Master 1 Mathématiques **Université de Montpellier**
Analyse Fonctionnelle HMMA113
Année universitaire 2015-2016

Examen Terminal, 1ère session
Vendredi 15 janvier, 3h

CORRIGE

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel normé réel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

1. *Il existe $f \in E'$ de norme 1 telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
2. *Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ on a $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n \leq \|\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\|$.*

$1 \Rightarrow 2$: comme f est linéaire et continue, pour tout x dans E on a $|f(x)| \leq \|f\|_{E'}\|x\|$; en appliquant cette inégalité à $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ et $\|f\|_{E'} = 1$, on trouve 2.
$2 \Rightarrow 1$: Soit f la forme linéaire définie sur le sous-espace $Vect\{x_1, \ldots, x_n\}$ par $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. L'inégalité donnée montre que f est continue de norme 1. D'après le théorème de Hahn-Banach, f possède un prolongement continu défini sur l'espace E tout entier, de même norme.

2. Soit (T_n) une suite d'endomorphismes continus d'un espace de Banach E telle que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ converge vers une limite notée $T(x)$.

1. *Montrer que $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty$.*
2. *En déduire que T est continu de norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

Comme pour tout x dans E la suite $(T_n(x))$ est convergente, elle est bornée. On se trouve sous les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus, dont la conclusion est exactement 1. Nous devons en déduire 2. Pour tout entier n et tout $x \in E$ on a $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|$. Donc $\|T_n(x)\| \leq \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|$, puis $\|T(x)\| \leq \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|$ en faisant tendre n vers l'infini dans le membre de gauche (celui de droite ne dépend plus de n). Comme l'application $T : x \mapsto T(x)$ est linéaire (on le sait, ou bien on le vérifie immédiatement), on en déduit que T est continu, et que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}$. En fait, on peut directement prendre la liminf des deux membres de l'inégalité $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|$/ On obtient $\|T(x)\| = \lim \|T_n(x)\| = \liminf_n \|T_n(x)\| \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|$. Ceci prouve $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 2 *Soient H un espace de Hilbert, et (x_n) une suite de H convergeant faiblement vers un élément x.*

1. Montrer que (x_n) est une suite bornée, et que $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ (on pourra utiliser l'exercice 1.2).

L'espace H est un Banach. Pour se ramener à l'exercice 1.2, on doit interpréter les éléments x_n comme des formes linéaires. Pour cela, on utilise le théorème de Riesz : l'application $\varphi : H \to H'$, $x \mapsto (x, \cdot)$, est une isométrie (où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de H). On considère alors la suite des formes linéaires continues $T_n = \varphi(x_n)$ et $T = \varphi(x)$. Pour tout point y de H, on a $T_n(y) = (x_n, y) = \overline{(y, x_n)} = \overline{\varphi(y)(x_n)}$ (la conjugaison complexe n'est pas nécessaire si les scalaires sont les réels). D'autre part, $\varphi(y)(x_n) \to \varphi(y)(x)$ lorsque $n \to \infty$, puisque $x_n \rightharpoonup x$ par hypothèse. Donc $T_n(y) \to T(y)$. Comme dans l'exercice 1.2 on déduit $\sup_n \|T_n\|_{H'} < \infty$. Avec l'égalité $\|x_n\| = \|T_n\|_{H'}$ (φ est une isométrie) ceci prouve que (x_n) est bornée. De même $\|T\|_{H'} \leq \liminf_n \|T_n\|_{H'}$ équivaut à $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

2. Si de plus $\|x_n\| \to \|x\|$, vérifier que (x_n) converge vers x.

On a $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - (x, x_n) - \overline{(x, x_n)}$. La convergence faible $x_n \rightharpoonup x$ implique $(x, x_n) + \overline{(x, x_n)} \to 2\|x\|$, et l'hypothèse $\|x_n\| \to \|x\|$ donne la conclusion.

Exercice 3 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur défini par $Tg = f * g$.*

1. Montrer que T est continu.

C'est une reformulation d'un résultat du cours : on a $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

2. Soient g, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Justifier l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)\bar{h}(x)| dy dx \leq \|f\|_1 \|g\|_2 \|h\|_2.$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)\bar{h}(x)| dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy \right) |\bar{h}(x)| = (|f| * |g|)(x) |h(x)|.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)\bar{h}(x)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) |h(x)| dx.$$

Les fonctions $|f| * |g|$ et $|h|$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut donc appliquer Cauchy-Schwartz, puis la question 1. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)\bar{h}(x)| dy dx \leq \| \, |f| * |g| \, \|_2 \|h\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2 \|h\|_2.$$

3. Calculer T^* (on rappelle que $\langle Tg, h \rangle_2 = \langle g, T^* h \rangle_2$ pour tous g, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$).

La question précédente montre que la fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)\bar{h}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Fubini, on peut donc échanger l'ordre des intégrations

$dydx$ en $dxdy$ comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\langle Tg, h\rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right) \bar{h}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\bar{h}(x)dx \right) g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x-y)h(x)dx \right)} dy \\
&= \langle g, T^* h\rangle_2
\end{aligned}$$

où $(T^*h)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x-y)h(x)dx = (\tilde{f} * h)(y)$, avec $\tilde{f} : z \mapsto \bar{f}(-z)$.

Exercice 4 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\xi \mapsto \xi\hat{f}(\xi)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

1. Montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

On sait que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-a}^{a} |\hat{f}(\xi)|d\xi < +\infty$ pour tout $a > 0$. D'autre part $|\hat{f}(\xi)| \leq |\xi\hat{f}(\xi)|$ pour tout $|\xi| \geq 1$. Donc $\int_{-\infty}^{-1} |\hat{f}(\xi)|d\xi \leq \int_{-\infty}^{-1} |\xi\hat{f}(\xi)|d\xi < +\infty$, et de même $\int_{1}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|d\xi < +\infty$.

2. Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer la formule d'inversion de la transformée de Fourier. Pour presque tout point $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

D'après le cours, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x)$, et $\mathcal{F}(\hat{f})$ est continue. Donc $g := \mathcal{F}^{-1}(f)$ est continue.

3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

On sait que la fonction $\xi \mapsto \xi\hat{f}(\xi))$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. D'après le cours, on en déduit que $\mathcal{F}(\hat{f})$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alternativement, on peut aussi utiliser le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre (cf cours L3 ?).

Exercice 5 (7 points) *Le but de cet exercice est de montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.*

1. Montrer que l'image de $\mathcal{F}$ est dense (pour la topologie usuelle sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

D'après le cours, la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous-espace dense de $L^1(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bijective.

2. Montrer que si $\mathcal{F}$ était surjective, alors pour toute suite (f_n) de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\sup_n \|\hat{f}_n\|_\infty < +\infty$, on a $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$.

D'après le cours, $\mathcal{F}$ est linéaire, injective et continue. Supposons qu'elle soit surjective. Alors d'après le théorème de Banach, c'est un homéomorphisme. En particulier, l'application réciproque $\mathcal{F}^{-1}$ est continue, et il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_1 \leq C\|\hat{f}\|_\infty$ pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. Le résultat en découle.

3. Soient $h = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ et $g_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}$. Calculer $g_n * h$.

On a $(g_n * h)(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{1}_{[-n,n]}(x-y)dy$. Là on doit distinguer des cas pour déterminer, à x fixé, les $y \in [-1,1]$ tels que $x - y \in [-n,n]$:

$$g_n * h(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \in [-n+1, n-1] \\ 0 & si\ x \leq -n-1\ ou\ x \geq n+1 \\ x+n+1 & si\ x \in [-n-1, -n+1] \\ -x+n+1 & si\ x \in [n-1, n+1] \end{cases}$$

Les deux derniers cas sont respectivement les longueurs des intervalles $[-n-1, x]$ et $[x, n+1]$; ils s'obtiennent en remarquant qu'on doit obtenir une fonction affine sur chaque intervalle (ie. de la forme $x \mapsto ax+b$, puisqu'on intègre une constante), valant 0 en $-n-1$ et $n+1$, et 2 en $-n+1$ et $n-1$.

4. Montrer que $g_n * h$ est la transformée de Fourier d'une fonction que l'on déterminera.

On a vu en cours que $\hat{\mathbf{1}}_{[-a,a]}(\xi) = \sqrt{2}\sin(a\xi)/\sqrt{\pi}\xi$, et que $\widehat{g_n * h}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. Donc $\widehat{g_n * h}(\xi) = 2\sqrt{2}\sin(\xi)\sin(n\xi)/\sqrt{\pi}\xi^2$. La fonction $f_n \colon x \mapsto \sin(x)\sin(nx)/x^2$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ (elle est continue sur tout segment $[-a,a]$ par prolongement continu en 0, et on peut appliquer le critère de Riemann sur les intervalles $]-\infty, -a]$ et $[a, +\infty[$), donc par la formule d'inversion on a presque partout

$$g_n * h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}^{-1}(f_n) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(f_n)$$

puisque $\mathcal{F}^{-1}(f_n)(x) = \mathcal{F}(f_n)(-x) = \mathcal{F}(f_n)(x)$. Cette égalité vaut en fait en tout point, puisque $g_n * h$ est continue.

5. On pose $f_n(x) = \sin(nx)\sin(x)/x^2$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1$, puis conclure (on rappelle que $\sin(t) \geq 2t/\pi$ pour $t \in [0, \pi/2]$, et que $|\sin(u)/u|$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$).

En appliquant l'indication on obtient la majoration (avec le changement de variable $u := nx$) :

$$\|f_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(nx)}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| du.$$

On sait que le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$. D'après la question 4 on a $\|\hat{f}_n\|_\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\|g_n * h\|_\infty$ et $\|g_n * h\|_\infty = 2$. On déduit de la question 2 que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.