Master 1 Mathématiques | **Université de Montpellier**
Analyse Fonctionnelle HMMA113 | **Année universitaire 2016-2017**

Examen, 1ère session
Mercredi 11 janvier, durée 3h

CORRIGE

L'exercice 1 est extrait d'un sujet disponible sur la page :
https://webusers.imj-prg.fr/∼bernard.maurey/thsexams/index.html

Les exercices 4 et 5 sont extraits du site http://www.bibmath.net/ressources.

Exercice 1 *Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$. On note $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur K, muni de la norme uniforme, et E l'adhérence dans $C(K)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, où $n \in \mathbb{N}$, également muni de la norme uniforme. On note i_K la fonction définie sur K par $i_K(z) = z$ pour tout $z \in K$.*

1. *Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in E$ la fonction produit fg est dans E. Vérifier que l'application $T\colon f \mapsto i_K f$ est linéaire et continue de E dans E.*

Solution. L'espace vectoriel E_0 engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$ est l'espace des fonctions polynomiales sur K. Si $f(z) = P(z)$ et $g(z) = Q(z)$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, alors fg est la fonction polynomiale provenant du polynôme PQ, donc $fg \in E_0 \subset E$. Pour le cas général il faut passer à la limite uniforme sur K : supposons que $f = \lim_n f_n$ et $g = \lim_n g_n$ avec $(f_n), (g_n) \in E_0^{\mathbb{N}}$, alors $f_n g_n \in E_0$ d'après la remarque précédente, et $f_n g_n$ tend uniformément sur K vers fg, donc $fg \in E$. Pour justifier la convergence uniforme, on écrit

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty = \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_\infty \le C\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \to 0$$

où on a utilisé le fait que la suite uniformément convergente (g_n) doit être bornée en norme par un certaine constante C. Il est clair que $i_K(\lambda f + \mu g) = \lambda(i_K f) + \mu(i_K g)$ pour toutes fonctions $f, g \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, donc l'application $f \mapsto i_K f$ est linéaire. La fonction i_K est la fonction $z \mapsto z^n$ pour $n = 1$, donc elle est dans E par définition; on sait d'après ce qui précède que $i_K f \in E$ pour toute $f \in E$. De plus, si $M = \max\{|z|, z \in K\}$ (qui existe parce que K est compact), on aura

$$\forall z \in K, |(i_K f)(z)| = |z||f(z)| \le M\|f\|_\infty$$

ce qui montre que l'application linéaire $E \to E$, $f \mapsto i_K f$, est continue pour la norme uniforme.

2. *On suppose que $0 \notin K$.*

(a) *Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que $|z| \geq \delta$ pour tout $z \in K$, puis montrer que $\|T(f)\| \geq \delta \|f\|$ pour tout $f \in E$.*

Solution. L'ensemble K est compact et $0 \notin K$, donc $\delta := \inf\{\|z\|, z \in K\} > 0$ convient. Soit $f \in E$ quelconque; choisissons $z_0 \in K$ tel que $\|f|_\infty = |f(z_0)|$ (z_0 existe, puisque f est continue sur K compact); on a

$$\|T(f)\|_\infty \geq |(Tf)(z_0)| = |z_0||f(z_0)| \geq \delta |f(z_0)| = \delta \|f\|_\infty.$$

(b) *Montrer que $T(E)$ est fermé.*

Solution. Si (Tf_n) converge vers $y \in E$, nous devons montrer que y est dans $T(E)$; la suite (Tf_n) est de Cauchy; la relation $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \delta^{-1} \|Tf_m - Tf_n\|_\infty$ vue en (a) montre que (f_n) est également de Cauchy; puisque E est complet, la suite (f_n) converge vers une fonction $f \in E$. Puisque T est continue, la suite (Tf_n) converge vers Tf, donc $y = Tf$ et on a montré que $T(E)$ est fermé.

(c) *Montrer que T est un endomorphisme inversible de E si et seulement si la fonction constante sur K égale à 1 est dans l'image $T(E)$.*

Solution. Si $Tf = 0_E$, alors $\|f\|_\infty \leq \delta^{-1} \|Tf\|_\infty$ montre que $f = 0_E$, donc T est injectif. Désignons par 1 la fonction constante sur K, égale à 1 en tout point. S'il existe $g \in E$ telle que $1 = T(g) = i_K g$, alors pour toute $f \in E$ on aura $T(gf) = i_K(gf) = (i_K g)f = f$, et aussi $gT(f) = g(i_K f) = f$, ce qui montre que l'application linéaire continue $f \mapsto gf$ est l'inverse de T dans $\mathcal{L}(E)$. Inversement, si T est inversible on a $T(E) = E$ et la fonction 1, qui est dans E (c'est la fonction $z \mapsto z^0$), doit être dans l'image $T(E)$.

3. *On suppose que $0 \notin K$ et que K contient le cercle de rayon $r > 0$ centré en 0. Montrer que $\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta = 0$ pour toute fonction $g \in T(E)$. En déduire que T n'est pas surjectif, et que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'est pas dans E.*

Solution. Supposons d'abord que $f(z) = z^n$, avec $n \geq 0$ et posons $g = T(f)$; on a $g(z) = z^{n+1}$ pour tout $z \in K$, en particulier quand $z = re^{i\theta}$, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, donc

$$\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = r^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Par linéarité, le même résultat est valable pour toute $f \in E_0$, puis par continuité, pour toute $f \in E$: en effet, la forme linéaire $f \mapsto \int_0^{2\pi} (Tf)(re^{i\theta}) d\theta$ est continue sur E, de norme $\leq 2\pi \|T\|$; puisqu'elle est nulle sur le sous-espace dense E_0, elle est nulle aussi sur E. On a donc bien montré que $\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta = 0$ pour toute $g \in T(E)$.

Si on prend $g = 1$, on a $\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi \neq 0$, donc 1 n'est pas dans l'image $T(E)$, donc T n'est pas surjectif ; si la fonction $h(z) = 1/z$ était dans E, son image $T(h)$ serait la fonction 1, ce qui n'est pas possible d'après ce qu'on vient de dire.

Exercice 2 *Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique réelle, et $l^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert réel des suites numériques réelles $(x_n)_{n \geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. En utilisant un théorème du cours, montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ converge pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$, alors $(a_n)_{n \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$.*

Solution. Il s'agit de l'exercice 4 de la feuille 3 de TD, dans le cas où $p = 2$.

Exercice 3 *Soit X un espace de Banach.*

1. *Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée de X telle que $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ pour tout f dans un ensemble D dense de X', alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x faiblement.*

Solution. On doit montrer que pour toute $f \in X'$ la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans le corps des scalaires. Soient donc $f \in X'$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ quelconques et $g \in D$ telle que $\|f-g\| < \delta$. Pout tout $n \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}|f(x_n)-f(x)| &\leq |f(x_n)-g(x_n)| + |g(x_n)-g(x)| + |g(x)-f(x)| \\ &\leq \|f-g\|\|x_n\| + |g(x_n)-g(x)| + \|g-f\|\|x\|.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \geq 0$, et $N_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $|g(x_n)-g(x)| \leq \delta$ pour tout $n \geq N_\delta$. Sous cette dernière condition on a donc $|f(x_n)-f(x)| \leq \delta(M+1+\|x\|)$. Prenant $\delta \leq \varepsilon/(M+1+\|x\|)$ et $n \geq N_\delta$ on obtient $|f(x_n)-f(x)| \leq \varepsilon$. Puisque ε est quelconque, on a bien montré que $\lim_n f(x_n) = f(x)$.

2. *Montrer que si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée de X' telle que $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ pour tout x dans un ensemble D dense de X, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f $*$-faiblement.*

Solution. On doit montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans le corps des scalaires. On peut procéder de manière analogue à la question 1.

3. *On considère $X = L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1;+\infty[$. On introduit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact telle que $\|f\|_p = 1$, et on pose $f_n(x) = e^{inx}f(x)$.*

(a) *Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 dans X.*

D'après la question 1, il suffit de vérifier que $(\lambda(f_n))_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour tout λ dans un ensemble D dense de $X' = (L^p(\mathbb{R}))'$. L'exposant conjugué de p est $q \in]1;+\infty[$. Dans ce cas, d'après le cours, l'application $\varphi\colon L^q(\mathbb{R}) \to (L^p(\mathbb{R}))'$, $g \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$, est une isométrie (*théorème de Riesz*). De plus, le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact est dense dans $L^q(\mathbb{R})$ (*théorème de densité par régularisation*). On peut donc prendre $D = \varphi(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}))$, et il suffit alors de montrer que pour tout $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{int}g(t)f(t)dt \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ceci vient immédiatement en intégrant par parties sur un segment $[-A, A]$ avec $A > 0$: le terme $[e^{int}g(t)f(t)/in]_{-A}^{A}$ s'annule pour A assez grand (car f et g sont à support compact), et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{int}/in)(gf)'(t)dt$ existe pour tout $A > 0$ et sa limite lorsque $A \to +\infty$ est majorée en module par M/n pour un certain $M > 0$ (même raison, plus la continuité de $(gf)'$).

(b) *En déduire un exemple sur $X = L^2(\mathbb{R})$ de suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant faiblement dans X et $(f_n)_{n\geq 0}$ convergeant $*$-faiblement dans X' telles que $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas.*

Solution. Posons $g_n(x) = 0$ si n est pair, et $g_n(x) = \overline{f_n(x)} = e^{-inx}\overline{f(x)}$ si n est impair (où $^-$ désigne la conjugaison complexe), puis $\lambda_n = \varphi(g_n)$. Le même argument qu'en (a) implique que la suite $(\lambda_n(h))_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour toute $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Puisque φ est une isométrie, $\|\lambda_n\|_{(L^2(\mathbb{R}))'} = \|g_n\|_2$, qui est égal à 0 si n est pair, et à $\|f\|_2 = 1$ si n est impair. La suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est donc bornée dans $(L^2(\mathbb{R}))'$, et on peut appliquer le résultat de la question 2 (encore une fois, par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$) : $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers $0_{(L^2(\mathbb{R}))'}$. On a vu en (a) que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$. Enfin, $\lambda_n(f_n) = 0$ si n est pair, et si n est impair on a

$$\lambda_n(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-int}\overline{f(t)})(e^{int} f(t))dt = \|f\|_2 = 1.$$

La suite $(\lambda_n(f_n))_{n\geq 0}$ prend donc alternativement les valeurs 0 et 1 : c'est un exemple tel que le demande l'énoncé.

Exercice 4 *Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables qui sont solutions de l'équation*

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s)ds \tag{1}$$

où β est un réel strictement positif.

1. *On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de f.*
2. *Écrire l'équation (1) sous une forme faisant intervenir un produit de convolution.*
3. *On suppose que l'équation admet une solution. Déterminer $\hat{u}$. En déduire que $\beta \in]0, 1/2[$.*
4. *Réciproquement, on suppose $\beta \in]0, 1/2[$. Démontrer que l'équation admet une unique solution, et la déterminer.*

Solution. Voir le corrigé de l'exercice 7 de la page “transformée de Fourier” du site http://www.bibmath.net/ressources.

Exercice 5 *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et à décroissance rapide. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|\varphi\|_2 = 1$, et $\hat{\varphi}$ sa transformée de Fourier.*

1. *Rappeler l'énoncé du théorème de Plancherel.*
2. *Montrer que $2\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi'(t)\varphi(t)dt = -1$.*
3. *En déduire que*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\varphi(t)|^2 dt\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}.$$

   Dans quels cas a-t-on égalité ?

Solution. Voir le corrigé de l'exercice 22 de la page “transformée de Fourier” du site http://www.bibmath.net/ressources.