comme un groupe discret.

Définition 5.1.5 *Une action continue d'un groupe G sur un espace localement compact X est* proprement discontinue *si et seulement si pour tout compact K de X, la partie $\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}$ est finie.*

On a le résultat fondamental qui suit (cf [Pau], sections 3.4 et 3.7, pour la preuve et tous détails). Le groupe $\pi_1(X/G)$ dans l'item (4) est décrit dans la section 5.3.

Théorème 5.1.6 *Soit G un groupe, agissant librement et de façon proprement discontinue sur un espace topologique séparé X. Alors :*

(1) *pour tout x dans X, il existe un voisinage V de x tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout g dans $G \setminus \{e\}$;*

(2) *chaque orbite de G est discrète ;*

(3) *l'espace quotient X/G est séparé, et la projection canonique $X \to X/G$ est un revêtement.*

(4) *Si X est simplement connexe, alors $\pi_1(X/G)$ est isomorphe à G.*

En particulier, si G est une groupe fini d'ordre n agissant librement et continuement, alors la projection canonique $X \to X/G$ est toujours un revêtement, qui de plus possède n feuillets.

Exemple 5.1.7 (1) Si $G := \{\pm 1\}$ agit sur S^n par $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$, alors l'espace topologique quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/G$ est séparé, et l'application canonique $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets. Cf TD. On appelle $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *l'espace projectif de dimension n.*

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le groupe U_p des racines p-ièmes de l'unité agit (continuement) sur la sphère de dimension impaire

$$S^{2n+1} = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$$

par $(\lambda, (z_0, \ldots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n))$. Cette action est libre et continue, donc la projection canonique $S^{2n+1} \to L_{n,p} := S^{2n+1}/U_p$ est un revêtement à p feuillets. On appelle $L_{n,p}$ un *espace lenticulaire.*

(3) L'application quotient canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un revêtement ; sous l'identification de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et S^1 il est isomorphe (dans le sens donné ci-dessous) avec le revêtement $\mathbb{R}^n \to (S^1)^n$ de l'exemple 5.1.4 (2).

Problème de classification $\Rightarrow$ problème de relèvement. Si $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ sont deux revêtements de même base B, un *morphisme de revêtements* de f sur f' est une application continue $\varphi : X \to X'$ telle que $f' \circ \varphi = f$. L'application identité est un morphisme de revêtements, dit identité de f sur f. Si $f'' : X'' \to B$ est un troisième revêtement de base B et φ' un morphisme de revêtements de f' sur f'', alors $\varphi' \circ \varphi$ est un morphisme de revêtements, dit composé. Un isomorphisme de revêtements de f sur f' est un morphisme de revêtements $\varphi : X \to X'$ de f sur f' tel qu'il existe un morphisme de revêtements $\psi : X' \to X$ de f' sur f tel que $\psi \circ \varphi = id_X$ et $\varphi \circ \psi = id_{X'}$. Si de plus $X = X'$, on parle d'automorphisme de revêtements. Deux revêtements sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de revêtements de l'un sur l'autre.

Définition 5.1.8 *Soient $p : X \to B$ un revêtement et Y un espace topologique séparé. Un relèvement (ou relevé) à p d'une application continue $f : Y \to B$ est une application continue $\tilde{f} : Y \to X$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$.*

Un morphisme de revêtements $\varphi : X \to X'$ est donc un relèvement du revêtement $f : X \to B$, et la classification des revêtements à isomorphismes près dépend de la détermination de conditions nécessaires et suffisantes pour relever des applications. Notons par exemple que la fonction $z \mapsto z$ définie sur $\mathbb{C}^*$ ne se relève pas au revêtement $z \mapsto z^n$ défini sur $\mathbb{C}^*$, puisqu'il n'existe pas de détermination continue de la racine n-ième sur $\mathbb{C}$.

Proposition 5.1.9 (Unicité des relèvements) *Soient $p : X \to B$ un revêtement et Y un espace topologique séparé. Si Y est connexe, alors deux relèvements à p de $f : Y \to B$ qui coïncident en un point sont égaux.*

En particulier, Si $p : X \to B$ et $p' : X \to B$ sont deux revêtements et X est connexe, alors deux morphismes de p sur p' qui coïncident en un point sont égaux.

Preuve. Soient $f', f'' : Y \to X$ deux relèvements de f coïncidant en un point $y \in Y$, et $A = \{u \in Y, f'(u) = f''(u)\}$. Par hypothèse A est non-vide, et f', f'' étant continues c'est un fermé de Y. Puisque Y est connexe il suffit de vérifier que A est ouvert pour conclure que $A = Y$. Soient $u \in Y$, V un voisinage ouvert distingué de $f(u)$, $h_V : V \times D \to p^{-1}(V)$ une trivialisation de p au-dessus de V (cf. (5.1)), et $V_d = h(V \times d)$ pour tout $d \in D$. Si $u \in A$, soit $d \in D$ tel que $f(u) \in V_d$. Alors $(f')^{-1}(V_d) \cap (f'')^{-1}(V_d)$ est un voisinage ouvert de u contenu dans A, donc A est ouvert. □

Dans les deux sections suivantes, étant donné un revêtement $p : X \to B$ nous allons :

- résoudre le problème d'unicité de relèvements à p d'applications $f : Y \to B$ (théorème 5.2.4) ;
- donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de relèvements à p d'applications $f : Y \to B$ (théorème 5.3.10).

Pour chacun de ces deux problèmes nous avons besoin d'un nouvel outil : les homotopies d'applications (et de chemins), déjà rencontrées dans le théorème 4.5.2, et le groupe fondamental.

5.2 Homotopies et relèvements d'applications, I

Soient X et Y deux espaces topologiques.

Définition 5.2.1 *Deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$ pour tout x dans X. On notera alors $f \sim g$, et on dira que h est une homotopie de f à g.*

Étant donnée une partie A de X, si on impose de plus que $h(\cdot,t)$ fixe A point par point, ie. $h(a,t) = f(a)$ pour tous $a \in A$, $t \in [0,1]$, on parle d'homotopie rel(A). Pour tout t dans $[0,1]$, on notera aussi $h_t : X \to Y$ l'application $h_t(x) = h(x,t)$.

Autrement dit, l'application $t \mapsto h_t$ déforme continuement f en g.

Lemme 5.2.2 *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de X dans Y.*

Preuve. La relation $\sim$ est clairement réflexive (prendre h constante en le paramètre $t \in [0,1]$), et elle est symétrique (changer le paramètre t en $1-t$). Si h' est une homotopie de f à g et h'' une homotopie de g à k, alors

$$h(x,t) = \begin{cases} h'(x,2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ h''(x,2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

est une homotopie de f à k. □

Remarque 5.2.3 On peut montrer que $f \sim g$ si et seulement s'il existe un chemin continu entre f et g dans $\mathcal{C}(X,Y)$ muni de la topologie compacte-ouverte.

Théorème 5.2.4 (Relèvement des homotopies) *Soient $p\colon X \to B$ un revêtement, $\tilde{f}_0\colon Y \to X$ une application continue, et $f_0 := p \circ \tilde{f}_0$. Alors pour toute homotopie d'applications $F\colon [0,1]\times Y \to B$ d'origine $F(0,\cdot) = f_0$, il existe une unique homotopie d'applications $\tilde{F}\colon [0,1]\times Y \to X$ telle que $p \circ \tilde{F} = F$ et $\tilde{F}(0,\cdot) = \tilde{f}_0$.*

En particulier, dans le cas où $Y = \{y\}$ (un point), tout chemin de B se relève à X, et le relevé est unique si son origine est fixée. De plus, dans le cas où $Y = [0,1]$, toute homotopie (à extrémités fixées) entre chemins γ_0 et γ_1 de B se relève en une homotopie entre chemins de X (à extrémités fixées), et ce relevé est unique s'il commence en un relevé fixé $\tilde{\gamma}_0$ de γ_0.

Preuve. Fixons un point $(y,t) \in Y \times [0,1]$, et U un voisinage distingué de $F(y,t)$ pour le revêtement p. Puisque F est continue, il existe un voisinage V_t de (y,t), que l'on peut choisir de la forme "produit" $N_t \times]a_t, b_t[$, tel que $F(V_t) \subset U$ (en $t = 0$ ou 1, remplacer $]a_0$ par $[0,$ et $b_1[$ par $1]$). Comme $\{y\} \times [0,1]$ est compact, il existe $V_{t_1}, \ldots, V_{t_m}$, en nombre fini, tels que

$$[0,1] = [0, b_{t_0}[\cup_{j=1}^{m-1}]a_{t_j}, b_{t_j}[\cup]a_{t_m}, 1].$$

En remplaçant chacun de ces intervalles par un segment fermé de longueur un peu plus petite, on peut donc construire une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ de $[0,1]$, telle que $N = \cap_{j=0}^{m} N_{t_j}$ vérifie

$$F(N \times [t_j, t_{j+1}]) \subset U_j,$$

où U_j est un ouvert trivialisant pour p. Maintenant, pour tout $j \in \{0, \ldots, m\}$, notons $\tilde{U}_j$ l'ouvert de X tel que $\tilde{f}_0(y) \in \tilde{U}_j$, et $p_{|\tilde{U}_j}\colon \tilde{U}_j \to U_j$ est un homéomorphisme (cf. définition d'un revêtement). Posons

$$\tilde{F}_{|N\times[0,t_1]} = (p_{|\tilde{U}_j})^{-1} \circ F_{|N\times[0,t_1]}.$$

Par construction on a $\tilde{F}(y,0) = \tilde{f}_0(y)$, et $\tilde{F}_{|N\times[0,t_1]}$ est une homotopie qui relève F dans un voisinage de y, et définie sur l'intervalle $[0,t_1]$. Il s'agit de la prolonger à $[0,1]$. On procède par récurrence. Supposons donc que $\tilde{F}$ est définie sur $N\times[0,t_i]$, telle que $p\circ\tilde{F}_{|N\times[0,t_i]} = F_{|N\times[0,t_i]}$. On sait que $F(y,t_i)\in U_i$, alors soit $\tilde{U}_j$ l'ouvert de X tel que $\tilde{F}(y,t_i)\in\tilde{U}_i$, et $p_{|\tilde{U}_i}\colon \tilde{U}_i\to U_i$ est un homéomorphisme. Quitte à remplacer N par $(N\times\{t_i\})\cap\tilde{F}^{-1}_{|N\times\{t_i\}}(\tilde{U}_i)$, on peut supposer que

$$\tilde{F}(N\times\{t_i\})\subset\tilde{U}_i.$$

Alors on pose

$$\tilde{F}_{|N\times[t_i,t_{i+1}]} = (p_{|\tilde{U}_i})^{-1}\circ F_{|N\times[t_i,t_{i+1}]}. \tag{5.2}$$

On a $p\circ\tilde{F}_{|N\times[t_i,t_{i+1}]} = F_{|N\times[t_i,t_{i+1}]}$, donc en procédant par induction on peut définir $\tilde{F}$ sur tout $N\times[0,1]$. Notons que l'injectivité des applications $p_{|\tilde{U}_i}$ implique l'unicité de $\tilde{F}$: tout relevé de F sur $N\times[0,1]$ est complètement déterminé par (5.2) et sa "condition initiale" $\tilde{f}_0(y)$ en $(y,0)$. Enfin, si N, N' sont deux ouverts de Y tels que $N\cap N'\neq\emptyset$, alors par l'unicité de $\tilde{F}_{|N\times[0,1]}$ et $\tilde{F}_{|N'\times[0,1]}$, ces deux applications coincident au-dessus de $N\cap N'$. Faisant varier N, on peut donc prolonger $\tilde{F}$ en $\tilde{F}\colon[0,1]\times Y\to X$ continue telle que $p\circ\tilde{F} = F$. □

Remarque 5.2.5 La construction de $\tilde{F}$ dans la preuve ci-dessus porte souvent le nom de *prolongement analytique* (en raison de ses liens historiques avec le développement de la théorie des surfaces de Riemann).

5.3 Groupe fondamental et relèvements d'applications, II

Soit X un espace topologique. Le groupe fondamental "encode" la structure des lacets dans X à homotopie près. Pour le définir correctement, on doit d'abord expliciter la définition 5.2.1 dans le cas particulier des *chemins* de X, ie. les application continues $[0,1]\to X$:

Définition 5.3.1 *Deux chemins $\gamma_1,\gamma_2 : [0,1]\to X$ sont dit homotopes (*avec extrêmités fixes*), s'ils ont mêmes extrêmités $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$, et s'il existe une application continue $H : [0,1]\times[0,1]\to X$ telle que*

$$H(0,t)=\gamma_1(t), H(1,t)=\gamma_2(t), H(s,0)=\gamma_1(0)=\gamma_2(0), H(s,1)=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$$

pour tous $t\in[0,1]$ et $s\in[0,1]$. On dit que H est une homotopie de γ_1 à γ_2, et lorsqu'une telle application H existe on note $\gamma_1\sim\gamma_2$.

Cette définition s'applique en particulier aux lacets $\gamma : [0,1]\to X$, où $\gamma(0)=\gamma(1)$. Comme dans le lemme 5.2.2, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Un cas très particulier est celui où $\gamma_2(t) = (\gamma_1\circ\varphi)(t)$ est un *reparamétrage admissible* du chemin γ_1, ie. $\varphi : [0,1]\to[0,1]$ est une bijection continue croissante (cf. Section 2.1

pour de tels reparamétrages de classe $\mathcal{C}^1$). On construit alors une homotopie de γ_1 à γ_2 par combinaison convexe, en posant $H(s,t) = \gamma_1((1-s)t + s\varphi(t))$. En particulier, la classe d'homotopie d'un lacet ne dépend pas du paramétrage, pourvu que l'orientation en soit fixée.

Soit $x_0 \in X$, et posons

$$\pi_1(X, x_0) := \{\text{classes d'homotopie } [\gamma] \text{ des lacets } \gamma \text{ d'extremites } x_0\}.$$

Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets d'extrêmités x_0, on définit le lacet composé $\gamma := \gamma_1 \cdot \gamma_2$ par

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Cette opération est évidemment une loi de composition interne sur l'ensemble des lacets en x_0. Le fait remarquable est que cette loi passe au quotient sous l'homotopie, et définit donc une loi de composition interne sur l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$. Pour le voir, il s'agit de vérifier que si $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ sont des lacets en x_0 tels que $\alpha \sim \alpha'$ et $\beta \sim \beta'$, alors $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$. Mais si l'on note H_1 (resp. H_2) une homotopie de α vers α' (resp. $\beta \sim \beta'$), alors l'application

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H_2(s, 2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de $\alpha \cdot \beta$ vers $\alpha' \cdot \beta'$. On peut donc définir sans ambiguité le produit $[\alpha]\cdot[\beta]$ de deux classes d'homotopie de lacets $[\alpha]$, $[\beta]$ comme étant la classe d'homotopie $[\alpha \cdot \beta]$.

Proposition 5.3.2 *L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de la loi interne $\cdot$ est un groupe.*

Preuve. Il faut vérifier que le produit des classes d'homotopie des lacets en x_0 vérifie les axiomes d'une loi de groupe. L'élément neutre est la classe $[c_{x_0}]$ du chemin constant $c_{x_0}(t) := x_0$ $(0 \le t \le 1)$, et l'inverse d'une classe $[\gamma]$ est la classe $[\bar{\gamma}]$, où $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$ est le chemin *opposé* à γ. En effet, pour toute classe $[\alpha]$ l'application

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \le t \le \dfrac{1+s}{2} \\[2ex] x_0 & \text{si } \dfrac{1+s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

est une homotopie de $\alpha \cdot c_{x_0}$ vers α, donc $[\alpha] \cdot [c_{x_0}] \overset{\text{def}}{=} [\alpha \cdot c_{x_0}] = [\alpha]$. On construit de même une homotopie de $c_{x_0} \cdot \alpha$ vers α, d'où finalement $[c_{x_0}]$ est un élément neutre. De plus, la classe $[\bar{\gamma}]$ ne dépend pas du représentant γ de $[\gamma]$ (en changeant le paramètre t d'une homotopie de γ vers γ' en $1-t$, on obtient une homotopie de $\bar{\gamma}$ vers $\bar{\gamma}'$), et l'application

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \le t \le s/2 \\ \alpha(2t-s) & \text{si } (s/2) \le t \le 1/2 \\ \alpha(2-2t-s) & \text{si } 1/2 \le t \le (2-s)/2 \\ x_0 & \text{si } (2-s)/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

est une homotopie de $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ vers c_{x_0}. On construit de même une homotopie de $\bar{\alpha} \cdot \alpha$ vers c_{x_0}, donc $[\bar{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$. Enfin, étant donnés trois lacets γ_1, γ_2 et γ_3 en x_0, on peut définir une homotopie $H(s,t)$ de $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ à $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ en opérant sur les paramétrage de $[0,1]$, de sorte à faire "glisser" l'intervalle $[1/4, 1/2]$ (sur lequel $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ est donné par γ_2) en $[1/2, 3/4]$ (sur lequel $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ est donné par γ_2) lorsque le paramètre s de l'homotopie croît. Ainsi l'application

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq (1+s)/4 \\ \beta(4t-s-1) & \text{si } (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4 \\ \gamma\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } (2+s)/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

convient. □

Définition 5.3.3 *On appelle $\pi_1(X, x_0)$ le groupe fondamental de X, ou premier groupe d'homotopie de X, au point x_0.*

Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ n'est, en général, pas abélien. Il dépend du point base x_0, mais cette dépendance est très contrôlée, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.3.4 (Changement de point base) *Soit c un chemin de X d'origine x_0 et d'extrémité x_1. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi_c : & \pi_1(X, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [c \cdot \gamma \cdot \bar{c}] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X, x_1)$ dans $\pi_1(X, x_0)$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) de c. Si d est un autre chemin joignant x_0 à x_1, alors les isomorphismes ϕ_c et ϕ_d sont conjugués.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \phi_c([\alpha \cdot \beta]) = [c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \bar{c}] &= [c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \beta \cdot \bar{c}] \\ &= [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}] \cdot [c \cdot \beta \cdot \bar{c}] = \phi_c([\alpha]) \cdot \phi_c([\beta]). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donc ϕ_c est un morphisme de groupes. C'est un isomorphisme, car $\phi_{\bar{c}} = \phi_c^{-1}$. De plus, si g est la classe du lacet $d \cdot \bar{c}$, alors

$$\begin{aligned} \phi_d([\alpha]) = [d \cdot \alpha \cdot \bar{d}] &= [d \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \bar{d}] \\ & [d \cdot \bar{c}] \cdot [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}] \cdot [c \cdot \bar{d}] = g \cdot \phi_c([\alpha]) \cdot g^{-1}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 5.3.5 *Si X est connexe par arcs, pour tous points $x_0, x_1 \in X$ les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes. Si de plus $\pi_1(X, x_0)$ est abélien, cet isomorphisme est canonique.*

Remarque 5.3.6 En raison de ce corollaire, lorsque X est connexe par arcs on note souvent abusivement $\pi_1(X, x_0)$ par $\pi_1(X)$, un point base étant sous-entendu, et indifférent. Cet abus de notation ne pose que peu de problèmes. Mais “peu de problèmes” ne signifie pas “pas de problèmes”, et du soin est parfois nécessaire en ce qui concerne le traitement des points bases.

Soient maintenant X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. Si α est un chemin joignant x_0 à x_1, alors $f \circ \alpha$ est un chemin joignant $f(x_0)$ à $f(x_1)$. Si $H\colon [0,1]^2 \to X$ est une homotopie de α vers β, $f \circ H\colon [0,1]^2 \to Y$ est une homotopie de $f \circ \alpha$ vers $f \circ \beta$. Enfin, on a

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta).$$

La composition $\alpha \to f \circ \alpha$ est donc compatible avec l'homotopie et avec la composition des chemins. On en déduit immédiatement :

Proposition 5.3.7 (Fonctorialité) *Une application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme de groupes $f_*\colon [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. De plus, lorsque $f = Id_X$, $(Id_X)_*$ est l'application identité de $\pi_1(X, x)$, et si $g\colon Y \to Z$ est une application continue, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

On peut formaliser ce résultat de la manière suivante : la donnée, pour tout espace topologique pointé (X, x), du groupe $\pi_1(X, x)$, et pour tout morphisme d'espaces topologiques pointés $f : (X, x) \to (Y, y)$, du morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$, définit un *foncteur (covariant)* de la *catégorie* des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes.

Le résultat suivant montre que le groupe fondamental est un invariant topologique.

Corollaire 5.3.8 *Deux espaces topologiques homéomorphes et connexes par arcs ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Preuve. Si $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme, alors pour tout $x \in X$ le morphisme $f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est inversible, d'inverse $(f^{-1})_*\colon \pi_1(Y, f(x)) \to \pi_1(X, x)$, puisque $f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x)}$. □

Le résultat suivant montre que le groupe fondamental permet de distinguer des revêtements.

Corollaire 5.3.9 *Soit $p\colon X \to B$ un revêtement, avec X, B connexes par arcs. Le morphisme $p_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(B, p(x))$ est injectif.*

Preuve. Soit γ un lacet de X basé en x. D'après le théorème 5.2.4, γ est l'unique relevé en x du lacet $p \circ \gamma$. Si $p \circ \gamma$ est homotope au lacet constant en b, alors γ est homotope au lacet constant en x. □

Enfin, nous pouvons établir :

Théorème 5.3.10 (CNS des relèvements d'applications) *Soient $p\colon X \to B$ un revêtement, $f\colon Y \to B$ une application continue, et $x \in X$, $y \in Y$ fixés tels que $p(x) = f(y)$. Si Y est connexe et localement connexe par arcs, f se relève en une application continue $\tilde{f}\colon Y \to X$ si, et seulement si, on a*

$$f_*\pi_1(Y,y) \subset p_*\pi_1(X,x) \tag{5.5}$$

Preuve. Supposons que $\tilde{f}\colon Y \to X$ existe. On a $p \circ \tilde{f} = f$, et $\tilde{f}_*\pi_1(Y,y) \subset \pi_1(X,x)$ et $p_* \circ \tilde{f}_*\pi_1(Y,y) = f_*\pi_1(Y,y)$ par fonctorialité. Donc (5.5) est nécessaire.

Pour montrer que (5.5) est une condition suffisante, on utilise le théorème 5.2.4 pour relever les images par f de chemins dans Y : on fixe $y_0 \in Y$ et $x_0 \in X$ tels que $p(x_0) = y_0$, et pour tout $y \in Y$ on choisit un chemin γ dans Y reliant y_0 à y ; on obtient un chemin $\widetilde{f \circ \gamma}$ dans X d'origine $\widetilde{f \circ \gamma}(0) = x_0$ et tel que $p(\widetilde{f \circ \gamma}) = f \circ \gamma$. On veut poser

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \gamma}(1).$$

La condition (5.5) garantit qu'une telle définition est consistante, ie. indépendante du chemin choisi γ entre y_0 et y. En effet, si μ est un autre chemin de y_0 à y, alors

$$[(f \circ \gamma) \cdot \overline{(f \circ \mu)}] = [f \circ (\gamma \cdot \overline{\mu})] \in f_*\pi_1(Y,y) \subset p_*\pi_1(X,x).$$

Il existe donc un lacet η en x dans X tel que $(f \circ \gamma) \cdot \overline{(f \circ \mu)}$ est homotope à $p \circ \eta$. Par unicité du relèvement d'un chemin d'origine donnée, on en déduit que $\widetilde{f \circ \gamma}$ et $\widetilde{f \circ \mu}$ ont les même extrémités. Donc $\tilde{f}(y)$ ne dépend pas du choix de γ.

Montrons que f est continue. Soit U un voisinage ouvert de $f(y)$ tel que $p(U)$ est ouvert et $p_{|U}\colon U \to p(U)$ est un homéomorphisme. Soit $V \subset f^{-1}(p(U))$ un voisinage de y ouvert et connexe par arcs. Il suffit de montrer que $f(V) \subset U$. Pour tout w dans V, si γ' est un chemin de y à w contenu dans V, alors $\tilde{f}(w)$ est l'extrémité du relèvement de $f \circ (\gamma \cdot \gamma') = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \gamma')$ d'origine x, donc appartient à U (par connexité du chemin). Par conséquent, $f(V) \subset U$. □

5.4 Groupe fondamental et type d'homotopie

Le but de cette section est de raffiner le corollaire 5.3.8.

À partir de la notion d'homotopie entre applications (Définition 5.2.1), on arrive naturellement à celle d'espaces ayant les mêmes propriétés homotopiques :

Définition 5.4.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ continue telle que $f \circ g$ soit homotope à id_Y et $g \circ f$ soit homotope à id_X. S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y, on dit que X et Y ont le même type d'homotopie.*

Avoir même type d'homotopie est une relation d'équivalence entre espaces topologiques. Un exemple fondamental d'équivalence d'homotopie est fourni par la notion de rétraction par déformation :

Définition 5.4.2 *On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est un rétract de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $r \circ i_A = id_A$ (où $i_A \colon A \to X$ est l'inclusion). On dit que A est un rétract de X par déformation si de plus $i_A \circ r$ est homotope à id_X. On dit que A est un rétract de X par déformation forte si de plus $i_A \circ r$ est homotope à id_X relativement à A. On dit que r est respectivement une rétraction, rétraction par déformation, rétraction par déformation forte.*

Exemple 5.4.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la sphère S^n est un rétract par déformation forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. En effet, si $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est l'inclusion et si $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ est définie par $r(x) = x/||x||$, alors $r \circ i = id_{S^n}$ et $i \circ r$ est homotope à l'application identité de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'homotopie

$$h(x, s) = sx + (1 - s)\frac{x}{||x||},$$

qui fixe S^n. En particulier, l'inclusion i de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie, donc S^n et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ont le même type d'homotopie.

Le résultat suivant établit le comportement du groupe fondamental sous une homotopie d'applications.

Proposition 5.4.4 *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues homotopes. Pour tout x dans X, il existe un isomorphisme de groupes $\varphi : \pi_1(Y, g(x)) \to \pi_1(Y, f(x))$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(x)) \\
& \pi_1(Y, g(x)) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Si f et g sont homotopes relativement à x, alors $f_* = g_*$.

Preuve. Soit h une homotopie entre f et g. Soit c le chemin $s \mapsto h_s(x) = h(x, s)$ dans Y entre $f(x)$ et $g(x)$. Par la proposition 5.3.4, l'application $\varphi : [\beta] \mapsto [c \cdot \beta \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de $\pi_1(Y, g(x))$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. Pour montrer que $f_* = \varphi \circ g_*$, il suffit de montrer que pour tout lacet α d'origine x dans X, les lacets $c \cdot (g \circ \alpha) \cdot \bar{c}$ et $f \circ \alpha$ sont homotopes (relativement aux extrémités). Pour tout s dans [0,1], considérons le chemin $c_s : t \mapsto h(x, st)$. L'application $(s, t) \mapsto (c_s \cdot (h_s \circ \alpha) \cdot \bar{c}_s)(t)$ est continue. En $s = 0$, elle vaut $c_{f(x)} \cdot (f \circ \alpha) \cdot c_{f(x)}$ (où $c_{f(x)}$ est l'application constante en $f(x)$), qui est homotope à $f \circ \alpha$. En $s = 1$, elle vaut $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$. Ceci prouve la première affirmation. Si f et g sont homotopes relativement à x, alors c est constant, et alors φ est le morphisme identité. □

Proposition 5.4.5 *Si A est un rétract de X, alors pour tout $a \in A$ le morphisme $(i_A)_* \colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ est injectif. Si A est un rétract de X par déformation et X est connexe, alors $(i_A)_*$ est un isomorphisme.*

Preuve. Si A est un rétract de X, alors $r_* \circ (i_A)_* = id_{\pi_1(A,a)}$ par fonctorialité, d'où l'injectivité ; si A est un rétract de X par déformation, alors on a de plus $(i_A)_* \circ r_* = id_{\pi_1(X,a)}$ par la proposition 5.4.4, d'où la surjectivité. □

Cette proposition permet de montrer que le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie, raffinant donc le corollaire 5.3.8 :

Corollaire 5.4.6 *Si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes. Par conséquent, les groupes fondamentaux de deux espaces connexes par arcs ayant même type d'homotopie sont isomorphes.*

Preuve. Soit $g : Y \to X$ une application continue telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Par la proposition 5.4.4 et les propriétés fonctorielles, $f_* \circ g_*$ et $g_* \circ f_*$ sont des isomorphismes de groupes. Donc f_* est un isomorphisme. □

5.5 Calcul des groupes fondamentaux : outils, sphères, cercle, graphes finis

En pratique on utilise en permanence les faits suivants.

Lemme 5.5.1 *Pour toute partie convexe non vide C dans un espace vectoriel topologique, et tout point $x_0 \in C$ on a $\pi_1(C, x_0) = \{1\}$.*

Preuve. L'application $h \colon (x, s) \mapsto (1-s)x + sx_0$ de $C \times [0, 1]$ dans C est une homotopie entre id_C et $x \mapsto x_0$. En particulier, pour tout lacet γ dans C, $(t, s) \mapsto h(\gamma(t), s)$ est une homotopie de γ vers le lacet constant en x_0. □

Proposition 5.5.2 *Soit $\alpha : S^1 \to X$ une application continue, telle que $\alpha(1) = x$. Alors $[\alpha] = 1$ dans $\pi_1(X, x)$ si et seulement si α s'étend continuement en une application continue $D^2 \to X$.*

Preuve. Si α s'étend continuement en $f : D^2 \to X$, si $i : S^1 \to D^2$ est l'inclusion, alors par fonctorialité on a
$$f_* \circ i_* = \alpha_*.$$
Mais si $\beta : [0, 1] \to S^1 \cong [0, 1]/\{0, 1\}$ est le lacet induit par passage au quotient de l'identité de $[0, 1]$, alors $\alpha_*[\beta] = [\alpha]$. Comme $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$ (Lemme 5.5.1), on a $i_*[\beta] = 1$, donc finalement $[\alpha] = 1$, ce qui montre le résultat. Réciproquement, si $[\alpha] = 1$, soit $h : S^1 \times [0, 1] \to X$ une homotopie entre $\alpha = h(0, \cdot)$ et l'application constante égale à x, $c_x = h(1, \cdot)$. Alors h factorise en une application continue
$$\bar{h} \colon Y \to X$$
où $Y := S^1 \times [0, 1]/S^1 \times \{1\}$. L'application $S^1 \times [0, 1] \to D^2$, $(e^{i\theta}, t) \mapsto (1-t)e^{i\theta}$ factorise en un homéomorphisme φ de Y vers le disque D^2, qui est l'identité sur $S^1 \times \{1\}$. L'application $\bar{h} \circ \varphi$ est une application $D^2 \to X$, comme désirée. □

Proposition 5.5.3 *Soit X un espace connexe par arcs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *X est simplement connexe ;*

(b) *toute application continue du cercle S^1 dans X se prolonge continuement à une application du disque D^2 dans X ;*

(c) *Il existe $x \in X$ tel que $\pi_1(X, x) = 0$ (notation pour le groupe trivial) ;*

(d) *$\pi_1(X, x) = 0$ pour tout $x \in X$;*

(e) *deux chemins de même origine et même extrémité sont homotopes (relativement aux extrémités).*

Preuve. Voir TD. □

Proposition 5.5.4 *Soient X un espace topologique, U et V deux ouverts connexes par arcs de X, tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ soit connexe par arcs. Notons $i_U : U \to X$ et $i_V : V \to X$ les inclusions. Alors pour tout x dans $U \cap V$, l'ensemble $(i_U)_*(\pi_1(U, x)) \cup (i_V)_*(\pi_1(V, x))$ engendre $\pi_1(X, x)$. En particulier, si U et V sont de plus simplement connexes et d'intersection non vide, alors $\pi_1(X, x) = \{1\}$.*

Preuve. Soit α un lacet de X basé en x. Par compacité de $[0, 1]$ et continuité de α, il existe $n \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\alpha([i, i + 1])$ soit contenu dans U ou dans V pour tout $i = 0, \ldots, n - 1$. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, soit c_i un chemin entre x et $\alpha(i/n)$, contenu dans U, V, $U \cap V$ si $\alpha(i)$ appartient à U, V, $U \cap V$ respectivement (un tel c_i existe, car U, V, $U \cap V$ sont connexes par arcs), avec c_0 et c_n constants. Notons α_i le chemin $t \mapsto \alpha((i + t)/n)$. Par les arguments utilisés dans la preuve de la proposition 5.3.2, le lacet α est homotope (à extrémités fixées) à

$$(\bar{c}_0 \cdot \alpha_0 \cdot c_1) \cdot (\bar{c}_1 \cdot \alpha_1 \cdot c_2) \cdot \ldots \cdot (\bar{c}_{n-2} \cdot \alpha_{n-2} \cdot c_{n-1}) \cdot (\bar{c}_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} \cdot c_n).$$

Pour $i = 0, \ldots, n - 1$ le chemin $\bar{c}_i \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ est un lacet basé en x et contenu dans U ou dans V. Donc $(i_U)_*(\pi_1(U, x)) \cup (i_V)_*(\pi_1(V, x))$ engendre $\pi_1(X, x)$.

Pour la dernière assertion, notons que si $U \cap V$ est non vide, alors X est connexe par arcs. Si U et V sont simplement connexes, alors chaque lacet $\bar{c}_i \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ est homotope au lacet constant en x. Donc α est homotope au lacet constant en x. Ceci montre bien que $\pi_1(X, x) = \{1\}$. □

Ce résultat admet le raffinement suivant, qui est l'outil le plus important pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique. Nous admettrons la preuve, pour laquelle on renvoie aux références [Pau], sections 4.1 et 4.2, ou [Hat], pp 40–46.

Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 5.5.4. Les groupes $\pi_1(U, x))$ et $\pi_1(V, x)$ s'injectent naturellement dans leur *produit libre* $\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$, et les morphismes $(i_U)_*$ et $(i_V)_*$ se prolongent naturellement et de manière unique en un morphisme de groupes

$$\Phi\colon \pi_1(U, x)) * \pi_1(V, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

tel que $\Phi([\alpha]) = (i_U)_*([\alpha])$ (resp. $(i_V)_*([\alpha])$) pour $[\alpha] \in \pi_1(U,x)$ (resp. $[\alpha] \in \pi_1(V,x)$). La proposition 5.5.4 implique que Φ est surjectif. Notons

$$(i_{UV})_*\colon \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(U,x)\ ,\ (i_{VU})_*\colon \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(V,x)$$

les morphismes induits par les inclusions. Clairement, regarder un lacet dans $U\cap V$ comme un lacet dans X à travers les inclusions $U\cap V \subset U \subset X$ ou $U \cap V \subset V \subset X$ est la même chose, donc on a

$$(i_U)_* \circ (i_{UV})_* = (i_V)_* \circ (i_{VU})_*,$$

et donc

$$\Phi((i_{UV})_*([w])) = \Phi((i_{VU})_*([w]))$$

pour toute classe $[w] \in \pi_1(U\cap V,x)$. Ceci montre que le noyau de Φ contient les éléments de la forme $(i_{UV})_*([w])(i_{VU})_*([w])^{-1} \in \pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$. En fait :

Théorème 5.5.5 (Théorème de Seifert-Van-Kampen) *On garde les hypothèses de la proposition 5.5.4. Le noyau de Φ est le sous-groupe distingué N du produit libre $\pi_1(U,x)*\pi_1(V,x)$ engendré par les éléments de la forme $(i_{UV})_*([w])(i_{VU})_*([w])^{-1}$, pour $[w] \in \pi_1(U\cap V,x)$. Donc Φ factorise en un isomorphisme*

$$\bar{\Phi}\colon (\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x))/N \longrightarrow \pi_1(X,x).$$

Proposition 5.5.6 *Pour tout $n \geq 2$ la sphère S^n est simplement connexe.*

Preuve. Pour tout $n \geq 2$ la sphère S^n est la réunion de l'ouvert U complémentaire du pôle nord, et de l'ouvert V complémentaire du pôle sud. Les ouverts U, V sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ par projection stéréographique, donc simplement connexes (Corollaire 5.3.8 et Lemme 5.5.1). L'intersection $U\cap V$ se rétracte par déformation forte sur l'équateur S^{n-1}, qui est connexe par arcs si $n \geq 2$. La conclusion vient alors de la proposition 5.5.4. $\square$

On considère maintenant le cas du cercle. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ posons

$$\begin{array}{rccc} \omega_n : & [0,1] & \longrightarrow & S^1 \subset \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i n t}, \end{array}$$

que l'on regarde comme un lacet basé au point 1.

Théorème 5.5.7 *L'application $f\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1,1)$, $n \mapsto [\omega_n]$ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Considérons les applications

$$\begin{array}{rccc} p_{\exp} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \tilde{\omega}_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & nt. \end{array}$$

On a $\omega_n = p_{\exp} \circ \tilde{\omega}_n$, et $\tilde{\omega}_n$ est un chemin dans $\mathbb{R}$ entre 0 et n. Pour tout entier m notons aussi $\tau_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la translation par m ; donc $\tau_m \circ \tilde{\omega}_n$ est le chemin $t \mapsto m + nt$

dans $\mathbb{R}$, joignant m et $m+n$. Maintenant, deux chemins quelconques γ, γ' de $\mathbb{R}$ ayant même extrémités sont homotopes (à extrémités fixées) : une homotopie est obtenue par combinaison convexe, $(s,t) \mapsto s\gamma(t) + (1-s)\gamma'(t)$. En particulier, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ les chemins $\tilde{\omega}_{m+n}$ et $\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ sont homotopes, donc on a

$$\begin{aligned} f(m+n) &\stackrel{\text{def}}{=} [p_{\exp} \circ \tilde{w}_{m+n}] \\ &= [p_{\exp} \circ (\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n))] \\ &= [\omega_m \cdot \omega_n] = f(m) \cdot f(n). \end{aligned}$$

Ceci montre que f est un morphisme de groupes. Pour montre qu'il est injectif et surjectif, on va utiliser les deux faits suivants :

(*a*) Si $f : [0,1] \to S^1$ est une application continue, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi t_0} = f(0)$ il existe une et une seule application continue $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(0) = t_0$ et $f(t) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$.

(*b*) Si $h : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ est une application continue, et si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue telle que $h(0,t) = e^{2i\pi f(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$, alors il existe une et une seule application continue $\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{h}(0,t) = f(t)$ et $h(s,t) = e^{2i\pi \tilde{h}(s,t)}$ pour tous $s, t \in [0,1]$.

Ces deux faits sont des cas particuliers du théorème 5.2.4. Le point (*a*) garantit que tout lacet γ dans S^1 basé en 1 est l'image par $p_{\exp}$ d'un unique chemin $\tilde{\gamma}$ dans $\mathbb{R}$ d'origine 0 ; puisque $\gamma(1) = \gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = (p_{\exp} \circ \tilde{\gamma})(1)$, nécessairement $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. Notons

$$n := \tilde{\gamma}(1).$$

Par l'unicité de $\tilde{\gamma}$, cet entier est uniquement déterminé par γ. Maintenant, le point (*b*) garantit que la classe $[\gamma]$ dans $\pi_1(S^1)$ est l'image par $p_{\exp}$ d'une classe d'homotopie bien déterminée de chemins homotopes à $\tilde{\gamma}$, joignant 0 à n. Comme nous l'avons vu plus haut, cette classe contient $\tilde{\omega}_n$. Donc

$$[\gamma] = [p_{\exp} \circ \tilde{\omega}_n] = f(n),$$

ce qui prouve la surjectivité de f. Si $f(m) = f(n)$, alors $\tilde{\omega}_m$ et $\tilde{\omega}_n$ sont dans la même classe d'homotopie de chemins à extrémités fixées, donc $m = n$. □

Notons que l'inverse de l'isomorphisme $f\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ est

$$\begin{array}{rccl} g : & \pi_1(S^1,1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0), \end{array}$$

où $\tilde{\gamma}$ est le chemin qui relève dans $\mathbb{R}$ le lacet γ, et qui a 0 pour origine. On peut bien entendu remplacer le point base 1 par un point $x \in S^1$ quelconque ; alors, d'après (*a*) dans la preuve, ayant fixé un point $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tel que $p_{\exp}(\tilde{x}) = x$, pour tout lacet dans S^1 basé en x il faut prendre pour $\tilde{\gamma}$ le relevé de γ d'origine $\tilde{x}$. On notera

$$g_x \colon \pi_1(S^1, x) \to \mathbb{Z}$$

l'isomorphisme obtenu.

Soient $f : S^1 \to S^1$ une application continue et x un point de S^1. Posons $y = f(x)$. La composition des morphismes de groupes

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{g_x^{-1}} \pi_1(S^1, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, y) \xrightarrow{g_y} \mathbb{Z} \tag{5.6}$$

est un morphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. C'est donc la multiplication par un entier n, qui ne dépend pas de x par ce qui précède. Ses propriétés, fondamentales, seront étudiées en TD.

Définition 5.5.8 *On note* $\deg(f) \in \mathbb{Z}$*, et on appelle degré de* f*, l'entier défini par le morphisme* (5.6)*.*

Soit maintenant X un graphe connexe fini ; on renvoie à [Pau] ou [Hat] pour une définition formelle des graphes (finis), et nous assumerons ici que cette notion toute intuitive est “claire et distincte”. On appelle *connectivité de* X le plus grand entier n tel qu'il existe des arêtes ouvertes $e_1, \ldots, e_n$ avec $X \setminus \cup_{i=1}^n e_i$ connexe. On appelle *caractéristique d'Euler de* X le nombre

$$\chi(X) = n_0 - n_1$$

avec n_0 le nombre de sommets de X et n_1 le nombre d'arêtes de X.

Proposition 5.5.9 *Pour tout graphe connexe fini* X *on a* $c(X) = 1 - \chi(X)$*, et* $\pi_1(X)$ *est un groupe libre de rang* $c(X)$*.*

Preuve. Si $\bar{e}$ est une arête fermée (ie. avec ses extrémités) dont les extrémités sont distinctes dans X, il existe une homéomorphisme

$$h_e \colon [0, 1] \to \bar{e},$$

et alors l'application $(s, t) \mapsto h_e(st + (1 - s))$ est une homotopie entre l'application constante de valeur l'extrémité $h_e(1)$, et l'application h_e. Donc $r \colon \bar{e} \to h_e(1)$ définie par $r(h_e(t)) = h_e(1)$ pour tout $t \in [0, 1]$, est une rétraction forte de $\bar{e}$ sur $h_e(1)$. Il s'ensuit que $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au groupe fondamental de l'espace obtenu en rétractant $\bar{e}$ sur l'une quelconque de ses extrémités (Corollaire 5.4.5). En procédant de la sorte pour chaque arête fermée d'extrémités distinctes dans X, on obtient que $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un bouquet de cercles, et on peut donc supposer que X lui-même est un bouquet de cercles :

$$X = \vee_{i=1}^n S_i^1 := \left(\coprod_{i=1}^n S_i^1 \right) / (\{1\}_i \sim \{1\}_j, \ \forall i, j). \tag{5.7}$$

Dans cette situation X a un unique sommet x, et ses n arêtes fermées $\bar{e}_i$ forment les cercles du bouquet. Si $X = \{x\}$ (cas où au départ de la preuve, X était un *arbre*), alors $\pi_1(X)$ est trivial (et donc libre). Si $X \neq \{x\}$, soit $C \subset X$ l'un des cercles du bouquet. On a $\pi_1(C, x) \cong \mathbb{Z}$ par le le théorème 5.5.7. Soit U un “petit” voisinage ouvert connexe de C dans X, union de C et d'un voisinage ouvert W de x homéomorphe au bouquet d'intervalles

$$\left(\coprod_{i=1}^{2n}[0,\epsilon[_i\right)/(\{0\}_i \sim \{0\}_j,\ \forall i,j)$$

où $\epsilon > 0$ est petit. Prenos aussi $V = (X \setminus \{e_i\}) \cup W$. Alors $U \cap V = W$, les ouverts U, V et $U \cap V$ sont connexes par arcs, et $U \cap V$ se rétract par déformation (forte) sur x, donc est simplement connexe. Alors le théorème de Van Kampen 5.5.5 implique

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X \setminus \{e_i\}, x) * \mathbb{Z}.$$

Comme X est fini, par récurrence on obtient que $\pi_1(X,x)$ est un groupe libre. Le nombre de générateurs est clairement l'entier n dans le bouquet de cercles (5.7). Dans cette situation toujours, on voit que $n = c(X)$, la connectivité de X, et la formule $c(X) = 1 - \chi(X)$ est immédiate. Enfin, si l'on remonte la procédure de rétraction de X le long de ses arêtes fermées d'extrémités distinctes, décrite en début de preuve, on voit que $c(X)$ et $\chi(X)$ restent constants, et ceci conclut la preuve. $\square$

Corollaire 5.5.10 *La caractéristique d'Euler est un invariant topologique, et même du type d'homotopie, d'un graphe connexe fini.*

5.6 $(*)$ Le théorème de monodromie

`Compléter`

Bibliographie

[Cas] P. Castillon, *Analyse complexe*, cours de 3ème année de Licence de Mathématiques, Université de Montpellier (2022)

[Dieu] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann éd., seconde édition (1992)

[DeM] F. De Marçay, *Analyse complexe*, Université Paris-Sud

[Hat]]A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)

[Hul] D. Hulin, *Fonctions holomorphes*, L3 MFA, Université Paris-Sud (2013-2014)

[Pau] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Cours de 1ère année de mastère, ENS Ulm (2009-2010)