HLMA 302 - Analyse 3

2016-2017

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Université Montpellier

Notes rédigées par Térence Bayen
(tbayen@math.univ-montp2.fr)

Table des matières

Ce cours d'analyse 3 constitue la suite du cours d'analyse 2 en L1. Il a démarré en 2014 sur la base du LMD4 et intègre quelques notions nouvelles par rapport au cours d'analyse 3 avant le LMD4 (notamment le concept de fonctions Riemann intégrables et les familles sommables). Le poly ne dispense pas de cours qui détaillera certains points et donnera certains exemples supplémentaires. Tout commentaire ou toute remarque sur le polycopié est le bienvenue.

Ce poly est basé entre autres sur les références suivantes [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Je remercie Lionel Thibault et Florent Nacry pour des suggestions et conseils.

Important. Le cours comporte les quatre chapitres suivants :
- Chapitre 1 : Intégrale de Riemann
- Chapitre 2 : Intégrales généralisées
- Chapitre 3 : Séries numériques
- Chapitre 4 : Ensembles dénombrables et familles sommables

Dans le chapitre 4 qui sera traité en fonction du temps imparti, on insistera essentiellement sur la notion de famille sommable pour les séries doubles. Il en est de même de certaines notions moins essentielles comme la commutative convergence.

Quelques Notations.
- La notation := est parfois utilisée dans le document afin notamment de définir “rapidement” une expression mathématique. Par exemple l'expression suivante $H_i := \sum_{1\leq i\leq n} \frac{1}{i}$ permet de définir H_i comme la somme des n premiers termes de la série harmonique.
- La notation “resp.” signifie respectivement et est utilisée pour raccourcir les notations lorsque deux cas se présentent.
- L'abréviation “ssi" signifie si et seulement si.

1 Rappels sur les relations de comparaison et les développements limités

Cette section fournit quelques rappels sur les notations de Landau et la notion de développement limité. Elle est fondamentale dans toute la suite du cours HLMA302 (chapitre sur les intégrales, sur les séries...).

1.1 Domination, prépondérance

Dans cette section, si cela n'est pas précisé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On dit que V est un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$.*

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$.

Définition 1.2. *(i) On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 et on note $f = O(g)$ si et seulement si il existe un réel $K \geq 0$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq K|g(x)|$.*

(ii) On dit que g est prépondérante devant f (ou que f est négligeable devant g) au voisinage de x_0 et on note $f = o(g)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$.

Dans la suite, il arrive par soucis de commodité que l'on utilise la notation $f = o(g)$ et $f = O(g)$ sans repréciser que l'égalité a lieu au voisinage du point x_0. Les remarques suivantes sont à vérifier en exercice.

Remarque 1.1. *(i) Si $f = o(g)$ alors $f = O(g)$. Si $f = O(1)$, resp. $f = o(1)$, alors f est bornée au voisinage de x_0, resp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

(ii) On vérifie sans difficulté que $f = o(g)$ au voisinage de x_0 équivaut à l'existence d'une fonction θ à valeur réelle, définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)\theta(x)$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

Proposition 1.1. *Soit $f_1, f_2, \varphi, \psi, g, h : I \to \mathbb{R}$ six fonctions, $x_0 \in I$ et α, β deux réels.*
(i) Si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 = O(g)$.

(ii) Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 = o(g)$.

(iii) On a les trois implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \varphi = O(\psi) & \text{et} \quad f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = O(\psi g) \\ \varphi = o(\psi) & \text{et} \quad f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g) \\ \varphi = O(\psi) & \text{et} \quad f = o(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g). \end{array}$$

(iv) On a les trois implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} f = O(g) & \text{et} \quad g = O(h) & \Rightarrow f = O(h) \\ f = O(g) & \text{et} \quad g = o(h) & \Rightarrow f = o(h) \\ f = o(g) & \text{et} \quad g = O(h) & \Rightarrow f = o(h). \end{array}$$

Démonstration. A faire en exercice. □

Remarque 1.2. *Plus généralement, on peut définir la notion o et O pour des fonction $f : I \to E$ où $E = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.*

1.2 Equivalence

Lemme 1.1. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. Alors, $f - g = o(g) \Rightarrow g = O(f)$.*

Démonstration. Il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|$. D'où pour $x \in V$:

$$|g(x)| = |g(x) - f(x) + f(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)| + |f(x)|.$$

Ainsi $|g(x)| \leq 2|f(x)|$ pour $x \in V$, d'où le résultat. □

Définition 1.3. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 et on note $f \sim g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.*

Remarque 1.3. *(i) On peut montrer grâce au lemme ci-dessous qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence appelée équivalence[1] des fonctions (au voisinage de x_0).*
(ii) On vérifie que $f \sim g$ équivaut à l'existence d'une fonction θ à valeurs réelles définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)(1 + \theta(x))$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque x tend vers x_0.

Proposition 1.2. *Soit $f, g, \varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions et $x_0 \in I$.*
(i) Si $f \sim g$ alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$.
(ii) Si $\varphi \sim \psi$ et $f \sim g$ alors $\varphi f \sim \psi g$.

Démonstration. On montre seulement (ii). On a $\varphi f - \psi g = (\varphi - \psi)f + \psi(f - g)$. De plus, $\varphi - \psi = o(\psi)$ et $f = O(g)$, d'où $(\varphi - \psi)f = o(\psi g)$. On a $f - g = o(g)$ d'où $\psi(f - g) = o(\psi g)$ et donc $\varphi f - \psi g = o(\psi g)$. □

La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication (cf proposition ci-dessus). Par contre, elle n'est pas compatible avec l'addition : soit $f_1(t) = 1 + t$ et $g_1(t) = 1 + t^2$, $f_2(t) = g_2(t) = -1$. Alors $f_1 \sim g_1$ en 0 et $f_2 = g_2$. Mais $f_1(t) + f_2(t) = t$ et $g_1(t) + g_2(t) = t^2$ et donc $f_1 + f_2$ n'est pas équivalente à $g_1 + g_2$ en 0.

Proposition 1.3. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$.*
(i) Si $f \sim g$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $f^n \sim g^n$.
(ii) Si $g > 0$ sur un voisinage de x_0, alors $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En utilisant la remarque 1.1 on a $f^\alpha - g^\alpha = g^\alpha((1 + \theta)^\alpha - 1) = o(g^\alpha)$. □

Notons que la relation d'équivalence est donc compatible avec les puissances entières ou réelles, mais elle n'est pas compatible avec l'exponentielle (prendre par exemple $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = x$ en $+\infty$). Cependant on a le résultat suivant (à faire en exercice) : soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

$$e^f \sim e^g \iff \lim(f - g) = 0.$$

1.3 Notion de développement limité

Définition 1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n si il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ $n + 1$ réels tels que au voisinage de x_0 on ait :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \tag{1.1}$$

1. Soit E un ensemble non vide. On dit qu'une relation binaire R sur E est une **relation d'équivalence** ssi elle est réflexive (i.e. $\forall\, x \in E,\, xRx$), transitive (i.e. $\forall\, x, y, z, \in E,\, xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$), et symétrique (i.e. $\forall\, x, y \in E,\, xRy \Rightarrow yRx$).

Par commodité on notera parfois $o((x-x_0)^n)$ sous la forme $o(x-x_0)^n$, i.e.

$$o((x-x_0)^n) = o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction à valeur réelle définie au voisinage de $x = x_0$ et telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

Remarque 1.4. *Dans la définition 1.4, l'égalité* (1.1) *se réécrit donc*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \tag{1.2}$$

où ε est une fonction à valeur réelle définie au voisinage de $x = x_0$ et telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. Il est très souvent commode d'écrire un développement limité sous la forme (1.2) *et en introduisant la fonction ε. Cette écriture servira notamment lors du chapitre sur les fonctions de plusieurs variables (voir le cours d'analyse 4).*

Proposition 1.4. *Si f admet un développement limité à l'ordre n, alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Supposons que f ait deux développements distincts :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Soit $p = \min\{k\ ;\ \alpha_k \neq \beta_k\}$. Alors, il vient $(\alpha_p - \beta_p)(x-x_0)^p = o(x-x_0)^p$ ce qui est absurde. □

Propriété 1.1. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors f est continue en x_0. Si $n \geq 1$, alors f est dérivable en x_0.*

Démonstration. Dans le premier cas, $f(x) = \alpha_0 + o(1)$ avec $\alpha_0 = f(x_0)$ et donc $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$. Dans le second cas $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + o(x-x_0)$, ainsi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet comme limite α_1 lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$, ce qui montre que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = \alpha_1$. □

Ceci ne s'étend pas à l'ordre supérieur. En effet, considérons

$$\begin{cases} f(t) := t^{17}\sin(\frac{1}{t^{17}}),\ t \neq 0, \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

On a $f(t) = o(t^{16})$ au voisinage de $t = 0$. De plus, on montre facilement que f est continue en $t = 0$ et que $f'(0) = 0$ (considérer un taux d'accroissement). Mais on a $f'(t) = 17t^{16}\sin(\frac{1}{t^{17}}) - \frac{1}{t}\cos(\frac{1}{t^{17}})$ pour $t \neq 0$. Donc f' n'est pas continue en 0. Donc f n'est pas deux fois dérivable.

Cependant par la formule de Taylor-Young on a le résultat suivant :

Propriété 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors f admet le développement limité suivant à l'ordre n :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

<u>Exemple d'application</u> : trouver le développement limité de cos en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.

1.4 Opérations sur les développements limités

Soit α, β deux réels. Si f et g admettent en x_0 des développements limités à l'ordre n, on notera parfois pour simplifier :

$$f(x) = P(x - x_0) + o(x - x_0)^n,\ g(x) = Q(x - x_0) + o(x - x_0)^n,$$

où P et Q sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Propriété 1.3. *(i) Si f et g admettent en x_0 des développements limités à l'ordre n, alors $\alpha f + \beta g$ admet en x_0 un développement limité à l'ordre n donné par $\alpha P(x - x_0) + \beta Q(x - x_0)$.*
(ii) Si f et g admettent en x_0 des développements limités à l'ordre n, alors fg admet un développement limité à l'ordre n en tronquant à l'ordre n le polynôme PQ.

Proposition 1.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable au point $x_0 \in I$ admettant en x_0 le développement limité $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$. Soit F une primitive[2] de f. Alors F admet en x_0 le développement limité suivant :*

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

Attention, on ne peut pas dériver un développement limité ! Pour les développements limités de quotient de fonctions ou le développement limité de la fonction inverse, on se reportera à la section exercice. De même pour le développement limité de la composée de deux fonctions.

1.5 Développements limités usuels en zéro

Les développements limités suivants au voisinage de **zéro** sont à savoir par coeur. Ils s'obtiennent par la formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions usuelles.

$$\begin{array}{rcl}
e^t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n) \\
\cos t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) \\
\sin t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) \\
\tan t & = & t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + o(t^8) \\
\cosh t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) \\
\sinh t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) \\
\tanh t & = & t - \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + o(t^8) \\
(1+t)^\alpha & = & 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} t^k + o(t^n) \\
\frac{1}{1-t} & = & \sum_{k=0}^{n} t^k + o(t^n) \\
\frac{1}{1+t} & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + o(t^n) \\
\ln(1+t) & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} + o(t^n)
\end{array}$$

Remarque 1.5. *(i) Noter qu'il n'y a pas de formule systématique pour le développement limité de* tan *et* tanh *mais il est bon de savoir les premiers termes du développement.*

2. On se reportera au chapitre suivant pour la définition d'une primitive.

(ii) Noter également que le développement limité de cos *peut aussi s'écrire :*

$$\cos t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + O(t^{2n+2}).$$

A partir des développements limités précédents, on peut chercher en exercice ceux des fonctions suivantes arctan, argtanh, arcsin, argsinh en 0.

2 Intégrale de Riemann

La définition de l'intégrale dans ce chapitre fait intervenir des applications f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ou bien plus généralement dans un espace vectoriel E. En première lecture, on raisonnera uniquement dans le cas de $\mathbb{R}$ i.e. $E = \mathbb{R}$ (de dimension 1) qui est plus simple à visualiser (et donc on remplacera partout la norme euclidienne $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, par la valeur absolue $|\cdot|$. Par ailleurs la notion de relation d'ordre (section 2.2) peut également être sautée en première lecture.

2.1 Notations et rappels

Dans toute ce chapitre, si cela n'est pas précisé, E désignera l'espace $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne (i.e. si $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$).

On rappelle tout d'abord la définition de borne supérieure et inférieure (on ne justifiera pas le résultat suivant).

Théorème-Définition 2.1. *(i) Toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ majorée admet un majorant plus petit que les autres appelé borne supérieure.*
(ii) Toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ minorée admet un minorant plus grand que les autres appelé borne inférieure.

En pratique on utilise la caractérisation suivante de la borne supérieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ majorée. Le réel β est la borne supérieure de A si et seulement si β est un majorant de A et :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in A \quad \beta - \varepsilon < a \leq \beta.$$

De même, on a la caractérisation suivante de la borne inférieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ minorée. Le réel α est la borne inférieure de A si et seulement si α est un minorant de A et :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \quad \alpha \leq a < \alpha + \varepsilon.$$

Etant donnée une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée, on note $\|f\|_\infty$ son supremum sur $[a, b]$:

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| = \sup\{|f(t)| \ ; \ t \in [a, b]\}.$$

Si f n'est pas bornée, on dit que son supremum est infini et on note $\|f\|_\infty = \infty$. Si f est à valeurs dans E, $\|f\|_\infty$ désigne alors la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

Attention à ne pas confondre la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ et la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur l'espace E. Enfin, on appellera souvent par abus fonction une application $f : I \to E$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (le terme fonction étant plutôt réservé aux applications à valeurs réelles).

2.2 Subdivisions et fonctions en escalier

Rappel sur les relations d'ordre. On commence par le rappel suivant.
Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire R sur E est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est réflexive (i.e. $\forall \ x \in E$, xRx), transitive (i.e. $\forall \ x, y, z, \in E \ xRy$ et $yRz \implies xRz$), et si elle est antisymétrique (i.e. $\forall \ x, y \in E$, xRy et $yRx \implies x = y$). On dit que cette relation est **totale** si deux éléments peuvent toujours être comparés (i.e. $\forall \ x, y \in E$ on a xRy ou yRx). Dans le cas contraire, on dit que cette relation est **partielle** :

- Si $E = \mathbb{R}$, la relation $\leq$ usuelle définit une relation d'ordre totale.

- Si E est un ensemble non vide, la relation $\subset$ définit une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.

Définition 2.1. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$; on appelle subdivision de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma := (a_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$. On appelle pas de la subdivision σ le nombre réel $\delta(\sigma) := \max_{1\leq i\leq n}(a_i - a_{i-1})$.*

On notera $Pt(\sigma) = \{a_i, \ ; \ 0 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des points de la subdivision et $S([a,b])$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $I = [a,b]$. On définit une **relation d'ordre partielle** sur $S(I)$ en disant que σ' est plus **fine** que σ si $Pt(\sigma) \subset Pt(\sigma')$ (voir ci-dessus pour un rappel sur les relations d'ordre). On a alors clairement $\delta(\sigma') \leq \delta(\sigma)$. On notera $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision définie par $Pt(\sigma \cup \sigma') = Pt(\sigma) \cup Pt(\sigma')$. Elle est plus fine que σ et σ'.

Exemple : Si $I = [a,b]$, on peut considérer pour chaque $n \geq 1$ la subdivision régulière associée aux points $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = 0, ...n$.

Définition 2.2. *On dit que $f : [a,b] \to E$ est une fonction en escalier (resp. affine par morceaux) si il existe une subdivision $\sigma := (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ que l'on dira adaptée à f, telle que f soit constante (resp. affine) sur chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$.*

Toute fonction affine par morceaux est bornée et toute fonction en escalier est affine par morceaux.

Définition 2.3. *On dit que $f : [a,b] \to E$ est une fonction de classe C^k par morceaux si il existe une subdivision $\sigma := (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ (que l'on dira adaptée à f) telle que pour chaque $1 \leq i \leq n$, il existe une fonction $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to E$ de classe C^k telle que pour tout $t \in]a_{i-1}, a_i[$, $f(t) = f_i(t)$. La fonction f_i est la restriction de f à l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, ce que l'on note souvent :*

$$f_i := f_{|_{[a_{i-1},a_i]}}.$$

Une fonction de classe C^k par morceaux n'est pas nécessairement continue (aux points $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ de la subdivision), mais est bornée (en utilisant le théorème de Weierstrass ou théorème des bornes [3] pour une fonction continue sur un segment).

Remarque 2.1. *Notons que l'ensemble des fonctions en escalier est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b], E)$, l'ensemble des applications bornées de $[a,b]$ dans E.*

2.3 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 2.4. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction en escalier et $\sigma := (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f, et soit α_i la constante telle que $f(t) = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in]a_{i-1}, a_i[$. Alors la somme*

$$\sum_{1\leq i\leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i$$

est indépendante du choix de σ et on la note

$$\int_a^b f.$$

On appelle cette quantité intégrale sur $[a,b]$ de la fonction en escalier f.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée sur $[a,b]$.

Justification. Montrons que l'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision adaptée à f. Soit σ' une subdivision adaptée à f telle que $Pt(\sigma') = Pt(\sigma) \cup \{c\}$. Alors, si $c \in]a_{k-1}, a_k[$, pour $1 \leq k \leq n$, la somme relative à σ' vaut :

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i \leq k-1} (a_i - a_{i-1})\alpha_i + (c - a_{k-1})\alpha_k + (a_k - c)\alpha_k + \sum_{k+1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq k-1} (a_i - a_{i-1})\alpha_i + (a_k - a_{k-1})\alpha_k + \sum_{k+1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i,
\end{aligned}$$

ce qui est encore la somme relative à σ. Une récurrence montre que si σ' est plus fine que σ (autrement dit si on a ajouté un nombre fini de points de σ), la somme relative à σ' est égale à celle relative à σ. Maintenant, si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à f, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est encore adaptée à f et elle est plus fine que σ et que σ'. La somme relative à σ' est donc égale à celle relative à $\sigma \cup \sigma'$ et donc à celle relative à σ. $\square$

L'intégrale des fonctions en escaliers vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 2.1. *(i) L'application $f \longmapsto \int_a^b f$ est linéaire de l'espace vectoriel des applications en escalier de $[a, b]$ dans E dans l'espace vectoriel E.*
(ii) Soit $u : E \to F$ (où F désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$) une application linéaire et $f : [a, b] \to E$ une application en escalier. Alors, $u \circ f : [a, b] \to F$ est en escalier et

$$\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right).$$

(iii) Si $f : [a, b] \to E$ est une application en escalier. Alors $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto \|f(t)\|$ est en escalier et

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$$

(iv) Si $f : [a, b] \to E$ est en escalier, alors $\| \int_a^b f\| \leq (b - a)\|f\|_\infty$.
(v) Si $c \in]a, b[$ et si $f : [a, b] \to E$ est en escalier, alors $f_{|_{[a,c]}}$ et $f_{|_{[c,b]}}$ sont en escalier et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration. Montrons (i). Soit α et β deux réels et f, g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. En prenant une subdivision adaptée à la fois à f et à g, on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})(\alpha\alpha_i + \beta g_i) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Si σ est adaptée à f elle est aussi adaptée à $u \circ f$ et à $\|f\|$ et on a

$$\int_a^b u \circ f = \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})u(\alpha_i) = u\left(\sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i\right) = u\left(\int_a^b f\right)$$

et par l'inégalité triangulaire

$$\| \int_a^b f\| = \| \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i\| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})\|\alpha_i\| = \int_a^b \|f\|,$$

ce qui montre (ii) et (iii). Pour montrer (iv), on écrit :

$$\|\int_a^b f\| = \| \sum_{1\leq \leq n} (a_i - a_{i-1})\alpha_i\| \leq \sum_{1\leq i\leq n} (a_i - a_{i-1})\|\alpha_i\| \leq \|f\|_\infty \sum_{1\leq i\leq n} (a_i - a_{i-1}) = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Pour montrer (v), on introduit une subdivision σ adaptée à f, et on lui rajoute éventuellement le point c pour obtenir encore une subdivision adaptée à f. On coupe alors la somme en deux au point c avec $c \in [a_{k-1}, a_k]$, $k \geq 1$:

$$\int_a^c f = \sum_{1\leq i\leq k-1} (a_i - a_{i-1})\alpha_i + (c - a_{k-1})\alpha_k, \quad \int_c^b f = \sum_{1\leq i\leq k-1} (a_i - a_{i-1})\alpha_i + (a_k - c)\alpha_k,$$

d'où le résultat en sommant. □

Remarque 2.2. *Dans le Théorème 2.1 (ii), on peut également prendre pour F un espace vectoriel normé de dimension quelconque.*

2.4 Fonctions Riemann intégrables

Définition 2.5. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est* **Riemann intégrable** *ou intégrable au sens de Riemann si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon : [a, b] \to E$ et $\psi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que :*

$$\|f - \phi_\varepsilon\| \leq \psi_\varepsilon \;\text{ et }\; \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

En particulier, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ et telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \;\text{ et }\; \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

On vérifiera cette dernière équivalence en exercice.

On note $\mathcal{R}_E([a, b])$ ou $\mathcal{R}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables définies sur $[a, b]$ à valeurs dans E. S'il n'y a pas d'ambiguité sur E, on peut aussi noter cet espace $\mathcal{R}([a, b])$. On a alors les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 2.1. *(i) Une fonction Riemann intégrable est bornée.*
(ii) Toute fonction en escalier est Riemann intégrable.

Démonstration. Pour (i), prendre $\varepsilon = 1$ et pour (ii), prendre $\phi_\varepsilon = f$ et $\psi_\varepsilon = 0$. □

Construction de l'intégrale de Riemann (dans le cas où $E = \mathbb{R}$). Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$. On prend $\varepsilon = 1/n$ et on appelle ϕ_n et ψ_n les deux suites de fonction données par la définition 2.5 et vérifiant :

$$|f - \phi_n| \leq \psi_n, \quad \int_a^b \psi_n \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons que la suite

$$\left(\int_a^b \phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $0 < p < q$ deux entiers. On a par l'inégalité triangulaire :

$$|\phi_p - \phi_q| \leq |f - \phi_p| + |f - \phi_q| \leq \psi_p + \psi_q.$$

D'où :

$$\left|\int_a^b \phi_p - \int_a^b \phi_q\right| = \left|\int_a^b (\phi_p - \phi_q)\right| \leq \int_a^b |\phi_p - \phi_q| \leq \int_a^b (\psi_p + \psi_q) \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq \frac{2}{p}.$$

et donc cette suite est bien de Cauchy [4], ainsi elle converge vers une limite ℓ finie. On vérifie maintenant que cette limite ℓ ne dépend pas des suites ϕ_n et ψ_n. Soit donc $(\phi_n,\, \psi_n)$ et $(\tilde{\phi}_n,\, \tilde{\psi}_n)$ deux couples de suite comme dans la définition 2.5. De même que ci-dessus, on a :

$$|\phi_n - \tilde{\phi}_n| \leq |f - \phi_n| + |f - \tilde{\phi}_n| \leq \psi_n + \tilde{\psi}_n.$$

D'où :

$$\left|\int_a^b \phi_n - \int_a^b \tilde{\phi}_n\right| = \left|\int_a^b (\phi_n - \tilde{\phi}_n)\right| \leq \int_a^b |\phi_n - \tilde{\phi}_n| \leq \int_a^b (\psi_n + \tilde{\psi}_n) \leq \frac{2}{n}.$$

Donc la limite ℓ ne dépend pas de la suite choisie (ϕ_n, ψ_n).

Remarque 2.3. *Dans le cas où $E = \mathbb{R}^m$, la démonstration est la même.*

Définition 2.6. *La limite commune aux suites $\left(\int_a^b \phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée*

$$\int_a^b f.$$

C'est l'intégrale - au sens de Riemann - de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et elle est également notée

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 2.4. *(i) Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable muette i.e. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$. Cette notation rappelle que que $f(t)dt$ représente l'aire d'un rectangle infinitésimal sous le graphe de la courbe f (voir la section sur les sommes de Riemann).*
(ii) Etant donnée une application $f : X \times [a, b] \to E$ où X est un ensemble fixé, la notation

$$\int_a^b f(x,t)dt \quad \text{avec } x \in X,$$

s'avère bien commode pour manipuler les intégrales à paramètre.

L'intégrale au sens de Riemann vérifie des propriétés analogues à celles énoncées dans le théorème 2.1 pour les fonctions en escalier.

Théorème 2.2. *(i) L'ensemble des applications Riemann intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, alors pour tout couple de réels α, β on a :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

(ii) Soit $u : E \to F$ (où $F = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$) une application linéaire continue et $f : [a, b] \to E$ une fonction Riemann intégrable. Alors, $u \circ f : [a, b] \to F$ est Riemann intégrable et on a :

$$\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right).$$

4. Une suite réelle (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\; q > p \geq N \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

(iii) Soit $f : [a, b] \to E$ une application Riemann intégrable. Alors $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto \|f(t)\|$ est Riemann intégrable et on a :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$$

(iv) Si $c \in]a, b[$ et si $f : [a, b] \to E$ est Riemann intégrable, alors $f_{|_{[a,c]}}$ et $f_{|_{[c,b]}}$ sont Rieman intégrables et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration. Soit f, g deux fonction Riemann intégrables sur $[a, b]$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $(\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ et $(\tilde{\phi}_\varepsilon, \tilde{\psi}_\varepsilon)$ deux couples de fonctions en escaliers tels que :

$$|f - \phi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon, \ \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon, \ |g - \tilde{\phi}_\varepsilon| \leq \tilde{\psi}_\varepsilon, \ \int_a^b \tilde{\psi}_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$|\alpha f + \beta g - (\alpha\phi_\varepsilon + \beta\tilde{\phi}_\varepsilon)| \leq |\alpha|\psi_\varepsilon + |\beta|\tilde{\psi}_\varepsilon, \text{ et } \int_a^b (|\alpha|\psi_\varepsilon + |\beta|\tilde{\psi}_\varepsilon) \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon,$$

donc $\alpha f + \beta g$ est également Riemann intégrable. De plus, on déduit que :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b (\alpha\phi_\varepsilon + \beta\tilde{\phi}_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\alpha \int_a^b \phi_\varepsilon + \beta \int_a^b \tilde{\phi}_\varepsilon \right) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

la seconde égalité provenant de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escaliers.
Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, et $(\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ comme dans la définition. Toute subdivision adaptée à ϕ_ε est encore adaptée à $u \circ \phi_\varepsilon$, donc $u \circ \phi_\varepsilon$ est encore en escalier. De plus, on a

$$\|u \circ f - u \circ \phi_\varepsilon\| \leq \|u\| \|f - \phi_\varepsilon\| \leq \|u\| \psi_\varepsilon,$$

où $\|u\|$ désigne une norme sur l'espace des applications linéaires $u : E \to F$. Cette dernière inégalité montre donc que $u \circ f$ est Riemann intégrable. De plus on a :

$$\int_a^b u \circ f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b u \circ \phi_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} u \left(\int_a^b \phi_\varepsilon \right) = u \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \phi_\varepsilon \right) = u \left(\int_a^b f \right),$$

la première inégalité utilisant la continuité de u, et la seconde les propriétés sur les fonctions en escalier.
Montrons (iii). On met en place ϕ_ε et ψ_ε comme dans la définition 2.5. La suite $\|\phi_\varepsilon\|$ est encore en escalier et on a $|\|f(t)\| - \|\phi_\varepsilon(t)\|| \leq \|f(t) - \phi_\varepsilon(t)\| \leq \psi_\varepsilon(t)$. On déduit donc que $\|f\|$ est Riemann intégrable et que

$$\int_a^b \|f\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \|\phi_\varepsilon\| \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_a^b \phi_\varepsilon \right\| = \left\| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \phi_\varepsilon \right\| = \left\| \int_a^b f \right\|.$$

Montrons (iv). Les suites $(\phi_\varepsilon)_{|_{[a,c]}}$ et $(\phi_\varepsilon)_{|_{[c,b]}}$ sont encore en escalier et $\|f_{|_{[a,c]}} - (\phi_\varepsilon)_{|_{[a,c]}}\| \leq (\psi_\varepsilon)_{|_{[a,c]}}$ et de même sur l'intervalle $[c, b]$. On a donc :

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^c \phi_\varepsilon + \int_c^b \phi_\varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^c \phi_\varepsilon + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c^b \phi_\varepsilon = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

La propriété (iv) du théorème 2.2 s'appelle **relation de Chasles**. En particulier, si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ on a $\int_a^a f = 0$. Si $a > b$, on définit $\int_a^b f$ par

$$\int_a^b f := -\int_b^a f.$$

Les propriétés suivantes sont fondamentales.

Théorème 2.3. *(i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable et positive. Alors $\int_a^b f \geq 0$.*
(ii) Soit f et g des applications Riemann intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g$. Alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
(iii) Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction Riemann intégrable. Alors $\| \int_a^b f\| \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

Démonstration. Par le point (iii) du théorème 2.2, on a $| \int_a^b f| \leq \int_a^b |f| = \int_a^b f$, donc $\int_a^b f \geq 0$. Pour (ii), on considère $g - f$ qui est Riemann intégrable et positive. Pour (iii), on utilise que f est bornée (car Riemann intégrable) et le résultat découle de l'inégalité $\|f(t)\| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [a,b]$. □

L'intégrale de Riemann vérifie également la propriété suivante (qui constitue un critère d'intégrabilité).

Proposition 2.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction Riemann intégrable qui converge uniformément vers une fonction f i.e. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Alors f est Riemann intégrable et*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \tag{2.1}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi_{n,\varepsilon}$ et $\psi_{n,\varepsilon}$ deux fonctions en escalier telles que $|f_n - \phi_{n,\varepsilon}| \leq \psi_{n,\varepsilon}$ et $\int_a^b \psi_{n,\varepsilon} \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors on a pour $n = n_0$:

$$|f - \phi_{n_0,\varepsilon}| \leq \psi_{n_0,\varepsilon} + |f_{n_0} - f| \leq \psi_{n_0,\varepsilon} + \varepsilon.$$

De plus $\int_a^b (\psi_{n_0,\varepsilon} + \varepsilon) \leq (1 + b - a)\varepsilon$. Donc la fonction f est Riemann intégrable. De plus, on a :

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty,$$

ce qui prouve (2.1). □

De même, on peut montrer le résultat suivant qui constitue un autre critère d'intégrabilité.

Proposition 2.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset]a,b[$. Alors f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[a,b]$.*

Démonstration. A faire en exercice. Indication. Mettre en place deux suites de fonctions en escaliers $(\phi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ définies sur un intervalle $[\alpha_n, \beta_n]$ bien choisi. Prolonger ces deux fonctions à l'intervalle $[a,b]$ de manière adéquate en utilisant le caractère borné de f. □

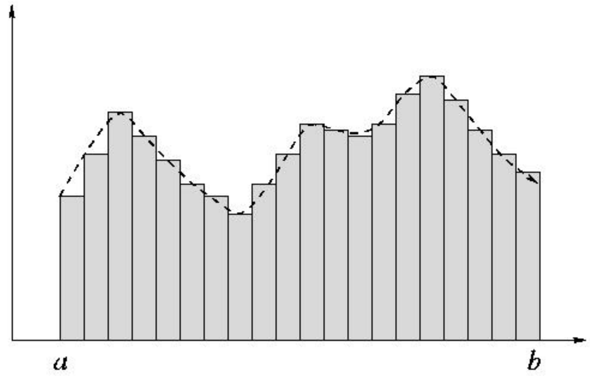

FIGURE 1 – Intégrale au sens de Riemann

2.5 Sommes de Riemann et sommes de Darboux

L'intégration au sens de Riemann repose sur l'idée suivante. On approche la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe du graphe d'une fonction f à l'aide de petits rectangles, voir figure 1. Cette section développe cette idée.

Considérons un intervalle $[a,b]$. Soit $\sigma := (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $[a,b]$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$. Si f est une application de $[a,b]$ dans E, on posera

$$\boxed{S(f,\sigma,\xi) := \sum_{1\leq i\leq n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i).}$$

Définition 2.7. *On dira que $S(f,\sigma,\xi)$ est une somme de Riemann associée à la subdivision σ et à la famille de points ξ.*

Théorème 2.4. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction Riemann intégrable. Alors les sommes de Riemann de f tendent vers l'intégrale de f quand le pas de la subdivision tend vers 0 :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (\sigma,\xi),\ \ \delta(\sigma) < \eta \implies \left\| \int_a^b f - S(f,\sigma,\xi) \right\| < \varepsilon.$$

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour une fonction φ en escalier. Soit $(x_k)_{0\leq k\leq K}$ une subdivision adaptée à φ. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$, $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $[a,b]$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$. On écrit alors :

$$\int_a^b \varphi - S(\varphi,\sigma,\xi) = \sum_{1\leq i\leq n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (\varphi - \varphi(\xi_i))$$

Notons H l'ensemble des indices $1 \leq i \leq n$ tels qu'il existe $x_k \in [a_{i-1}, a_i]$. Chaque x_k ne peut appartenir qu'à au plus 2 intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, et donc le cardinal de H vaut au plus $2K + 2$. Soit $1 \leq i \leq n$. Deux cas sont possible. Si $i \notin H$, alors la fonction φ est constante sur $[a_{i-1}, a_i]$ et donc $\int_{a_{i-1}}^{a_i} (\varphi - \varphi(\xi_i)) = 0$. Si par contre $i \in H$, alors on a :

$$\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} (\varphi - \varphi(\xi_i)) \| \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2\|\varphi\|_\infty \leq 2\delta(\sigma)\|\varphi\|_\infty.$$

D'où

$$\| \int_a^b \varphi - S(\varphi,\sigma,\xi) \| \leq 2\delta(\sigma)\|\varphi\|_\infty \text{card } (H) \leq (4K+4)\delta(\sigma)\|\varphi\|_\infty.$$

D'où le résultat en prenant le pas de la subdivision plus petit que $\frac{\varepsilon}{(4K+4)\|\varphi\|_\infty}$.

Supposons maintenant f Riemann intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe ϕ_ε et ψ_ε deux fonctions en escalier telles que

$$|f - \phi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon, \ \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Par ce qui précède, il existe $\alpha > 0$ et une subdivision σ de $[a, b]$ telle que si $\delta(\sigma) \leq \alpha$, alors

$$|S(\phi_\varepsilon, \sigma, \xi) - \int_a^b \phi_\varepsilon| \leq \varepsilon, \text{ et } \ |S(\psi_\varepsilon, \sigma, \xi) - \int_a^b \psi_\varepsilon| \leq \varepsilon,$$

(prendre par exemple $\sigma_1 \cup \sigma_2$ où σ_1 est adaptée à ϕ_ε et σ_2 à ψ_ε). D'où :

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f - S(f, \sigma, \xi)\right| &\leq \left|\int_a^b f - \int_a^b \phi_\varepsilon\right| + \left|\int_a^b \phi_\varepsilon - S(\phi_\varepsilon, \sigma, \xi)\right| + |S(\phi_\varepsilon, \sigma, \xi) - S(f, \sigma, \xi)| \\ &\leq \int_a^b \psi_\varepsilon + \varepsilon + |S(\phi_\varepsilon, \sigma, \xi) - S(f, \sigma, \xi)| \leq 2\varepsilon + |S(\psi_\varepsilon, \sigma, \xi)| \end{aligned}$$

en utilisant que $|S(\phi_\varepsilon, \sigma, \xi) - S(f, \sigma, \xi)| \leq |S(\psi_\varepsilon, \sigma, \xi)|$. On conclut en utilisant que $|S(\psi_\varepsilon, \sigma, \xi)| \leq |S(\psi_\varepsilon, \sigma, \xi) - \int_a^b \psi_\varepsilon| + \int_a^b \psi_\varepsilon \leq 2\varepsilon$. $\square$

Remarque 2.5. *On appelle* **subdivision régulière** *de* $[a, b]$ *la subdivision* $\sigma_n := (a + i\frac{b-a}{n})_{0 \leq i \leq n}$, *et* $\xi_i = a_i$, $\xi_i = b_i$ *ou* $\xi_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

Exemple : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ lorsque n tend vers l'infini.
Exemple : Montrer que $\int_0^\pi \sin = 2$ à l'aide de sommes de Riemann : calculer la somme $\sum_{k=0}^n e^{\frac{ik\pi}{n}}$ à l'aide d'une série géométrique, prendre la partie imaginaire, et montrer que $\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{\pi}{n} \frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$, $n > 0$.

On s'intéresse maintenant aux sommes de Darboux. Etant donnée une fonction Riemann intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$, d'autres sommes se présentent naturellement. Puisque f est bornée, on peut poser $m_i := \inf_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)$ et $M_i := \sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)$. On introduit les sommes de **Darboux** inférieures et supérieures par :

$$d(f, \sigma) := \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}) m_i, \ \ D(f, \sigma) := \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}) M_i.$$

Remarque 2.6. *Si f est continue sur $[a, b]$, elle atteint ses bornes et donc on retombe sur des sommes de Riemann particulières. En effet, alors pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ et $\xi_i' \in [a_{i-1}, a_i]$ tel que $M_i = f(\xi_i)$ et $m_i = f(\xi_i')$.*

Théorème 2.5. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$.*
(i) On a $d(f, \sigma) \leq \int_a^b f \leq D(f, \sigma)$
(ii) Les sommes de Darboux de f tendent vers l'intégrale de f quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Démonstration. On écrit $\int_a^b f - d(f, \sigma) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f - (a_i - a_{i-1}) m_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f - m_i) \geq 0$, et de même pour la somme de Darboux supérieure. D'où (i).

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que pour tout (σ, ξ), si $\delta(\sigma) < \eta$, alors on a

$$\left|\int_a^b f - S(f, \sigma, \xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ tel que $m_i \leq f(\xi_i) \leq m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. En multipliant par $(a_i - a_{i-1})$ et en sommant les inégalités obtenus, on obtient $d(f,\sigma) \leq S(f,\sigma,\xi) \leq d(f,\sigma) + \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\left|\int_a^b f - d(f,\sigma)\right| \leq \left|\int_a^b f - S(f,\sigma,\xi)\right| + |S(f,\sigma,\xi) - d(f,\sigma)| < \varepsilon.$$

□

2.6 Approximation des fonctions

On montre dans cette partie que les fonctions usuelles (continues, continues par morceaux sur un segment) sont Riemann intégrables. On définit d'abord la classe des fonctions réglées.

Définition 2.8. *On dit que $f : [a,b] \to E$ est réglée si elle vérifie l'une des conditions équivalentes :*
(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi : [a,b] \to E$ en escalier telle que $\sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$.
(ii) Il existe une suite $\varphi_n : [a,b] \to E$ en escalier telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - \varphi_n(t)\| = 0$.

Pour montrer l'équivalence entre (i) et (ii) dans la définition 2.8, on prend la suite $\varepsilon_n = 1/n$. L'assertion (i) de la définition (2.8) équivaut à :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],E),\ \forall t \in [a,b]\ \ \|f(t) - \phi(t)\| \leq \varepsilon,$$

où $\mathrm{Esc}([a,b],E)$ désigne l'ensemble des applications en escaliers de $[a,b]$ à valeurs dans E.

Remarque 2.7. *(i) Notons que l'ensemble des fonctions réglées est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],E)$, l'ensemble des applications bornées de $[a,b]$ dans E (prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition 2.8 pour le caractère borné).*
(ii) L'ensemble des fonctions réglées constitue l'adhérence dans l'ensemble des fonctions bornées des fonctions en escalier pour la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

On a le résultat fondamental suivant.

Proposition 2.3. *Une fonction réglée sur $[a,b]$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. A faire en exercice. Mettre en place ϕ_ε et ψ_ε à partir de la définition d'une fonction réglée. □

Remarque 2.8. *On peut montrer qu'une fonction est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si elle admet en tout point de $[a,b]$ une limite à gauche et une limite à droite. Ce résultat n'est pas essentiel pour définir la notion d'intégrale.*

Exemples :

- **Une fonction non Riemann-intégrable**. La fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in]0,1], \end{cases}$$

  n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$ (car elle n'est pas bornée). Par contre on pourra définir son intégrale de Riemann généralisée (voir le chapitre sur les intégrales généralisées).
- **Une fonction Riemann-intégrable et non réglée**. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas réglée car elle n'a pas de limite en 0^+ (à vérifier en exercice). Cependant elle est Riemann intégrable par la proposition 2.2.

- **Fonction de Thomae**. Soit la fonction f dite fonction de *Thomae* définie par
$$T(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ si } x = p/q \text{ et } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \end{cases}$$
Alors f est Riemann intégrable. On peut également montrer qu'elle est réglée (et que pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$). Elle est discontinue en tout point rationnel autre que zéro, et continue en tout point irrationnel (voir feuille d'exercice pour la démonstration).
- **Une fonction non Riemann-intégrable (bornée)**. Rappelons qu'étant donné un ensemble non-vide X, on note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice de l'ensemble X définie par :
$$\mathbb{1}_X(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \in X, \\ 0 \text{ si } x \notin X. \end{cases}$$
La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$des rationnels n'est pas Riemann intégrable voir feuille d'exercice pour la démonstration).

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.6. *Toute fonction continue par morceaux est réglée.*

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour une fonction $f : [a,b] \to E$ continue. Une telle fonction est uniformément continue (théorème de Heine). Etant donné, $\varepsilon > 0$, on note $\eta > 0$ son ε module d'uniforme continuité :
$$\forall\ t, t' \in [a,b], \quad |t - t'| < \eta \implies \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon.$$
Soit $\sigma := (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de pas plus petit que η. On définit une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to E$ par $\varphi(a_i) = f(a_i)$ pour $0 \le i \le n$, et par $\varphi(t) = f\left(\frac{a_i+a_{i-1}}{2}\right)$ pour $t \in]a_{i-1}, a_i[$ et $1 \le i \le n$. Alors $\|f(t) - \varphi(t)\|$ vaut 0 si t est l'un des a_i et vaut $\|f(t) - f\left(\frac{a_i+a_{i-1}}{2}\right)\| \le \varepsilon$ si $t \in]a_{i-1}, a_i[$ en utilisant $\left|t - \frac{a_i+a_{i-1}}{2}\right| \le \eta$. On a donc bien une fonction en escalier telle que $\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \le \varepsilon$.

Si maintenant f est continue par morceaux, soit $\sigma := (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision adaptée à f et $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ comme dans la définition (2.8). On peut appliquer le cas précédent à f_i et trouver φ_i en escalier telle que $\sup_{t\in[a_{i-1},a_i]} |f_i(t) - \varphi_i(t)| \le \varepsilon$. On définit alors une fonction en escalier φ par $\varphi(a_i) := f(a_i)$ et $\varphi(t) = \varphi_i(t)$ pour $t \in]a_{i-1}, a_i[$. On a alors bien $\sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \le \varepsilon$, ce qui montre que f est reglée. ☐

En particulier, toute fonction **continue** sur $[a,b]$ est **Riemann-intégrable** sur $[a,b]$ et donc $\int_a^b f$ peut se calculer en étudiant la limite des sommes de Riemann $S(f,\sigma,\xi)$ associées à f sur $[a,b]$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

2.7 Formule de la moyenne

L'intégrale de Riemann vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 2.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable positive telle qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$ et tel que f soit continue au point t_0. Alors $\int_a^b f > 0$.*

Démonstration. On suppose $t_0 < b$. Par continuité de f, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(t) > f(t_0)/2$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \eta]$. On a alors
$$\int_a^b f \ge \int_{t_0}^{t_0+\eta} f \ge \int_{t_0}^{t_0+\eta} f(t_0)/2 = \eta f(t_0)/2 > 0.$$
Si $t_0 = b$, on considère un intervalle du type $[t_0 - \eta, t_0]$. ☐

Corollaire 2.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue* **positive**. *Si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.*

La propriété suivante est dite première formule de la moyenne.

Théorème 2.7. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et que g est Riemann intégrable positive. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Démonstration. L'image de $[a,b]$ par f est un segment $[m, M]$ (théorème des bornes[5]). Comme g est positive, on déduit :

$$\forall\, t \in [a,b], \;\; mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

En intégrant, on obtient

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

D'où si $\int_a^b g = 0$, on déduit $\int_a^b fg = 0$ et n'importe que point c convient. Sinon, on a $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires (théorème des bornes), il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$. $\square$

Application de la formule de la moyenne (exercice). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. Alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt = \frac{f(0)}{2}.$$

De même étudier $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$.

2.8 Limites de l'intégrale de Riemann

On rappelle qu'une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge **simplement**, resp. **uniformément**, vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in [a,b]$, on a $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, resp. $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
L'intégrale de Riemann a plusieurs inconvénients :

- L'intégrale de Riemann est non stable par composition.
- Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions Riemann intégrables qui converge simplement sur un intervalle $[a,b]$ vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement intégrable.

Pour la non-stabilité par composition, on peut considérer l'exemple suivant. Soit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := 1$ si $x \in]0,1]$ et $g(0) = 0$. Alors la fonction $g \circ T = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable (voir feuille d'exercice).
Pour la non stabilité pour la convergence simple, on peut considérer la fonction $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \in]0,1]$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est continue et dérivable, mais sa dérivée n'est pas bornée. Ainsi, f' n'est pas Riemann intégrable. Or, si on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) := \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad x \in [0,1],$$

la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ est Riemann intégrable et converge simplement vers la fonction $x \longmapsto f'(x)$ sur $[0,1]$. Donc, il n'y a pas stabilité de la notion "Riemann-intégrable" par convergence simple. Toutefois

5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors pour tout $y \in [m, M]$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

cette propriété est vraie dans le cas où la convergence est uniforme (voir proposition 2.1).

Il existe d'autres manières de construire l'intégrale d'une fonction et qui permettent de s'affranchir de ce type de problèmes (voir cours en L3).

2.9 Primitives et intégrales

Dans la suite, si cela n'est pas précisé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to E$ une application Riemann intégrable sur tout segment de I,et soit $a \in I$. Pour tout $t \in I$, on pose $F(t) := \int_a^t f$. Alors l'application F est continue sur I. Elle est dérivable en tout point t_0 où f est continue et on a alors $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Démonstration. On suppose d'abord que t_0 n'est pas une extrémité de I, et soit $\eta > 0$ tel que $[t_0-\eta, t_0+\eta] \subset I$. Alors f est Riemann intégrable sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, et donc $|f|$ est bornée par une constante M sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. D'où $\|F(t) - F(t_0)\| \leq M(t - t_0)$ pour $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, ce qui prouve que F est continue en t_0. On montre le même résultat si t_0 est une extrémité de I en introduisant $[t_0, t_0+\eta]$ ou bien $[t_0-\eta, t_0]$.

Supposons maintenant que f est continue en t_0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que si $|t - t_0| \leq \eta$, alors $\|f(t) - f(t_0)\| \leq \varepsilon$. On a pour $|t - t_0| \leq \eta$:

$$\|F(t) - F(t_0) - (t - t_0)f(t_0)\| = \left\| \int_t^{t_0} (f(x) - f(t_0))dx \right\| \leq \varepsilon|t - t_0|.$$

Ceci montre que F est dérivable en t_0 et que $F'(t_0) = f(t_0)$. □

Définition 2.9. *Soit $f : I \to E$ une application. On dit que $F : I \to E$ est une primitive de f si F est dérivable[6] sur I et $F' = f$ (on rappelle que $E = \mathbb{R}^m$ et la dérivation s'effectue composante par composante).*

Remarque 2.9. *Si $f : I \to E$ admet une primitive F, elle admet une infinité de primitives qui sont exactement les fonctions $t \longmapsto F(t) + C$ avec $C \in E$ (en effet, si F et G sont deux fonctions continues sur I, alors $(F - G)' = 0$ si et seulement si $F - G$ est constante sur I).*

Théorème 2.9. *Soit $f : I \to E$ une fonction continue. Alors f admet des primitives sur I. Si F est une telle primitive, alors on a :*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) := [F(t)]_a^b.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in I$, et posons $G(t) = \int_\alpha^t f$. Puisque f est continue, G est dérivable et $G' = f$. Donc, G est une primitive de f. Si F est une autre primitive de f, alors on a $F = G + k$, $k \in E$. Donc,

$$\int_a^b f = \int_\alpha^b f - \int_\alpha^a f = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

□

Remarque 2.10. *(i) Si $f : I \to E$ une fonction continue, alors pour tout point $c \in I$, l'application intégrale $t \in I \longmapsto \int_c^t f(x)dx$ est une primitive de f. C'est l'unique primitive de f qui s'annule au point c.*
(ii) Ce dernier résultat est un des moyens les plus simples pour calculer une intégrale : il se ramène à la recherche d'une primitive de la fonction f considérée.

On retiendra donc la propriété importante suivante.

6. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{t\to t_0, t\neq t_0} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}$ existe. On note alors $F'(t_0)$ la dérivée de F au point t_0.

Proposition 2.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors les applications intégrales $t \longmapsto \int_c^t f(x)dx$, $c \in I$ sont* **exactement les primitives de fonctions continues**.

Si f n'est pas continue, alors les applications intégrales ne sont à priori pas des primitives.

Exemple 1 : **Une fonction Riemann-intégrable n'ayant pas de primitive**. Soit $f(x) = E(x)$ pour $x \in [0, 2[$. Une primitive de f sur $[0, 1[$ est donnée par $F(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$ et une primitive de f sur $[1, 2[$ est donnée par $F(x) = x + B$ (car $f(x) = 1$). Au point 1, on a $F'(1^-) = 0$ et $F'(1^+) = 1$ donc F n'est pas dérivable en 1. Donc f n'admet pas de primitive sur $[0, 2[$.

Exemple 2. **Une fonction non Riemann-intégrable ayant une primitive**. Il existe des fonctions f non Riemann intégrables admettant des primitives. Considérons l'application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos(1/x) + \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin(1/x),\ x \in]0, 1],\ f(0) = 0.$$

Alors on peut vérifier que f a pour primitive la fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := x^{\frac{3}{2}} \sin(1/x)$ si $x \in]0, 1]$, $F(0) = 0$ (voir la section exercice pour la preuve de ce point). De plus, la fonction f n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$ (car elle n'est pas bornée).

Exemple 3. **Une fonction non continue ayant une primitive**. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x),\ x \in]0, 1], \\ 0\ x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x = 0$. Cependant, elle admet une primitive sur $[0, 1]$ donnée par $F(x) := x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$ (vérifier en exercice que F est dérivable sur $[0, 1]$ et que $F' = f$).

Dans l'exemple 1, on notera que $f([0, 2[) = \{0, 1\}$ n'est pas un intervalle alors que dans l'exemple 3, $f([0, 1])$ est un segment. En effet, ceci résulte du fait suivant. Soit $\tilde{f}(x) := \sin(1/x)$, $x \neq 0$ et $\tilde{f}(x) := 0$, alors on sait que $\tilde{f}([0, 1]) = [-1, 1]$. En admettant le théorème de Darboux[7] **hors programme**, on a donc immédiatement que dans le premier exemple, f n'est pas une dérivée et donc $F' = f$ sur $[0, 2]$ n'est pas possible. Plus généralement, toute fonction qui admet une limite en un point sans que ce soit la valeur de cette fonction en ce point n'admet pas de primitive.

On mentionne enfin le résultat suivant qui porte sur les fonctions Riemann-intégrables : il est hors programme et est moins fondamental que le théorème 2.9.

Théorème 2.10. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$. Si f admet une primitive sur $[a, b]$ notée F, alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

et l'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule au point a. On a deplus :

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

2.10 Changements de variable, Intégration par parties

Le résultat suivant (théorème du **changement de variables**) constitue un résultat important pour le calcul effectif d'intégrales.

7. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $F'(I)$ est un intervalle i.e. F' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Théorème 2.11. *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une application de classe C^1. Alors pour tous a, b dans J, on a :*

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\ \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f. \tag{2.2}$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\ \varphi'$ et donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\ \varphi'$. On a donc $\int_a^b (f \circ \varphi)\ \varphi' = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$. □

Faire le changement de variable $t = \varphi(u)$ dans l'intégrale $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ revient donc à faire varier u de a à b (pour que t varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$) et à remplacer $f(t)$ par $(f \circ \varphi)(u)$, et dt par $\varphi'(u)du$. Ainsi (2.2) se réécrit :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

De même faire le changement de variable inverse $t = \varphi(u)$ dans l'intégrale $\int_a^b (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$ revient à faire varier t de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$ puisque u varie de a à b, et remplacer $f(\varphi(u))$ par $f(t)$ et $\varphi'(u)du$ par dt.

Lorsque f n'est pas continue, alors le théorème précédent tombe en défaut. Cependant, pour les deux changements de variable $t \mapsto t + T$ et $t \mapsto \frac{t}{\lambda}$ (translation, homothétie), on a le résultat suivant moins fondamental dans le cadre des fonctions réglées.

Proposition 2.6. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée.*
(i) Soit $T \in \mathbb{R}$ et $g : [a - T, b - T] \to E$, avec $g(t) = f(t + T)$. Alors g est réglée et $\int_{a-T}^{b-T} g = \int_a^b f$.
(ii) Soit $\lambda > 0$ et soit $g : [a/\lambda, b/\lambda]$, $t \longmapsto f(\lambda t)$. Alors g est réglée et $\int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} g = \int_a^b f$.

Démonstration. On montre ce résultat sur les fonctions en escalier, puis ensuite on passe à la limite sur les fonctions réglées. □

Exemple. 1) Calculons une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\cosh x}$ sur $\mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $t = e^x$ et on a alors $dt = e^x dx$ d'où $dx = \frac{dt}{t}$ et donc :

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{dt}{t(t + 1/t)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\arctan(e^x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}$ en utilisant un changement de variable.

Le résultat suivant (**intégration par parties**) constitue également un outil clef pour le calcul d'intégrales, et plus généralement en analyse.

Théorème 2.12. *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Démonstration. La fonction fg est une primitive de la fonction continue $f'g + fg'$ et donc $\int_a^b (fg' + f'g) = [f(t)g(t)]_a^b$. □

Grâce à l'intégration par parties on peut montrer la formule de Taylor avec reste intégrale.

Corollaire 2.2. *Soit $f : I \to E$ une application de classe C^{n+1} et soit $a \in I$. Alors pour tout $b \in I$, on a (pour f de classe C^{n+1}) :*

$$f(b) = f(a) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Si $n = 0$, on a bien $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$ pour f de classe C^1. De plus, à l'aide d'une intégration par parties on a :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt,$$

ce qui perm du rang $n-1$ au rang n et de conclure par récurrence sur n. □

Exemple. Calculons une primitive sur $\mathbb{R}$ de $u \longmapsto \arctan u$. On a par une intégration par parties :

$$\int_0^x \arctan u du = [u \arctan u]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2} du = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

2.11 Recherche de primitives

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On cherche à déterminer des intervalles (maximaux) I sur lesquels f est continue ainsi qu'une primitive F de f sur un tel intervalle. Il est fondamental de préciser l'intervalle sur lequel une primitive est calculée.

Notation. La notation

$$F(t) = \int f(t)dt + k,\ t \in I$$

signifiera que f est continue sur I et que F est une primitive de f sur I. Contrairement à la notation différentielle des intégrales, la variable t n'est pas muette. C'est bien le même t qui figure dans $F(t)$ et $\int f(t)dt$. La recherche de primitives utilise le plus souvent :

- la formule de changement de variable
- le théorème d'intégration par parties.

Par ailleurs, il est souvent utile d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour le calcul effectif de primitives. Si F est une primitive de f sur I, G, une primitive de g sur I, et si α, β sont deux réels, on a :

$$\int (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int f(t)dt + \beta \int g(t)dt,\ t \in I,$$

donc $\alpha F + \beta G$ est bien une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

2.12 Primitives usuelles

Le tableau suivant est fondamental pour de nombreux exercices. Il est très important de retenir la **méthode** permettant de trouver une primitive. On posera $I_n =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $J_n =]n\pi, (n+1)\pi[$ où $n \in \mathbb{N}$ et k, k' ci-dessous désignent des constantes réelles.

$\int e^t dt = e^t + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \ln(t)dt = t\ln(t) - t + k,\ t \in \mathbb{R}_+^*$
$\int \cos t dt = \sin t + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \sin t dt = -\cos t + k,\ t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan(t) + k,\ t \in I_n$	$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\text{cotg}(t) + k,\ t \in J_n$
$\int \cosh t dt = \sinh(t) + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \sinh t dt = \cosh(t) + k,\ t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh(t) + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth(t) + k,\ t \in \mathbb{R}_-^*$ ou $t \in \mathbb{R}_+^*$
$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1$	$\int \frac{dt}{t} = \ln(\lvert t\rvert) + k,\ t \in \mathbb{R}_-^*$ ou $t \in \mathbb{R}_+^*$
$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{t+1}{t-1}\right\rvert = \text{argth}t,\ t \in]-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert[$
$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \text{argsh}\frac{t}{\lvert a\rvert} + k = \ln(t + \sqrt{t^2+a^2}) + k',\ t \in \mathbb{R}$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\lvert a\rvert} + k,\ t \in]-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert[$

Il est souvent très utile de repérer les expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u$,... (où u est une fonction) pour trouver des primitives. Il peut également être utile de connaître les primitives suivantes (ou de savoir les retrouver).

$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + k,\ t \in I_n$	$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right\rvert + k,\ t \in J_n$
$\int \tan(t)dt = -\ln\lvert\cos t\rvert + k,\ t \in I_n$	$\int \text{cotg}(t)dt = \ln\lvert\sin t\rvert + k,\ t \in J_n$
$\int \frac{dt}{\cosh t} = 2\arctan(e^t) + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \frac{dt}{\sinh t} = \ln\left\lvert\tanh\frac{t}{2}\right\rvert\ \ t \in \mathbb{R}_-^*$ ou $t \in \mathbb{R}_+^*$
$\int \tanh(t)dt = \ln(\cosh(t)) + k,\ t \in \mathbb{R}$	$\int \coth(t)dt = \ln(\lvert\sinh(t)\rvert) + k,\ t \in \mathbb{R}_-^*$ ou $t \in \mathbb{R}_+^*$

On a également la primitives suivante :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln\lvert t + \sqrt{t^2-a^2}\rvert + k = \begin{cases} \text{argch}\frac{t}{\lvert a\rvert} + k,\ t \in]\lvert a\rvert, +\infty[, \\ -\text{argch}\frac{t}{\lvert a\rvert} + k,\ t \in]-\infty, -\lvert a\rvert[. \end{cases}$$

Les fonctions $t \longmapsto t^\alpha$ et $t \longmapsto a^t$, $a > 0$ n'ont pas les mêmes primitives. Ainsi, $t \longmapsto t^\alpha$ admet comme primitive $\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ pour $\alpha \neq -1$ et pour $a > 0$ on a :

$$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, il est souvent utile de connaître la primitive de ln :

$$\int \ln t\ dt = t\ln t - t.$$

Exercice Trouver les primitives de $\frac{1}{t^2+c}$, $c \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de cette section, on donne essentiellement deux exemples de recherche de primitives :
- Fraction rationnelles en sinus et cosinus,
- Fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperboliques.

2.12.1 Fractions rationnelles en sinus et cosinus

On s'intéresse à une primitive d'une fonction du type $t \longmapsto R(\cos t, \sin t)$ où R est une fraction rationnelle (i.e. $F = P/Q$ où P et Q sont deux polynômes réels). On pose $f(t) := R(\cos t, \sin t)$ La proposition suivante (appelée parfois règle de **Bioche**) s'illustre de préférence sur quelques exemples.

Proposition 2.7. *Soit $f(t)$ une fraction rationnelle en $\cos t$ et en $\sin t$.*
(i) Si $f(\pi - t) = -f(t)$ pour tout t, alors poser $u = \sin t$ conduit à la recherche d'une primitive de fraction rationnelle.
(ii) Si $f(-t) = -f(t)$ pour tout t, alors poser $u = \cos t$ conduit à la recherche d'une primitive de fraction rationnelle.
(iii) Si $f(\pi + t) = f(t)$ pour tout t, alors poser $u = \tan t$ conduit à la recherche d'une primitive de fraction rationnelle.
(iv) Dans les autres cas, le changement de variable $u = \tan(t/2)$, $t \in](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$ conduit à la recherche d'une primitive de fraction rationnelle.

Notons que dans tous les cas, on peut poser $u = \tan(t/2)$, mais ce changement de variable conduit à des fractionnelles dont les degrés des dénominateurs et numérateurs sont plus grands que dans les règles (i), (ii) et (iii). Par cette proposition, on est donc ramené à une primitive du type :

$$\int \frac{P(u)}{Q(u)},$$

où P et Q sont deux polynômes. La technique usuelle consiste ensuite à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle P/Q et à utiliser les propriétés suivantes :

1 Une primitive de $u \longmapsto \frac{1}{(u-a)^k}$ est $-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(u-a)^{k-1}}$ pour $k \neq 1$.

2 Une primitive de $u \longmapsto \frac{1}{u-a}$ est $\ln|u-a|$ si $a \in \mathbb{R}$

3 Une primitive de $u \longmapsto \frac{1}{u-a}$ est $\ln|u-a| + i\mathrm{arctan}(\frac{u-\alpha}{\beta})$ si $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Exemples.

1) Calculer $\int \frac{dt}{\cos t}$ et $\int \frac{dt}{\sin t}$ en posant $u = \tan t/2$.

2) Quels changements de variable faire pour calculer simplement $\int \cos t \sin^4 t\ dt$ et $\int \sin^8 t \cos^3 t\ dt$?

Remarque 2.11. *Notez que pour calculer $\int \cos^4 t\ dt$, la manière la plus simple est de linéariser la fonction $t \longmapsto \cos^4 t$.*

2.12.2 Fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperboliques

On s'intéresse à une primitive d'une fonction du type $t \longmapsto R(\cosh t, \sinh t)$ où R est une fraction rationnelle. Une première méthode consiste à effectuer un des changements de variable suivants $u = \cosh t$, $u = \sinh t$, ou $u = \tanh t$ (par analogie avec le cas précédent). Sinon, une telle fraction rationnelle $f(t) := R(\cosh t, \sinh t)$ s'écrit toujours sous la forme $S(e^t)$, ainsi le changement de variable $u = e^t$ conduit à $\int f(t)dt = \int \frac{S(u)}{u}du$, et on est conduit à la recherche d'une primitive de fraction rationnelle.

Exemple. Calculer $I := \int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt$.

2.13 Application aux équations différentielles linéaires

Le théorème suivant est hors programme. On le mentionne pour montrer le lien entre les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et la recherche de primitives d'une fonction.

Théorème 2.13. *Soit $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ et $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un intervalle $[0,T]$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et on considère le problème de Cauchy :*

$$\frac{dy}{dt}(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t) \quad y(0) = y_0. \tag{2.3}$$

L'unique solution de (2.3) *est donnée par :*

$$y(t) = y_0 e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} + \int_0^t \beta(s)e^{-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau}ds \tag{2.4}$$

On notera que lorsque $\beta = 0$ (équation homogène), alors la solution de (2.3) s'écrit :

$$y(t) = y_0 e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Ainsi, dans le cas où l'équation s'écrit $\frac{dy}{dt}(t) + \alpha(t)y(t) = 0$, la solution de cette équation revient au calcul d'une primitive de la fonction $t \mapsto \alpha(t)$ sur $[0,T]$.

3 Intégrales généralisées

Etant donné un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on se restreindra dans ce chapitre (si cela n'est pas précisé) à l'intégration de fonctions Riemann intégrables (il est possible aussi de se restreindre à la classe des fonctions continues par morceaux) sur tout segment de I. Si cela n'est pas précisé, E désignera l'espace $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Le but du chapitre est d'étudier des intégrales du type suivant :

$$\int_{]a,b[} f(t)dt, \quad \int_{[a,b[} f(t)dt, \quad \int_{]a,b]} f(t)dt.$$

3.1 Fonctions à valeurs réelles positives

Définition 3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de I et* **positive**. *On dit que l'intégrale sur I de f converge si il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout segment $[a,b] \subset I$ on ait $\int_a^b f \leq M$. Alors, $\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f$ est un réel et on note :*

$$\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f.$$

De façon équivalente, on dit que l'intégrale sur I de f est convergente. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale sur I de f est divergente.

Exemple : on a l'égalité $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \leq 2$ pour tout $0 < a \leq b \leq 1$, donc l'intégrale sur $]0,1]$ de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente. Etudier de même la convergence de l'intégrale sur $[1,+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto 1/t^2$.

La définition précédente entraine facilement les propriétés suivantes.

Propriété 3.1. *(i) Si f est positive sur un intervalle I et si son intégrale converge sur I, alors l'intégrale de f converge sur tout intervalle $I' \subset I$ et on a $\int_{I'} f \leq \int_I f$.*
(ii) Si f et g sont positives sur I et vérifient $f \leq g$ sur I, et si l'intégrale de g converge sur I, alors l'intégrale de f converge sur I et $\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition 3.1. *Etant donnée une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$, son intégrale converge sur I si et seulement si il existe une suite croissante de segments $[a_n, b_n]$ contenus dans I dont la réunion est I, et une constante $M \geq 0$ telle que $\int_{a_n}^{b_n} f \leq M$ pour tout n. Dans ce cas, on a :*

$$\int_I f = \sup_n \int_{a_n}^{b_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f.$$

Démonstration. On montre seulement la condition suffisante. Supposons qu'une telle suite d'intervalles existe. Soit $J = [a,b]$ un intervalle inclus dans I. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $J \subset [a_n, b_n]$. Donc $\int_a^b f \leq \int_{a_n}^{b_n} f \leq M$ pour $n \geq N$ et donc l'intégrale de f converge sur I.

Par ailleurs on a $\sup_n \int_{a_n}^{b_n} f \leq \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f = \int_I f$. De plus, on vient de voir précédemment que l'on a également $\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f \leq \sup_n \int_{a_n}^{b_n} f$, d'où l'égalité $\int_I f = \sup_n \int_{a_n}^{b_n} f$. Comme la suite $(\int_{a_n}^{b_n} f)_n$ est croissante, sa borne supérieure est aussi sa limite. □

On peut montrer facilement la propriété suivante qui fournit le lien avec une fonction Riemann intégrable sur un segment.

Propriété 3.2. *Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive et Riemann intégrable. Alors, l'intégrale sur I de f converge est et on a $\int_I f = \int_a^b f$. De plus, l'intégrale de f sur chacun des intervalles $]a,b[$, $]a,b]$, ou $[a,b[$ converge et toutes ces intégrales sont égales.*

On a également la propriété suivante.

Proposition 3.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue* **positive** *telle que son intégrale converge sur I et telle que $\int_I f = 0$. Alors $f = 0$.*

Démonstration. Etant donné un segment $J \subset I$, on a $\int_J f = 0$ car f est positive et son intégrale sur I converge. Ainsi f est nulle sur J (voir chapitre 1). On conclut que f est nulle sur tout segment de I, et donc $f = 0$ sur I. □

Proposition 3.3. *Si f est g sont positives sur I et si leur intégrale converge sur I, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale de la fonction $\alpha f + \beta g$ converge sur I et on a :*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

Démonstration. Il suffit de prendre une suite de segments croissante de I, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont la réunion vaut I, et de passer à la limite dans l'égalité $\int_{J_n} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{J_n} f + \beta \int_{J_n} g$. □

La propriété suivante est très importante et permet souvent de ramener la question de la convergence d'une intégrale d'une fonction sur un intervalle quelconque à deux sous problèmes.

Proposition 3.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de I. Soit $a \in \mathrm{Int}(I)$ (l'intérieur de l'intervalle I). Alors l'intégrale de f sur I converge si et seulement si son intégrale sur chacun des deux intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ converge. Dans ce cas on a :*

$$\int_I f = \int_{I\cap]-\infty,a]} f + \int_{I\cap[a,+\infty[} f. \tag{3.1}$$

Démonstration. On montre seulement que si l'intégrale de f converge sur ces deux sous-intervalles alors son intégrale converge sur I (l'autre sens est immédiat). Soit M_1 et M_2 des majorants des intégrales $\int_{I\cap]-\infty,a]} f$ et $\int_{I\cap]-\infty,a]} f$. Soit J un segment de I. Alors dans tous les cas (selon que $a \in J$ ou $a \notin J$) on a $\int_J f \leq M_1 + M_2$. Donc l'intégrale de f converge sur I. Soit alors $J_n = [a_n, b_n]$ une suite croissante de segments de réunion I. Pour n assez grand on a $a_n \leq a \leq b_n$ car a est dans l'intérieur de I. Mais $([a_n, a])$ est une suite croissante de segments de réunion $I \cap]-\infty, a]$. De même $([a, b_n])$ est une suite croissante de segments de réunion $I \cap [a, +\infty[$. On peut donc passer à la limite dans la formule $\int_{[a_n,b_n]} f = \int_{[a_n,a]} f + \int_{[a,b_n]} f$, et on obtient (3.1) □

En pratique on découpe l'étude d'une intégrale du type $\int_{]\alpha,\beta[} f$ en deux intégrales $\int_{]\alpha,a]} f$ et $\int_{[a,\beta[} f$ où a est choisi dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$. Considérons par exemple l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^u(1-x)^{1-u}}, \quad \text{avec} \quad 0 < u < 1.$$

On peut alors découper cette intégrale en deux morceaux $I_1 := \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^u(1-x)^{1-u}}$ et $I_2 := \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^u(1-x)^{1-u}}$ et étudier ces deux intégrales séparément.

On donne une autre caractérisation très utile en pratique pour montrer la convergence d'une intégrale sur un intervalle.

Proposition 3.5. *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction* **positive** *Riemann intégrable sur tout segment de $[a, b[$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Alors l'intégrale de f converge sur $[a, b[$ si et seulement si F admet une limite au point b. Dans ce cas, on a : $\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.*

Démonstration. Soit b_n une suite croissante de $[a,b[$ de limite b. Alors $([a,b_n])_n$ est une suite croissante de segments dont la réunion est $[a,b[$. Donc l'intégrale de f converge sur $[a,b[$ si et seulement si la suite $\int_a^{b_n} f = F(b_n) - F(a)$ admet une limite, donc si et seulement si la suite $(F(b_n))_n$ converge. Comme F est croissante, ceci équivaut à l'existence de la limite de F en b. □

Remarque 3.1. *On peut montrer le même résultat que celui de la proposition précédente dans le cas d'un intervalle $]a,b]$.*

Exemple. On a $\int_{[x,1]} \frac{dt}{t} = -\ln x \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, donc l'intégrale sur $]0,1]$ de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est divergente. Montrer que $\int_{]0,1]} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ et que $\int_{[0,+\infty[} e^{-t}dt = 1$.

3.2 Règles de comparaison (fonction positives)

On rappelle les notations de **Landau**. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- On a $f = O(g)$ (i.e. f est dominée par g) au voisinage de x_0 si et seulement si il existe un réel $K \geq 0$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq K|g(x)|$.
- On a $f = o(g)$ (i.e. f est négligeable devant g) au voisinage de x_0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$. On vérifie sans difficulté que cela équivaut pour x dans un voisinage de x_0 à $f(x) = g(x)\theta(x)$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.
- On dit que f est g sont équivalentes en x_0 si et seulement si $f - g = o(g)$ en x_0. Dans ce cas on note $f \sim g$ et on dit que f est équivalente à g en x_0. On vérifie facilement que cela équivaut pour x dans un voisinage de x_0 à $f(x) = g(x)(1 + \theta(x))$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque x tend vers x_0.

Théorème 3.1. *Soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann intégrable sur tout segment de $[a,b[$. On suppose qu'au voisinage de b on a $f = O(g)$, resp. $f = o(g)$. Alors :*

(i) Si l'intégrale de g converge sur $[a,b[$ il en est de même de l'intégrale de f et on a $\int_{[x,b[} f(t)dt = O\left(\int_{[x,b[} g(t)dt\right)$, resp. $\int_{[x,b[} f(t)dt = o\left(\int_{[x,b[} g(t)dt\right)$.

(ii) Si l'intégrale de f sur $[a,b[$ diverge, alors il en est de même de l'intégrale de g et on a $\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$, resp. $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

Démonstration. Les convergences et divergences découlent de l'inégalité $0 \leq f \leq Kg$ qui est vraie sur un certain intervalle $[c,b[$ et du fait que f et g sont Riemann-intégrables sur le segment $[a,c]$. De plus lorsque $f = o(g)$, alors on a $f = O(g)$.

On démontre les résultats de comparaison uniquement dans le cas $f = o(g)$. La démonstration lorsque $f = O(g)$ est analogue en changeant ε par K.

Montrons le résultat de comparaison pour (i). Supposons que $f = o(g)$ et que l'intégrale de g sur $[a,b[$ converge. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a,b[$ tel que si $t \in [c,b[$, alors on a $0 \leq f(t) \leq \varepsilon g(t)$. Alors pour $x \in [c,b[$ on a (en intégrant l'inégalité de x à b) : $0 \leq \int_{[x,b[} f(t)dt \leq \varepsilon \int_{[x,b[} g(t)dt$ et donc $\int_{[x,b[} f(t)dt = o(\int_{[x,b[} g(t)dt)$.

Montrons le résultat de comparaison pour (ii). Supposons que $f = o(g)$ et que l'intégrale de f sur $[a,b[$ diverge. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a,b[$ tel que pour $t \in [c,b[$, alors $0 \leq f(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}g(t)$. Alors pour $x \in [c,b[$, on a en intégrant cette inégalité : $\int_c^x f(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_c^x g(t)dt$, d'où :

$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^c f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_c^x g(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt + \left(\int_a^c f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g(t)dt\right).$$

Comme g n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $g \geq 0$, on a $\lim_{x\to b} \int_a^x g(t)dt = +\infty$. Donc il existe $c' \in [a,b[$ tel que si $x \geq c'$ alors $\frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt > \int_a^c f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g(t)dt$. Ainsi pour tout $x \in [\max(c,c'), b[$, on a :

$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt = \varepsilon\int_a^x g(t)dt,$$

donc $\int_a^x f(t)dt = o(\int_a^x g(t)dt)$. $\square$

Remarque 3.2. *Dans le cas (i) du théorème 3.1,* $\int_x^b f(t)dt$ *s'appelle le* **reste de l'intégrale** $\int_a^b f(t)dt$. *Dans le cas (ii), le reste n'a pas de sens car l'intégrale diverge. Le terme* $\int_a^x f(t)dt$ *peut porter le nom de* **partie principale** *ou* **somme partielle** *par analogie avec le cas des séries (voir chapitre sur les séries).*

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{[1,+\infty[} x^n e^{-x}dx$ est convergente. En effet, il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $x \geq 1$ on ait $x^{n+2}e^{-x} \leq M$. Ainsi, pour $x \geq 1$ on a $x^n e^{-x} \leq \frac{M}{x^2}$ et le résultat.

Avec des arguments analogues, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soit* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann intégrables sur tout segment de* $[a, b[$. *On suppose que* f *et* g *sont* **positives** *et qu'au point* b *l'on a* $f \sim g$. *Alors les intégrales de* f *et de* g *sur* $[a, b[$ *sont simultanément convergentes ou divergentes. De plus on a les propriétés suivantes :*
(i) Si l'intégrale de g *sur* $[a, b[$ *converge, alors il en est de même de l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *et l'on a* $\int_{[x,b[} f(t)dt \sim \int_{[x,b[} g(t)dt$.
(ii) Si l'intégrale de g *sur* $[a, b[$ *diverge, alors il en est de même de l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *et l'on a* $\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$.

Démonstration. A faire en exercice en suivant la preuve du théorème 3.1. $\square$

Ainsi dans le cas (i), on a équivalence des restes et dans le cas (ii) on a équivalence des parties principales. Insistons sur le fait que ce résultat n'est valide que si les deux fonctions sont **positives**.

Exemples :
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ sur $I = [1, +\infty[$. On a $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Ainsi, si $g(x) := 1/x^2$, les intégrales de f et g sur I sont de même nature.
- $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}$ sur $I = [0, 1[$. On a $f(x) \sim \frac{\sin 1}{\sqrt{1-x}}$ en 1^-. Ainsi, si $g(x) := \frac{\sin 1}{\sqrt{1-x}}$, les intégrales de f et g sur I sont de même nature.
- $f(x) = \frac{\cos(1/x)}{x}$ sur $I = [1, +\infty[$. On a $f(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$. Ainsi, si $g(x) := 1/x$, les intégrales de f et g sur I sont de même nature.

Les critères de convergence ci-dessous dans le cas des fonctions positives résument les propriétés importantes de cette partie.

Théorème 3.3. *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction Riemann intégrable sur tout segment de* $[a, b[$ *et* **positive**. *Alors l'intégrale sur* $[a, b[$ *de* f *converge si et seulement si*

$$\exists\ M \geq 0\ \ \forall\ x \in [a, b[\ \ \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

Démonstration. Si $a < x < x' < b$, on a : $\int_a^{x'} f - \int_a^x f = \int_x^{x'} f \geq 0$ donc $x \longmapsto \int_a^x f$ est croissante. Ainsi, cette fonction admet une limite en b si et seulement si elle est majorée. $\square$

Théorème 3.4. *Soit* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann intégrables sur tout segment de* $[a, b[$ *et telles que pour tout* $t \in [a, b[$ *l'on ait :*

$$0 \leq f(t) \leq g(t).$$

(i) Alors, si $\int_a^b g$ *converge, l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge.*
(ii) Alors, si $\int_a^b f$ *diverge, l'intégrale* $\int_a^b g$ *diverge.*

3.3 Exemples fondamentaux

On présente deux exemples fondamentaux auxquels on se ramène très souvent pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée.

Intégrales de Riemann

Théorème 3.5. *(i) La fonction* $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ *a une intégrale convergente sur* $[1, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.
(ii) La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ *a une intégrale convergente sur* $]0, 1]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. On a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(1 - x^{1-\alpha}), \text{ si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x), \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ainsi, cette intégrale admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. De même on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}), \text{ si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x), \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Cette intégrale admet une limite finie en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. □

Ce résultat implique directement le suivant. Soit $a < b$ deux réels. Alors on a :

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1.$$

Intégrales de Bertrand

Théorème 3.6. *(i) La fonction* $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$ *a une intégrale convergente sur* $[e, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.
(ii) La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ *a une intégrale convergente sur* $]0, \frac{1}{e}]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Démonstration. Montrons (i). Si $\alpha > 1$, alors il existe $\gamma > 0$ tel que $1 < \gamma < \alpha$. On a alors $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = o(\frac{1}{t^\gamma})$, et donc la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ a une intégrale convergente sur $[e, +\infty[$. Si $\alpha = 1$, posons $u = \ln t$. Alors pour $x \in [e, +\infty[$ on a :

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{\ln x} \frac{du}{u^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1}(1 - (\ln x)^{1-\beta}), \text{ si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x), \text{ si } \beta = 1. \end{cases}$$

D'où le résultat. Montrons (ii). Supposons $\alpha < 1$. Alors pour γ tel que $\alpha < \gamma < 1$, on a $\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = o(\frac{1}{t^\gamma})$, d'où le résultat étant donné que l'intégrale sur $]0, 1]$ de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est convergente. De même que pour le cas (i), on trouve

$$\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t|\ln t|^\beta} = \int_{\ln x}^{-1} \frac{du}{|u|^\beta},$$

d'où le résultat. □

Exercice. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^u(1-x)^{1-u}}$ en fonction du paramètre u.

3.4 Fonctions à valeurs réelles ou complexe

A ce stade, il est naturel de se poser la question de la convergence d'une intégrale sur un intervalle quelconque d'une fonction qui n'est pas nécessairement positive (on parle en général d'intégrale impropre dans ce cas).

Dans cette partie, si cela n'est pas précisé on considérera des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On supposera aussi que f est Riemann intégrable sur tout segment de I.

Définition 3.2. *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une application Riemann intégrable sur tout segment de $[a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si il existe $\lim_{x\to b,\ x<b} \int_a^x f(t)dt$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale est **convergente** et on parle d'intégrale impropre. Notons que si $c \in [a, b[$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t)dt$ converge. Si l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente**. Un exemple typique (voir section 3.7) est celui de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

En 0, la fonction $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeante par continuité, donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}$ converge au sens de l'intégrale de Riemann, et donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}$ est faussement impropre. L'intégrale $\int_1^{+\infty}$ converge au sens de la définition 3.2. La preuve de ce point par une intégration par partie sera détaillée dans la section 3.7.

Par la propriété de Chasles, on a la propriété suivante :

Propriété 3.3. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de $[a, b[$ et soit $c \in [a, b[$. Alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.*

Cette propriété permet de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale d'une fonction f sur un intervalle $]a, b[$ en deux sous problèmes (sur $]a, c]$ puis sur $[c, b[$ avec c convenablement choisi).

Remarque 3.3. *Noter que $\int_{-x}^x t\ dt = 0$ pour tout $x \geq 0$, mais $\int_{\mathbb{R}} t\ dt$ est divergente. Pour étudier la convergence d'une intégrale $\int_{]a,b[} f$ il faut traiter chaque borne de l'intervalle séparément i.e. il faut étudier $\lim_{y\to b} \int_{[c,y]} f$ et $\lim_{x\to a} \int_{[x,c]} f$ où $c \in]a, b[$.*

On a le résultat suivant sur les opérations sur les intégrales impropres.

Propriété 3.4. *L'ensemble des intégrales impropres sur un intervalle $[a, b[$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, l'application $f \longmapsto \int_a^b f$ est linéaire de l'ensemble des applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$ d'intégrale convergente à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann intégrables sur tout segment de $[a, b[$. On suppose que $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} g$ convergents. On a alors pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_a^x (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^x f + \beta \int_a^x g,$$

et on déduit le résultat en passant à la limite lorsque $x \to b$. □

On ne peut pas faire d'intégration par partie ou utiliser la formule de changement de variable dans une intégrale impropre. On se ramènera donc toujours à l'intégrale d'une fonction sur un segment $[a, b]$ où la formule de changement de variable et l'intégration par partie sont bien définis. Ces deux outils sont très utiles pour étudier des intégrales impropres.

Exemple d'utilisation de la formule de changement de variable.
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de $[a,b[$ et soit $\varphi : [a,b[\to [\alpha,\beta[$ de classe C^1 telle que $\lim_{u\to b}\varphi(u) = \beta$. Pour $x \in [a,b[$ on peut alors faire le changement de variable sur $[a,x]$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)\ dt = \int_a^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du$$

Par conséquent, si $\int_{\varphi(a)}^{\beta} f$ converge, alors $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du$ converge et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\beta} f(t)\ dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du.$$

Exemple d'utilisation de l'intégration par parties.
Etant données deux fonctions $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ de classe C^1, on souhaite étudier la convergence de l'intégrale $\int_a^b fg'$. On effectuera l'intégration par parties sur un segment $[a,x]$:

$$\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt.$$

On étudiera le comportement de deux des trois termes (lorsque $x \to b$, $x \in [a,b[$) dans l'expression précédente pour en déduire la limite du troisième.

Le critère de Cauchy est fondamental pour étudier la convergence de l'intégrale d'une fonction. Il sert par exemple pour étudier la règle d'Abel pour des intégrales du type

$$\int_{[a,b[} f(t)g(t)dt,$$

(voir plus loin). Ici on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un élément x_0 à l'intérieur de I ou une extrémité de I. On rappelle qu'une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ admet une limite en un point x_0 si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy en x_0 i.e. :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x, x' \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I,\ |F(x) - F(x')| < \varepsilon.$$

Théorème 3.7. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de $[a,b[$. Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c \in [a,b[\ \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ c < u < v < b\ \Longrightarrow\ \left|\int_u^v f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Il s'agit du critère de Cauchy en $x = b$ pour l'application $x \longmapsto F(x) := \int_a^x f(t)dt$. □

3.5 Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque

De même que précédemment on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On introduit ici la définition de **fonction intégrable** qui est moins générale que la définition d'une intégrale généralisée (au sens intégrale impropre). Cependant ce concept est très utile en pratique.

Définition 3.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et Riemann intégrable sur tout segment de I. On dit que f est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale de la fonction $|f|$ converge sur I.*

De manière équivalente on dit aussi que l'intégrale de f **converge absolument** sur l'intervalle I.

Théorème 3.8. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction intégrable sur I. Alors pour toute suite croissante J_n de segments contenus dans I et de réunion I, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)_n$ est convergente. Sa limite est indépendante de la suite (J_n) et est notée $\int_I f$.*

Démonstration. Soit $q > p$ deux entiers. On a :

$$\left|\int_{J_q} f - \int_{J_p} f\right| \leq \int_{J_q \setminus J_p} |f| = \int_{J_q} |f| - \int_{J_p} |f|.$$

Comme l'intégrale sur I de $|f|$ converge, la suite $(\int_{J_n} |f|)$ converge dans $\mathbb{R}$ et est donc de Cauchy. La suite $(\int_{J_n} f)$ est donc aussi de Cauchy et converge.
Si maintenant (K_n) est une autre suite de segments vérifiant les mêmes propriétés, deux cas se présentent. Si pour tout n, $J_n \subset K_n$, alors

$$\left|\int_{K_n} f - \int_{J_n} f\right| \leq \int_{K_n \setminus J_n} |f| = \int_{K_n} |f| - \int_{J_n} |f|,$$

or $\int_{K_n} |f|$ et $\int_{J_n} |f|$ ont la même limite, et donc leur différence tend vers 0. Ainsi $\int_{K_n} f$ et $\int_{J_n} f$ ont même limite. Si maintenant J_n n'est pas forcément contenu dans K_n, il suffit d'écrire $\lim \int_{J_n} f = \lim \int_{J_n \cup K_n} f = \lim \int_{K_n} f$. □

Ainsi, si une fonction f est intégrable sur un intervalle I, alors son intégrale sur I converge.

Exemple : La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin^3 t + 7\cos t}{(t+1)^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car pour tout $t \geq 0$ on a $|f(t)| \leq \frac{8}{t^2}$.

Corollaire 3.1. *Si f est intégrable sur I, alors on a l'inégalité $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans la même inégalité écrite sur le segment J_n. □

Théorème 3.9. *Soit a et b tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$, et soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction intégrable. Alors la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ admet la limite $\int_{[a,b[} f$ au point b.*

Démonstration. Pour $a < x < y < b$, on a :

$$\left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| = \int_a^y |f| - \int_a^x |f|.$$

Par le critère de Cauchy, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $c < x < y < b \Longrightarrow |\int_a^y |f| - \int_a^x |f|| \leq \varepsilon$. Ainsi $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ vérifie également le critère de Cauchy, et donc admet une limite au point b. Soit alors b_n une suite croissante de limite b. On a :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^{b_n} f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b_n]} f = \int_{[a,b[} f.$$

□

On peut montrer facilement les propriétés suivantes.

Propriété 3.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de I.*
(i) Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur tout intervalle $I' \subset I$.
(ii) Si $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ est intégrable et $0 \leq |f| \leq \varphi$ sur I, alors f est intégrable sur I et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I \varphi$.

La propriété suivante fournit le lien entre une fonction intégrable sur un segment et Riemann intégrable sur ce même segment.

Propriété 3.6. *Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction Riemann intégrable. Alors, f est intégrable sur I et $\int_I f = \int_a^b f$. De plus, f est intégrable sur $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et toutes les intégrales de f sur ces intervalles sont égales.*

De même que dans le cas des applications positives, on a le résultat suivant (concernant la structure d'espace vectoriel des applications intégrables sur I).

Proposition 3.6. *Si f est g sont intégrables sur I et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I et*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

La propriété suivante est très importante et permet souvent de ramener la question de l'intégralité d'une fonction sur un intervalle quelconque à deux sous problèmes.

Proposition 3.7. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathrm{Int}(I)$ (l'intérieur de l'intervalle I). Alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a, +\infty[$. Dans ce cas on a :*

$$\int_I f = \int_{I\cap]-\infty,a]} f + \int_{I\cap[a,+\infty[} f. \tag{3.2}$$

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve dans le cas des applications positives (en passant par $|f|$). □

On termine par les règles de comparaison.

Théorème 3.10. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de $[a, b[$ et soit $g : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et intégrable sur $[a, b[$. On suppose qu'au voisinage de b on a $f = O(g)$, resp. $f = o(g)$. Alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_{[x,b[} f(t)dt = O(\int_{[x,b[} g(t)dt)$, resp. $\int_{[x,b[} f(t)dt = o(\int_{[x,b[} g(t)dt)$.*

Démonstration. On a $|f| = O(g)$, resp. $|f| = o(g)$ et $\left|\int_{[x,b[} f\right| \leq \int_{[x,b[} |f|$. On peut appliquer les résultats de comparaison obtenus dans le cas positif. □

Exemple. On considère $f(x) = e^{-x^2}$ sur $I = [0, +\infty[$. En $+\infty$ on a $e^{-x^2} = o(1/x^2)$ et $x \longmapsto 1/x^2$ est intégrable sur I par la proposition 3.5. Donc f est intégrable sur I.

3.6 Intégrales généralisées et prolongement par continuité

On s'intéresse au cas d'une intégrale d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui se prolonge par continuité en une extrémité de I. Dans ce cas, l'intégrale sur I de f converge au sens d'une intégrale usuelle (i.e. d'une fonction Riemann-intégrable sur un segment). Il s'agit alors d'un "faux problème".

Proposition 3.8. *Soit $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ une fonction positive Riemann-intégrable sur tout segment de I. On suppose qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$. Alors l'intégrale sur I de f converge.*

Démonstration. Soit $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), \ x \in [a, b[, \\ \ell, \ x = b. \end{cases}$$

La fonction $\bar{f}$ réalise un prolongement par continuité de f au point b. Elle est donc bornée au voisinage du point b. Comme elle est Riemann intégrable sur tout segment $J \subset [a,b[$, on déduit que $\bar{f}$ est Riemann-intégrable sur $[a,x]$, $x \in [a,b]$. De plus pour tout $x \in [a,b[$ on a (en utilisant $f \geq 0$) :

$$0 \leq \int_a^x f(t)\ dt = \int_a^x \bar{f}(t)\ dt \leq M := \int_a^b \bar{f}(t)\ dt.$$

On déduit de ce qui précède que $\sup_{J\subset[a,b[} \int_J f \leq M$ où J est un segment de $[a,b]$. Ceci permet de conclure que l'intégrale sur I de f converge. □

Ce qui précède montre aussi que l'on a $\int_{[a,b[} f = \int_a^b \bar{f}(t)dt$.

Exemples. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$, $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\tan(t)}}$ sont convergentes.

3.7 Intégrales semi-convergentes

A ce stade, on a vu la convergence des intégrales généralisées sur un intervalle quelconque ainsi que la notion d'absolue convergence (intégrabilité). Il est donc naturel de se poser la question de l'existence d'intégrales convergentes sur un intervalle quelconque mais non absolument convergentes. La définition ci-dessous clarifie cette question.

Définition 3.4. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction Riemann intégrable sur tout segment de I. On dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est* **semi-convergente** *si $\int_I f$ converge mais $\int_a^b |f|$ diverge.*

Autrement dit, l'intégrale de f converge sans être absolument convergente (i.e. f n'est pas intégrable). On a vu précédemment que si f est intégrable (i.e. son intégrale converge absolument), alors son intégrale converge. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple très important suivant.

Exemple fondamental : $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ avec $0 < \alpha \leq 1$. Notons d'abord que l'on a

$$\forall\, t > 0,\ \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Donc par les intégrales de Riemann, $t \longmapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ lorsque $\alpha > 1$. Supposons $0 < \alpha \leq 1$. Par une intégration par parties on a :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x^\alpha} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt. \tag{3.3}$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, on peut conclure que l'intégrale dans le membre de droite de (3.3) est absolument convergente, ce qui montre l'existence de $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$. De plus on a :

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t^\alpha}dt \geq \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1-\cos(2t)}{t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t^\alpha}dt. \tag{3.4}$$

On peut facilement montrer par une intégration par partie que la seconde intégrale dans la dernière inégalité de (3.4) converge (même méthode que ci-dessus). Maintenant, $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ par le critère de Riemann, ce qui montre que $t \longmapsto \frac{|\sin t|}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, on a montré que pour $0 < \alpha \leq 1$ l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ est **semi-convergente** i.e. $t \longmapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ mais $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ existe.

Remarque 3.4. *On définit la fonction sinus cardinal (couramment utilisée en traitement du signal) par :*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t > 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

On peut montrer que cette fonction est continue en $t = 0$ (à faire en exercice). Ainsi, ce qui précède montre que l'intégrale

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

converge. Cette intégrale est appelée **intégrale de Dirichlet** *et on a $I = \frac{\pi}{2}$ (voir exercice).*

En général, on utilise des intégrations par parties pour étudier la convergence de telles intégrales (voir également exercice sur le lemme d'Abel) ou bien le critère de Cauchy. Mentionnons la règle d'Abel (pour les intégrales).

Théorème 3.11. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :*

- *La fonction f est positive décroissante et de limite 0 au point b.*
- *Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, $\left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M$.*

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Démonstration. A faire en exercice en utilisant le critère de Cauchy. $\square$

4 Séries numériques

Dans toute cette section, si cela n'est pas précisé, E désignera l'espace $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

4.1 Généralités

Définition 4.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit une suite S_n par :*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

L'application $n \longmapsto S_n$ i.e. la nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général x_n. On la note $\sum x_n$ (parfois elle est également notée $\sum_{n\geq 0} x_n$).

Définition 4.2. *On appelle* **somme partielle d'indice** *n de la série $\sum x_n$ le nombre S_n.*

Remarque 4.1. *(i) L'expression $\sum x_n$ est formelle au sens où aucune valeur n'est donnée à cette expression.*
(ii) Par ailleurs, la notation $\sum x_n$ ne précise pas le rang n à partir duquel la série est considérée. Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n}$ est considérée à partir de $n = 1$ et non pas $n = 0$; de même on peut écrire $\sum \frac{\ln n}{n-3}$ $(n \geq 4)$. Il peut donc être commode de revenir à la nouvelle suite (S_n) afin de préciser ce rang.
(iii) Si la suite (x_n) est définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ i.e. pour $n \geq n_0$, on note en général $\sum_{n\geq n_0} x_n$ ou $\sum x_n$ $(n \geq n_0)$ la série associée à la suite (x_n).

Définition 4.3. *On dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Sa limite est alors appelée la somme de la série et est notée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Une série non convergente est dite divergente.

Il faut donc distinguer l'objet série $\sum x_n$ du réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ lorsque la série $\sum x_n$ converge.

Propriété 4.1. *Si les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série $\sum(\lambda x_n + \mu y_n)$ converge.*

Ainsi, l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que la série $\sum x_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel constitué des suites à valeurs dans E.

Exemple (série géométrique) : soit $a \in \mathbb{C}$. On a :

$$\sum a^n \text{ converge} \iff |a| < 1.$$

En effet pour $a \neq 1$ on a $\sum_{p=0}^{n} a^p = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Notons que si $\sum x_n$ converge et $\sum y_n$ diverge, alors $\sum(x_n + y_n)$ diverge. Mais si $\sum x_n$ diverge et $\sum y_n$ diverge, la série $\sum(x_n + y_n)$ peut converger ($x_n = 1/2^n + 2^n$, $y_n = -2^n$). Par ailleurs, deux séries qui diffèrent par un nombre fini de termes sont de **même nature**.

Remarque 4.2. *Etant donnée une suite (a_n) définie à partir d'un rang n_0, on définit une suite (x_n) par $x_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq n_0 + 1$ et $x_{n_0} = a_{n_0}$. Posons $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} x_k$ la somme partielle de rang n de la suite (x_n). Alors on a $S_n = a_n$, et donc la série $\sum x_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. La série $\sum_n (a_n - a_{n-1})$ est appelée* **série télescopique**.

Exemple. Pour $n \geq 1$, posons $x_n := \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. Etudier de même la série $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Définition 4.4. *Soit $\sum x_n$ une série convergente de somme S. Alors*

$$R_p := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p+1}^{n} x_k$$

existe dans E et est appelé le **reste d'ordre** *p de la série $\sum x_n$. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p + R_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$ et $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$ i.e. le reste d'une série convergente tend vers 0.*

Théorème 4.1. *Si la série $\sum x_n$ converge, alors la suite $(x_n)_n$ tend vers 0, i.e. :*

$$\sum x_n \text{ converge } \implies (x_n \to_{n\to\infty} 0).$$

Démonstration. On a $x_n = S_n - S_{n-1}$ et les deux suite (S_n) et (S_{n-1}) ont même limite $S := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. □

La réciproque est fausse (voir la série harmonique ci-dessous). On dit qu'une série est **grossièrement divergente** si son terme général ne tend pas vers 0. Le théorème suivant est le critère de Cauchy pour les séries.

Théorème 4.2. *Une série $\sum_n x_n$ converge si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ q \geq p \geq N,\ \|\sum_{n=p}^{q} x_n\| < \varepsilon.$$

Démonstration. Il s'agit du critère de Cauchy pour la suite des sommes partielles $(S_n)_n$. □

Notons que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge puisque

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

ainsi elle ne satisfait pas le critère de Cauchy. Notons également que son terme général tend vers 0.

4.2 Séries à termes positifs

Théorème 4.3. *Soit $\sum x_n$ une série à termes réels* **positifs**. *Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante. La série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, i.e. :*

$$\exists\ M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq M.$$

Démonstration. On a $S_n - S_{n-1} = x_n \geq 0$, ainsi la suite $(S_n)_n$ est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée. □

Si une série à termes positifs diverge, on a nécessairement $\lim S_n = +\infty$.

Corollaire 4.1. *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels telles que $0 \leq x_n \leq y_n$. Alors :*
(i) Si la série $\sum y_n$ converge, alors la série $\sum x_n$ converge également.
(ii) Si la série $\sum x_n$ diverge, alors la série $\sum y_n$ diverge.

Notons que dans l'énoncé précédent, on peut remplacer la condition $0 \le x_n \le y_n$ par $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0$ et $x_n = O(y_n)$.

Notation. Dans la suite, il arrivera fréquemment qu'on utilise la notation suivante. Etant données deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ à termes positifs, on note R_n, resp. R'_n le reste associé à $\sum x_n$, resp. à $\sum y_n$ et S_n, resp. S'_n la suite des sommes partielles associée à $\sum x_n$, resp. à $\sum y_n$.

Théorème 4.4. *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels positifs. On suppose que $x_n = O(y_n)$, resp. $x_n = o(y_n)$.*
(i) Si la série $\sum y_n$ converge alors la série $\sum x_n$ converge et $R_n = O(R'_n)$, resp. $R_n = o(R'_n)$.
(ii) Si la série $\sum x_n$ diverge alors la série $\sum y_n$ diverge et $S_n = O(S'_n)$, resp. $S_n = o(S'_n)$.

Démonstration. Les convergences et divergences résultent des résultats précédents et du fait que $x_n = o(y_n) \Longrightarrow x_n = O(y_n)$. Montrons (i) lorsque $x_n = o(y_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$ on ait $0 \le x_n \le \varepsilon y_n$. Alors pour tout $n \ge N$ on a $0 \le \sum_{n=p+1}^{\infty} x_p \le \varepsilon \sum_{n=p+1}^{\infty} y_p$, et donc $R_n = o(R'_n)$.

Montrons (ii) lorsque $x_n = o(y_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$ on ait $0 \le x_n \le \frac{\varepsilon}{2} y_n$. En sommant, on obtient pour $n > N$: $0 \le \sum_{p=N+1}^{n} x_p \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=N+1}^{n} y_p$, soit $S_n - S_N \le \frac{\varepsilon}{2}(S'_n - S'_N)$. Comme $\sum y_n$ diverge, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N'$ on ait $\frac{\varepsilon}{2} S'_n \ge S_N - \frac{\varepsilon}{2} S'_N$. Ainsi, pour $n > \max(N, N')$ on a : $0 \le S_n \le \frac{\varepsilon}{2} S'_n + \frac{\varepsilon}{2} S'_n = \varepsilon S'_n$ et donc $S_n = o(S'_n)$. $\square$

Corollaire 4.2. *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels strictement positifs telles que :*

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N,\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

Alors on a $x_n = O(y_n)$. En outre :
(i) Si la série $\sum y_n$ converge, alors la série $\sum x_n$ converge.
(ii) Si la série $\sum x_n$ diverge, alors la série $\sum y_n$ diverge.

Démonstration. Par récurrence on a pour tout $n \ge N$: $x_n \le y_n \frac{x_N}{y_N}$ donc $x_n = O(y_n)$. $\square$

Théorème 4.5. *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels telles que $y_n \ge 0$ et $x_n \sim y_n$. Alors les deux séries sont de même nature et :*
(i) Si la série $\sum y_n$ converge, alors la série $\sum x_n$ converge et $R_n \sim R'_n$.
(ii) Si la série $\sum y_n$ diverge, alors la série $\sum x_n$ diverge et $S_n \sim S'_n$.

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$ on ait $(1-\varepsilon)y_n \le x_n \le (1+\varepsilon)y_n$. Donc $x_n \ge 0$ pour $n \ge N$. Par ailleurs on a à la fois $x_n = O(y_n)$ et $y_n = O(x_n)$ et donc les deux séries sont de même nature (théorème 4.4). Supposons alors les séries convergentes. On a $|x_n - y_n| = o(y_n)$, on en déduit donc la convergence de la série $\sum |x_n - y_n|$ et $R''_n = o(R'_n)$ où R''_n est le reste de la série $\sum |x_n - y_n|$. Comme on a $|R_n - R'_n| \le R''_n$, on déduit que $|R_n - R'_n| = o(R'_n)$ ce qui montre que $R_n \sim R'_n$.

Supposons maintenant les séries divergentes. Alors soit la série $\sum |x_n - y_n|$ converge et comme $\lim S'_n = +\infty$ on a $S''_n = o(S'_n)$ où S''_n désigne la suite des sommes partielles de la série $\sum |x_n - y_n|$. Soit la série $\sum |x_n - y_n|$ diverge, et le théorème 4.4 montre que $S''_n = o(S'_n)$. On déduit $|S_n - S'_n| \le S''_n = o(S'_n)$, ce qui implique $S_n \sim S'_n$. $\square$

4.3 Comparaison avec des intégrales

Théorème 4.6. *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, décroissante positive. Posons $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ converge.*

Démonstration. En utilisant la décroissance de f, on a :

$$0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n).$$

La suite $(f(p))_p$ admettant une limite en $+\infty$ (par les hypothèses sur f), on déduit que la série $\sum(f(n-1) - f(n))$ converge et donc $\sum w_n$ converge. □

Théorème 4.7. *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, décroissante positive. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.*

Démonstration. Par le théorème 4.6, les séries $\sum \int_n^{n+1} f(t)dt$ et $\sum f(n)$ sont de même nature. Supposons f intégrable. Alors on déduit que la série $\sum \int_n^{n+1} f(t)dt$ converge et donc que $\sum f(n)$ converge. Supposons que $\sum f(n)$ converge. On déduit que $\sum \int_n^{n+1} f(t)dt$ converge. Si $[a, b] \subset [0, +\infty[$ on a alors $\int_a^b f \leq \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} f(t)dt$ pour N assez grand. Or $\sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t)dt$. Donc la fonction f est intégrable. □

4.4 Exemples fondamentaux : séries de Riemann et de Bertrand

Théorème 4.8. Séries de Riemann.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus :
(i) Si $\alpha > 1$ on a $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
(ii) Si $\alpha < 1$ on a $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
(iii) Si $\alpha = 1$ on a $S_n \sim \ln n$.

Démonstration. On suppose $\alpha \neq 1$. On pose $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $y_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ de sorte que

$$\frac{y_n}{x_n} = -\frac{(1 + \frac{1}{n})^{1-\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Le quotient précédent admet pour limite $\alpha - 1$. On a donc $x_n \sim \frac{1}{\alpha-1} y_n$ ce qui montre que les deux séries sont de même nature. On a $S'_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ qui admet une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, si $\alpha > 1$ on a $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} R'_n = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Si maintenant $\alpha < 1$ on a $S_n \sim \frac{1}{\alpha-1} S'_n = \frac{1}{1-\alpha}((n+1)^{1-\alpha} - 1) \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Enfin si $\alpha = 1$ on écrit $y_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et une étude analogue conduit au résultat. □

Théorème 4.9. Séries de Bertrand. *Soit α, β deux réels. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Démonstration. On applique le théorème 4.7 à la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ définie sur $[e, +\infty[$. La fonction f est intégrable sur $[e, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. En effet lorsque $\alpha > 1$ on conclut à l'aide du critère de Riemann. Lorsque $\alpha = 1$ le changement de variable $u = \ln t$ donne $\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{\ln x} \frac{du}{u^\beta}$ et on conclut également ce cas à l'aide du critère de Riemann. □

4.5 Séries absolument convergentes

Définition 4.5. *Soit (x_n) une suite à valeurs dans E. On dit que la série $\sum x_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum \|x_n\|$ converge.*

En pratique on manipule des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, la série $\sum x_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum |x_n|$ converge.

Théorème 4.10. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, on a $\| \sum_{n=q}^{p} x_n \| \leq \sum_{n=q}^{p} \|x_n\|$. Or si la série $\sum \|x_n\|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy. On déduit par l'inégalité précédente que la série $\sum x_n$ vérifie également le critère de Cauchy. □

On verra plus tard (voir séries alternées) que la réciproque est fausse. Notons la définition suivante (notez le lien avec les intégrales semi-convergentes).

Définition 4.6. *On dit qu'une série $\sum x_n$ est* **semi-convergente** *si elle est convergente sans être absolument convergente.*

On a les propriétés suivantes.

Propriété 4.2. *(i) Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries telles que $x_n = O(y_n)$ et telles que $\sum y_n$ est absolument convergente. Alors $\sum x_n$ est absolument convergente.*
(ii) Soit $\sum x_n$ une série et $\sum y_n$ une série à **termes positifs**. *On suppose qu'il existe $\ell \neq 0$, $\ell \in E$ tel que $x_n \sim \ell y_n$. Alors les deux séries sont de même nature, i.e. elles sont simultanément convergentes ou divergentes.*

Démonstration. Pour (i) il suffit de remarquer que $x_n = O(y_n) \iff \|x_n\| = O(\|y_n\|)$. Montrons (ii). Supposons la série $\sum y_n$ convergente. Alors comme $x_n = O(y_n)$ et $y_n \geq 0$ la série $\sum x_n$ est absolument convergente. Supposons réciproquement que $\sum x_n$ converge. Comme $x_n - \ell y_n = o(\ell y_n)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $\|x_n - \ell y_n\| \leq \frac{1}{2}\|\ell y_n\|$, d'où par l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{n=p}^{q} y_n \leq \frac{2}{\|\ell\|} \sum_{n=p}^{q} \|x_n\|$$

Comme la série $\sum x_n$ converge elle vérifie le critère de Cauchy, et donc il en est de même de la série $\sum y_n$ qui converge donc. □

4.6 Quelques règles

La règle suivante découle directement des propriétés des séries de Riemann. En particulier le point (i) est très utile en pratique.

Théorème 4.11. Règle de Riemann. *Soit $\sum x_n$ une série réelle.*
(i) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $x_n = O(1/n^\alpha)$, alors la série $\sum x_n$ converge absolument.
(ii) Si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$ tels que $x_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors la série $\sum x_n$ converge absolument si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration. La preuve résulte directement des séries de Riemann (à compléter en exercice). □

Théorème 4.12. Règle de d'Alembert *Soit $\sum x_n$ une série à valeurs dans E telle que pour tout n on ait $x_n \neq 0$ et telle que la suite $(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|})_n$ ait une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
(i) Si $\ell < 1$ la série $\sum x_n$ converge absolument.
(ii) Si $\ell > 1$ la série $\sum x_n$ diverge.

Démonstration. Montrons (i). Soit $\ell < \rho < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq \rho < 1$. Pa récurrence on a $\|x_n\| \leq \rho^{n-N}\|x_N\| = O(\rho^n)$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge ($\rho < 1$), la série $\sum x_n$ converge absolument.

Si $\ell > 1$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1$. Ainsi par récurrence on a $\|x_n\| > \|x_N\|$ pour tout $n > N$. La suite (x_n) ne tend pas vers 0. □

Attention, cette règle ne dit rien lorsque $\ell = 1$.

Théorème 4.13. Règle de Cauchy *Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E telle que la suite $\|x_n\|^{1/n}$ admette une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors :*
(i) Si $\ell < 1$ la série converge absolument.
(ii) Si $\ell > 1$ la série diverge.

Démonstration. Si $\ell < 1$, prenons ρ tel que $\ell < \rho < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|x_n\| \leq \rho^n$. Comme $\sum \rho^n$ converge car $\rho < 1$ on conclut par le théorème de comparaison. Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\|x_n\| > 1$, et donc (x_n) ne peut tendre vers 0. Donc la série diverge. □

Attention, le théorème ne dit rien si $\ell = 1$.

Remarque 4.3. *(i) Si la règle de D'Alembert renvoie $\ell = 1$, alors il est inutile d'essayer la règle de Cauchy (voir la section exercice).*
(ii) Si la règle de d'Alembert ne renvoie rien (i.e. u_{n+1}/u_n n'a pas de limite), il se peut que la règle de Cauchy soit efficace (voir la section exercice).

Théorème 4.14. Règle de Duhamel *Soit $\sum x_n$ une série à termes positifs telle que $x_n > 0$ pour tout n et telle que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$. Alors :*
(i) Si $\lambda > 1$ la série converge.
(ii) Si $\lambda < 1$ la série diverge.

Démonstration. A faire en exercice. □

4.7 Séries alternées

Cette section se résume au théorème suivant.

Théorème 4.15. Convergence des séries alternées. *Soit $(a_n)_n$ une suite de réels décroissante de limite 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus son reste R_n d'ordre n vérifie :*

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration. Par un calcul immédiat la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante, de plus $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ tend vers 0, ainsi ces deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et ont une limite commune S, limite de la suite (S_n). On a : $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, donc $0 \leq -R_{2n} \leq a_{2n+1}$ et $0 \leq S - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$, d'où les inégalités sur le reste. □

Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.
Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge (à faire en exercice par un développement limité), pourtant on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. La propriété sur les équivalents est valide pour les séries de **signe constant**.

4.8 Règle d'Abel

Cette section se résume au théorème suivant.

Théorème 4.16. *Soit (ε_n) une suite de nombre réels et (x_n) une suite de E. On suppose que :*
- *La suite (ε_n) tend vers 0 en décroissant.*
- *Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\|\sum_{k=0}^{n} x_k\| \leq M$.*

Alors la série $\sum \varepsilon_n x_n$ converge.

La preuve repose sur la transformation d'Abel qui consiste à réécrire une tranche de Cauchy de la série $\sum \varepsilon_n x_n$. On appelle S_n la suite des sommes partielles de la série $\sum x_n$. On a pour $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k x_k &= \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k S_k - \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k S_{k-1} = \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k S_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k + \varepsilon_{n+p} S_{n+p} - \varepsilon_n S_{n-1}\end{aligned}$$

La transformation d'Abel s'écrit donc :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k x_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k + \varepsilon_{n+p} S_{n+p} - \varepsilon_n S_{n-1}.}$$

On peut clairement voir une analogie entre cette expression et la formule d'intégration par parties pour les intégrales.

Démonstration. Par la transformation d'Abel et en utilisant que (ε_n) est positive décroissante, on a :

$$\| \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k x_k \| \leq M \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + M(\varepsilon_{n+p} + \varepsilon_n) = 2M\varepsilon_n.$$

Comme $\lim \varepsilon_n = 0$, on conclut que la série $\sum \varepsilon_n x_n$ vérifie le critère de Cauchy. □

Un exemple type d'application de la transformation d'Abel (utile notamment dans le chapitre qui porte sur les séries d'application) est l'étude de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

On peut montrer le résultat suivant (à faire en exercice) :
- Si $\alpha \leq 0$, son terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, alors la série converge absolument.
- Si $0 < \alpha < 1$, alors la série converge pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par la règle d'Abel en remarquant que

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{\frac{in\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \ \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

D'où le théorème récapitulatif suivant.

Théorème 4.17. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ deux réels. On considère la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$. Alors :*
- *Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.*
- *Si $\alpha > 1$, alors la série converge absolument.*
- *Si $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors la série est semi-convergente.*

En particulier, pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, les séries

$$\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$$

convergent. En effet, si $\Re(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$, alors pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$|\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta| = |\Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta})| \leq |\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|},$$

et de même pour la partie imaginaire.

4.9 Produit de Cauchy

Définition 4.7. *Etant données deux séries réelles ou complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$, alors le produit de Cauchy de ces deux séries ou série produit est défini par $\sum c_n$ où :*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 4.1. *Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont positives et convergentes, alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

Démonstration. Posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $A = \lim A_n$ et $B = \lim B_n$. Notons que l'on a $A = \sup A_n$ et $B = \sup B_n$ car les deux séries sont à termes positifs. Notons que l'on a aussi :

$$C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n},$$

(regarder les ensembles d'indices pour C_n et C_{2n-1} dans le plan (i, j)). On déduit que la suite croissante C_n est majorée, et donc elle converge vers une limite notée C. Par suite extraite $C_{2n-1} \to C$, d'où à la limite $C \leq AB \leq C$ et donc on conclut que $C = AB$. □

Théorème 4.18. *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy converge absolument et :*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k.$$

Démonstration. Posons $c'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$. Par le lemme précédent le produit de Cauchy de $\sum |a_k|$ et $\sum |b_k|$ converge et on a $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|)(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|)$. On déduit que la série $\sum c_n$ est absolument convergente et donc $\sum c_n$ converge.

Posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $A = \lim A_n$, $B = \lim B_n$, $A'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $B'_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$, $C'_n = \sum_{k=0}^{n} c'_k$, $A' = \lim A'_n$, $B' = \lim B'_n$ et $C' = \lim C'_n$. Par le lemme on a donc $C' = A'B'$. Par l'inégalité triangulaire (et en développant , on a :

$$|A_n B_n - C_n| \leq A'_n B'_n - C'_n.$$

Or par le lemme $A'_n B'_n - C'_n$ tend vers 0, on déduit donc que la suite (C_n) converge et que $\lim C_n = AB$ i.e. $C = AB$. □

Application : soit $a_n = x^n/n!$ et $b_n = y^n/n!$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Par la règle de d'Alembert, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. En utilisant la formule du binôme et le produit de Cauchy, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right),$$

ce qui équivaut à $e^{x+y} = e^x e^y$ (voir le chapitre sur les séries entières).

Remarque 4.4. *(i) Le théorème tombe en défaut dans le cas de deux séries convergentes (non absolument convergentes) : prendre $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (voir exercice).*
(ii) Le théorème reste valide si seulement l'une des deux séries converge absolument (et l'autre est semi-convergente), mais ceci dépasse le cadre du cours. Il s'agit du **théorème de Mertens** *sur les produits de Cauchy.*

4.10 Sommation par paquets

Cette section se résume au théorème suivant (sommation par paquets).

Théorème 4.19. *Soit $\sum x_n$ une série à valeurs dans E, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On pose : $y_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} x_k$ et pour $n \geq 1$ $y_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k$. Alors :*
(i) Si la série $\sum x_n$ converge, la série $\sum y_n$ converge et a même somme.
(ii) La réciproque est vraie dans les deux cas suivants :

- *La suite x_n tend vers 0 et la suite $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ est majorée.*
- *On a $E = \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\varphi(n-1), \varphi(n)]$ tous les x_k ont même signe.*

Démonstration. Posons S_n la suite des sommes partielles de la série $\sum x_n$ et notons S'_n la suite des sommes partielles de la série $\sum y_n$. On a immédiatement (en convenant que $\varphi(-1) = -1$) :

$$S'_n = \sum_{p=0}^{n} y_p = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} x_k = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} x_k = S_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre (i) car (S'_n) est extraite de (S_n) par le calcul précédent. Montrons le premier point de (ii). Posons $S' := \sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ et soit $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n on ait $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p_n l'unique entier tel que $\varphi(p_n - 1) < n \leq \varphi(p_n)$. On a alors :

$$S'_{p_n} - S_n = S_{\varphi(p_n)} - S_n = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n)} x_k$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2C}$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\|S'_{p_n} - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n)} \|x_k\| \leq (\varphi(p_n) - n)\frac{\varepsilon}{2C} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or par hypothèse il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq N'$ on ait $\|S' - S'_q\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour $n \geq \max(N, \varphi(N'))$ on a $p_n \geq N'$ et donc :

$$\|S' - S_n\| \leq \|S' - S'_{p_n}\| + \|S'_{p_n} - S_n\| < \varepsilon,$$

et donc la série $\sum x_k$ converge.

Pour montrer le second point on a en utilisant que les x_k ont tous le même signe dans un paquet :

$$|S'_{p_n} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{\varphi(p_N)} x_k| = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n)} |x_k| \leq \sum_{k=\varphi(p_n-1)+1}^{\varphi(p_n)} |x_k| = |\sum_{k=\varphi(p_n-1)+1}^{\varphi(p_n)} x_k| = |y_{p_n}|$$

Comme la série $\sum y_p$ converge, on a pour $q \geq N$ $|y_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour tout $n \geq \varphi(N)$ on a $p_n \geq N$ (car $\varphi(p_n) \geq n \geq \varphi(N)$ et donc comme φ est strictement croissante $p_n \geq N$) et donc $|S'_{p_n} - S_n| \leq |y_{p_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on conclut de manière analogue au premier point. □

Exemple 1. Considérons la série $\sum(-1)^n$ et soit $x_n = (-1)^n$ et $\varphi(n) = 2n$. Alors on a $y_n = 0$ et $\sum y_n$ converge, mais $\sum x_n$ diverge.

Exemple 2. On considère la série harmonique en supprimant tous les termes d'indices utilisant 7 dans leur écriture décimale. En sommant entre 2 puissances de 10 consécutives, montrer que cette série converge (à faire en exercice).

5 Suites sommables, familles sommables, séries doubles

5.1 Suites sommables

On commence par les suites de réels positifs sommables.

Définition 5.1. *On dit qu'une suite* (u_n) *de nombre réels positifs est* **sommable** *si il existe un réel* $M \geq 0$ *tel que pour toute partie finie* $J \subset \mathbb{N}$ *on ait* $s_J := \sum_{n\in J} u_n \leq M$. *On définit alors la somme de la famille par* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_J s_J$.

On a les propriétés immédiates suivantes.

Propriété 5.1. *(i) La somme de deux suites sommables* (u_n) *et* (v_n) *avec* $u_n \geq 0$ *et* $v_n \geq 0$ *est sommable et on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n.$$

(ii) Si $\lambda \geq 0$ *et* (u_n) *est une suite sommable, alors la suite* (λu_n) *est sommable et on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

(iii) Si (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites telles que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* n, *et si* (v_n) *est sommable, alors la suite* (u_n) *est sommable également.*

Théorème 5.1. *Une suite de réels positifs* (u_n) *est sommable si et seulement si il existe* $M \geq 0$ *et une suite* (J_n) *croissante de parties finies de* $\mathbb{N}$ *dont la réunion est* $\mathbb{N}$ *et telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait* $\sum_{p\in J_n} u_p \leq M$. *Dans ces conditions on a pour toute suite* (J_n) *de ce type :*

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} \sum_{p\in J} u_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p\in J_n} u_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p\in J_n} u_p, \tag{5.1}$$

où $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ *désigne l'ensemble des parties finies non vides de* $\mathbb{N}$.

Démonstration. Si la suite est sommable n'importe quelle suite croissante (J_n) de parties finies de $\mathbb{N}$ dont la réunion est $\mathbb{N}$ convient. Réciproquement, supposons données une constante $M \geq 0$ et une telle suite (J_n). Soit maintenant $J \subset \mathbb{N}$ une partie finie. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $J \subset J_n$. Ainsi $\sum_{p\in J} u_p \leq \sum_{p\in J_N} u_p \leq M$ et donc la famille est sommable.

Puisque J_n est finie, on a $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_{J_n} \leq \sup_{J\subset\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} s_J$ où $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Inversement étant donnée $J \subset \mathbb{N}$ une partie finie de $\mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $J \subset J_N$. D'où $s_J \leq s_{J_N} \leq \sup_n s_{J_n}$. On obtient donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_{J_n} = \sup_{J\subset\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} s_J$, ce qui montre (5.1) en utilisant que (s_{J_n}) est croissante. $\square$

En appliquant le théorème précédent à la suite $J_n = [0, n] \cap \mathbb{N}$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.1. *Une suite de réels positifs est sommable si et seulement si la série* $\sum u_n$ *converge.*

Notons que la somme de la suite sommable (u_n) à termes positifs vaut exactement la somme de la série $\sum u_n$, i.e. :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

On étudie maintenant les suites de nombres réels ou complexes sommables.

Définition 5.2. *Une suite (u_n) de nombres réels ou complexes est dite* **sommable** *si la suite $(|u_n|)_n$ est sommable.*

Proposition 5.1. *Une suite (u_n) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Démonstration. Par définition (u_n) est sommable si et seulement si $(|u_n|)_n$ l'est c.a.d. si et seulement si $\sum |u_n|$ converge i.e. si et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument. □

Etant donnée une suite (u_n), on note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$, $u_n^- = -\min(u_n, 0)$ et on a $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

Proposition 5.2. *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) La suite (u_n) est sommable.
(ii) Les deux suite (u_n^+) et (u_n^-) sont sommables.
(iii) Les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.

Démonstration. Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, d'où le résultat en utilisant que (u_n) est absolument convergente. L'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$ découle directement de la proposition 5.1. Pour montrer que $(iii) \Longrightarrow (i)$, on utilise que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. □

Théorème 5.2. *Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes. Soit (J_n) une suite croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ dont la réunion est $\mathbb{N}$ et soit $s_{J_n} := \sum_{p \in J_n} u_p$. Alors la suite (s_{J_n}) est convergente et sa limite est indépendante de la suite (J_n) choisie. On l'appelle la somme de la famille sommable (u_n) et on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. De plus on a :*

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \,. \tag{5.2}$$

Démonstration. Posons $s'_{J_n} := \sum_{p\in J_n} |u_p|$ et soit $q \geq p$ deux entiers. On a :

$$|s_{J_q} - s_{J_p}| = \left| \sum_{n\in J_q \setminus J_p} u_n \right| \leq \sum_{n\in J_q\setminus J_p} |u_n| = s'_{J_q} - s'_{J_p}.$$

Comme la suite est sommable il en est de même de la suite $(|u_n|)$ et donc (s'_{J_n}) converge et est donc de Cauchy. Par conséquent, la suite (s_{J_n}) est également une suite de Cauchy et converge.

Considérons maintenant deux suites croissantes (J_n) et (K_n) de parties finies de $\mathbb{N}$ et de réunion $\mathbb{N}$. Supposons tout d'abord $J_n \subset K_n$. Alors on a :

$$|s_{J_n} - s_{K_n}| = \left| \sum_{p\in K_n\setminus J_n} u_p \right| \leq \sum_{p\in K_n\setminus J_n} |u_p| = s'_{K_n} - s'_{J_n}.$$

Or les deux suite (s'_{K_n}) et (s'_{J_n}) ont la même limite (d'après le cas des suites positives), et on déduit que $\lim_{n\to\infty} |s_{J_n} - s_{K_n}| = 0$. Dans le cas général sur les suites (J_n) et (K_n), on considère $L_n := J_n \cup K_n$ et on applique ce qui précède successivement à (J_n) et (L_n) puis à (K_n) et (L_n).

Enfin, pour montrer l'inégalité (5.2), on utilise que $|\sum_{n\in J} u_n| \leq \sum_{n\in J} |u_n|$ pour tout partie finie $J \subset \mathbb{N}$, d'où le résultat. □

Notons que la somme de la suite sommable (u_n) de réels vaut exactement la somme de la série absolument convergente, i.e.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

De plus, dans ce cas, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^-.$$

Enfin, on peut définir l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres réels ou complexes de la façon suivante.

Proposition 5.3. *L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres réels ou complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $u \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est une norme sur cet espace. De plus l'application $u \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est linéaire de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. La propriété d'espace vectoriel résulte de la proposition 5.1. On vérifie également que $u \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est une norme. Par ailleurs, on a d'après le théorème 5.2 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n\in J_p} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{p\to\infty} \sum_{n\in J_p} u_n + \beta \lim_{p\to\infty} \sum_{n\in J_p} v_n = \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \beta \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n,$$

d'où la linéarité de l'application $u \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. □

5.2 Commutative convergence

On appelle permutation de $\mathbb{N}$ toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

Proposition 5.4. *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de nombre réels ou complexes. Alors pour tout permutation φ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

ou de façon équivalente $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Démonstration. Observons que pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, on a $\sum_{q\in J} |u_{\varphi(q)}| = \sum_{p\in\varphi(J)} |u_p| \leq \sum_{p=0}^{\max(\varphi(J))} |u_p| \leq M$ où $M := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, en prenant $J = \{0, 1, ..., n\}$ nous avons $\sum_{q=0}^{n} |u_{\varphi(q)}| \leq M$, ce qui nous dit que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument.

Comme la suite (u_n) est absolument convergente, elle est sommable, et donc il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Considérons maintenant une suite $(J_n)_n$ croissante de parties finies de $\mathbb{N}$, et dont la réunion vaut $\mathbb{N}$. Alors la suite $(\varphi(J_n))_n$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(J_n)_n$. Ainsi, d'après le théorème 5.2 on a :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p\in\varphi(J_n)} u_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{q\in J_n} u_{\varphi(q)} = \sum_{q\in\mathbb{N}} u_{\varphi(q)},$$

d'où le résultat. □

La condition de convergence absolue est indispensable dans le résultat ci-dessus comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Considérons la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit $S = \ln 2$ sa somme (voir exercice pour le calcul de cette somme). Posons $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(3k+1) = 2k+1$, $\varphi(3k+2) = 4k+2$ et $\varphi(3k+3) = 4k+4$. On peut vérifier que φ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. De plus on a :

$$x_{\varphi(3k+1)} + x_{\varphi(3k+2)} + x_{\varphi(3k+2)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2}(x_{2k+1} + x_{2k+2}).$$

On déduit que la série $\sum_n x_{\varphi(n)}$ converge vers $\frac{S}{2}$.

Définition 5.3. *Soit $\sum a_n$ à valeurs dans E. On dit que la série $\sum a_n$ est* **commutativement convergente** *si pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$ la série $\sum a_{\varphi(n)}$ converge.*

Dans la suite on énonce deux résultats plus difficiles et qui seront admis (hors programme).

Théorème 5.3. *Une série $\sum a_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. On a alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}, \text{ pour toute permutation } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Par la proposition 5.4 on a montré que si $\sum a_n$ converge absolument, alors la série est commutativement convergente.

La réciproque est plus délicate à montrer. Pour cela l'idée est de raisonner par l'absurde et de supposer que la série $\sum |a_n|$ diverge. On a alors nécessairement que l'une des deux séries $\sum a_n^+$ ou $\sum a_n^-$ diverge (où l'on a noté $a_n^+ = \max(a_n, 0)$, $a_n^- = \min(a_n, 0)$ et $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$). On suppose par exemple que $\sum a_n^+$ diverge. On peut écrire $a_n^+ = a_{\varphi(n)}$ comme suite extraite de (a_n). La difficulté est ensuite de construire une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ à partir de a_n^+ et a_n^- qui soit telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ diverge. Ceci contredira l'hypothèse de commutative convergence. Pour plus de détails sur cette preuve, on peut se reporter à [4] ou bien à `http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Convergence_commutative.pdf`

On a aussi le résultat intéressant suivant (également admis).

Théorème 5.4. *Soit $\sum u_n$ une série de réels semi-convergente. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ soit semi-convergente et de somme λ.*

Exemple (suite de l'exemple précédent). Comme on a déjà vu, la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente. Etant donnés deux entiers p et q, on peut construire explicitement une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\sigma(n)-1}}{n},$$

converge vers $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$. Posons $H_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ et rappelons que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1),$$

où γ désigne la constante d'Euler. On construit maintenant une nouvelle série en prenant p termes positifs, puis q termes négatifs, puis p termes positifs,... et on appelle $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de cette série. Par exemple, si $p = 3$ et $q = 2$, on considère la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}.$$

Ainsi on peut écrire $S'_m = S_{m(p+q)}$ où S_i désigne la suite des sommes partielles de la série harmonique alternée. On a donc :

$$\begin{aligned}
S'_m &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2qm}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2mp}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2pm}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2qm}\right) \\
&= H_{2mp} - \frac{1}{2}H_{mp} - \frac{1}{2}H_{mq} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

5.3 Cardinaux et ensembles dénombrables

5.3.1 Cardinaux

Rappel sur les relations d'équivalence.
Soit E un ensemble non vide. On dit qu'une relation binaire R sur E est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est réflexive (i.e. $\forall\ x \in E,\ xRx$), transitive (i.e. $\forall\ x, y, z, \in E,\ xRy$ et $yRz \Longrightarrow xRz$), et si elle est symétrique (i.e. $\forall\ x, y \in E,\ xRy \Longrightarrow yRx$). Par exemple :
– La relation d'égalité sur $\mathbb{R}$ est une équivalence.
– Le parallélisme sur l'ensemble des droites du plan est une relation d'équivalence.

Définition 5.4. *Soit X et Y deux ensembles non vides. On dit que X est équipotent à Y et l'on note X eq Y s'il existe une bijection de X sur Y.*

Propriété 5.2. *La relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur la collection de tous les ensembles dont les classes définissent les cardinaux.*

Démonstration. Un ensemble X est équipotent à lui-même. Si une fonction $f : X \to Y$ est bijective, alors elle admet une réciproque $f^{-1} : Y \to X$, et donc si X est équipotent à Y, Y est équipotent à X. Enfin, si X eq Y et Y eq Z, alors X eq Z. □

Soit X un ensemble non vide. On note alors card X la class d'équivalence de X.

Exemples. 1) $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents car l'application définie par

$$\begin{array}{cl} \mathcal{P}(X) & \to \{0,1\}^X \\ A & \longmapsto \mathbb{1}_A, \end{array} \quad \text{avec } \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

est une bijection.
2) $\mathbb{N}$ est équipotent à $2\mathbb{N} = \{2n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ car $n \longmapsto 2n$ est une bijection.

Proposition 5.5. *Soit X un ensemble. Alors X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents et plus précisément il n'existe pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$.*

Démonstration. Supposons l'existence d'une telle application. Alors il existerait un antécédent a de l'ensemble $A := \{x \in X\ ;\ x \notin f(x)\}$ i.e. un élement $a \in X$ tel que $f(a) = A$. Or si $a \in A$, alors $a \notin f(a) = A$ et si $a \notin A$, alors $a \in f(a) = A$ d'où une contradiction. □

Définition 5.5. *(i) S'il existe une injection de X dans Y on note* card $X \leq$ card Y.
(ii) Si card $X \leq$ card Y *et si X et Y ne sont pas équipotents on note* card $X <$ card Y.

Le théorème suivant est admis et peut être sauté [1, 3].

Théorème 5.5. Bernstein *Soit X et Y deux ensembles non vides.*
(i) S'il existe une injection de X dans Y alors il existe une surjection de Y dans X.
(ii) S'il existe une surjection de X dans Y alors il existe une injection de Y dans X.
(iii) S'il existe une injection, resp. une surjection de X dans Y et une injection, resp. une surjection de Y dans X, alors X et Y sont équipotents.
(iv) Si X et Y sont deux ensembles, il se trouvent toujours dans une et une seule des trois situations :

$$\text{card } X < \text{card } Y \text{ ou card } X = \text{card } Y \text{ ou card } X > \text{card } Y.$$

Propriété 5.3. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale sur les cardinaux.*

Démonstration. Pour tout ensemble X, l'application identité sur X notée Id_X étant injective, on déduit que la relation est réflexive. L'antisymétrie découle du point (iii). La composée de deux applications injectives étant injective, la relation $\leq$ est donc transitive. La relation est totale par (iv). □

Exemples. Si $X \subset Y$ alors card $X \leq$ card Y. On a également card $\mathbb{N} <$ card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Définition 5.6. *Un ensemble est infini s'il existe $x_0 \in X$ et une injection de X dans $X \backslash \{x_0\}$. Dans le cas contraire X est dit fini et l'on note* card $X < \infty$.

Exemple. $\mathbb{N}$ est infini en considérant l'injection $n \longmapsto n+1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Proposition 5.6. *S'il existe une injection de X dans Y et si X est infini alors Y est infini. En particulier dès qu'un ensemble contient une partie infinie, alors il est lui-même infini.*

Démonstration. Soit i une injection de X dans Y et φ une injection de X dans $X \backslash \{x_0\}$. Alors l'application ψ définie par :

$$\begin{cases} \psi(y) = y \text{ si } y \in Y \backslash i(X), \\ \psi(y) = i(\varphi(x) \text{ si } y = i(x) \in i(X), \end{cases}$$

est une injection de Y dans $Y \backslash \{i(x_0)\}$. □

Proposition 5.7. *Un ensemble est infini si et seulement s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X.*

Démonstration. Soit X un ensemble infini. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(n+1)$ éléments $x_0, ..., x_n$ de X et une injection i_n de X dans $X \backslash \{x_0, ...x_n\}$. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai au rang n. D'après la proposition précédente, $X \backslash \{x_0, ...x_n\}$ est infini, donc il existe une injection j de $X \backslash \{x_0, ...x_n\}$ dans $X \backslash \{x_0, ...x_n, x_{n+1}\}$ où $x_{n+1} \in X \backslash \{x_0, ...x_n\}$. On peut vérifier que $j \circ i_n$ est une injection de X dans $X \backslash \{x_0, ...x_n, x_{n+1}\}$. On a donc construit une injection de $\mathbb{N}$ dans X par $n \longmapsto x_n$. Réciproquement, comme $\mathbb{N}$ est infini, alors l'existence d'une injection de $\mathbb{N}$ dans X entraine que X est infini d'après la proposition précédente à nouveau. □

Remarque 5.1.
- *Un ensemble X est fini si et seulement si* card $X <$ card $\mathbb{N}$
- *Un ensemble X est infini si et seulement si* card $X \geq$ card $\mathbb{N}$
- *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont infinis. Cependant on a vu que* card $\mathbb{N} <$ card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, donc il y a plusieurs "classes" d'ensembles infinis.*

5.3.2 Ensembles dénombrables

Définition 5.7. *(i) L'ensemble X est dit* **dénombrable** *si et seulement s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$ i.e.* card $X \leq$ card $\mathbb{N}$.
(ii) L'ensemble X est dit infini dénombrable si X est équipotent à $\mathbb{N}$ i.e. card $X =$ card $\mathbb{N}$. *On note $\aleph^0$ le cardinal infini dénombrable.*
(iii) Si card $X >$ card $\mathbb{N}$, *alors X est dit non dénombrable ou parfois infini non dénombrable.*

Remarque 5.2. *(i) En particulier l'ensemble vide contient 0 éléments et est dénombrable.*
(ii) On parle parfois d'ensembles au plus dénombrables. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable si il est fini ou dénombrable.

On a les propriétés immédiates suivantes.

Proposition 5.8. *(i) L'ensemble X est dénombrable si et seulement si il est fini ou infini dénombrable.*
(ii) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
(iii) Si X est infini, Y dénombrable, et $X \subset Y$, alors Y est infini dénombrable.

Exemple 5.1.
- *$\mathbb{Z}$ est infini dénombrable (considérer l'application $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ défini par $\Phi(2n) = n$ et $\Phi(2n-1) = -n$).*
- *$\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable (considérer l'application $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ défini par $\Phi(p, q) = q + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$).*

- $\mathbb{Q}$ *est infini dénombrable. (considérer l'application* $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *défini par* $\Phi(r) = (p, q)$ *où* $r = p/q$ *avec* $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$*).*

Propriété 5.4. *(i) Pour tout* $d \geq 1$*, si* $X_1,\ldots,X_d$ *sont dénombrables, alors le produit cartésien* $X_1 \times \cdots \times X_d$ *est dénombrable. En outre, si tous les* X_i *sont non vides,* $X_1 \times \cdots \times X_d$ *est infini dénombrable dès que l'un des* X_i *est infini dénombrable.*
(ii) Une réunion d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. Montrons (i) par récurrence sur d. On suppose $d = 2$. Les ensembles X_1 et X_2 étant dénombrables, il existe deux injections Φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Alors l'application $\Phi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\Phi((x_1, x_2)) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2))$ est injective, et donc le produit $X_1 \times X_2$ est dénombrable. Supposons maintenant que X_2 soit infini dénombrable i.e. X_2 équipotent à $\mathbb{N}$. Soit $x_1 \in X_1$ un élément fixé. Alors $\mathbb{N}$ s'injecte dans $X_1 \times X_2$ par l'application $\psi(n) = (x_1, \Phi_2^{-1}(n))$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang d. Notons que $X_1 \times \cdots \times X_{d+1} = (X_1 \times \cdots \times X_d) \times X_{d+1}$, et quitte à réindexer on peut toujours supposer que X_{d+1} est infini dénombrable. Ainsi on conclut par le cas $d = 2$.

Montrons (ii). Posons $X = \cup_{i \in I} X_i$ où $I \subset \mathbb{N}$, et X_i, $i \in I$ est dénombrable. Pour tout $i \in I$, on considère une injection φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $x \in X$, on définit l'entier $n(x) := \min\{i \in I \ ; \ x \in X_i\}$). Soit maintenant l'application $\Phi : X \to \mathbb{N}^2$ définie par :

$$\Phi(x) = (n(x), \varphi_{n(x)}(x)).$$

Montrons que Φ est injective. Soit $x \neq y$. Alors soit $n(x) \neq n(y)$ et dans ce cas $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, soit $n(x) = n(y) := p$ ce qui implique $x, y \in X_p$, et alors $\varphi_p(x) \neq \varphi_p(y)$ car φ_p est injective. Dans ce cas on a donc $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Donc Φ est injective et X est dénombrable. □

Exemple. $\mathbb{N}^d$ est dénombrable. Le résultat suivant est fondamental en analyse.

Théorème 5.6. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est infini non dénombrable. De plus* $\mathrm{card}\ \mathbb{R} = \mathrm{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N})$*.*

Démonstration. Considérons l'application $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, \frac{1}{2}]$ définie par :

$$\Phi(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

où $x := (x_n)_{n \geq 0}$. Montrons que Φ est une injection. Soit $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $x \neq y$. On peut donc considérer l'entier $\ell := \min\{n \ ; \ x_n \neq y_n\}$. On a :

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^{\ell+1}} > 0.$$

Par conséquent, Φ est injective. Or $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est équipotent à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $[0, 1/2]$ par Φ. Comme $[0, 1/2]$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ par l'injection canonique, on déduit que

$$\mathrm{card}\ \mathbb{N} < \mathrm{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}\ \mathbb{R}.$$

Par conséquent, comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable, il en est de même de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathrm{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}\ \mathbb{R}$. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to]0, 1[$ définie par $f(x) := \frac{e^x}{1+e^x}$. Cette application étant bijective, on a donc $\mathrm{card}\ [0, 1[= \mathrm{card}\ \mathbb{R}$ en utilisant $]0, 1[\subset [0, 1[$.

On montre maintenant que $\mathrm{card}\ [0, 1[= \mathrm{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N})$ à l'aide du développement dyadique d'un réel. Soit $g : [0, 1[\to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'application définie par $g(x) := (x_n)_n$ où l'on a écrit :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

On peut montrer que $x_0 = E(2x)$ et $x_n = E\left(2^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{2^{k+1}}\right)\right)$ pour $n \geq 1$. L'application g étant injective, il vient card $\mathbb{R} =$ card $[0, 1[\leq$ card $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} =$ card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. □

Propriété 5.5. *Un ensemble I est dénombrable si et seulement si il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de I dont la réunion est I.*

Démonstration. La condition est nécessaire car $\mathbb{N}$ vérifie cette propriété et donc tout ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ également. Inversement, supposons qu'il existe une telle suite croissante (J_n). Posons $K_0 = J_0$ et $K_n = J_n \backslash J_{n-1}$. On a $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et les ensembles K_n sont deux à deux disjoints. Soit $d_n =$ card K_n. Considérons une bijection φ_n de K_n sur $\{d_0 + \cdots + d_{n-1}, ..., d_0 + \cdots + d_{n-1} + d_n - 1\}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{N}$ l'application définie par $\varphi_{|K_n} = \varphi_n$. Alors φ est injective de I dans $\mathbb{N}$ et donc I est dénombrable par définition. □

5.4 Familles sommables de nombres réels ou complexes

Rappelons qu'une famille d'éléments d'un ensemble non vide X et qu'on note $(x_i)_{i\in I}$ est la donnée d'une applications d'un ensemble non vide I dans X définie par $i \longmapsto x_i$ avec $x_i \in X$. On dit que I est l'ensemble d'indices de la famille. Quand I est dénombrable (resp. fini), on dit que la famille est dénombrable (resp. finie).

On considère maintenant une famille $(u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I (I est un ensemble d'indice quelconque pour le moment).

Définition 5.8. *On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs est sommable s'il existe un nombre réel positif M tel que pour toute partie finie $J \subset I$, on ait $s_J := \sum_{i\in J} u_i \leq M$. On définit alors la somme de la famille par $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\subset I} s_J$ où le supremum est pris sur tous les ensembles $J \subset I$ finis.*

On a le résultat suivant qui permet de se ramener aux ensembles d'indices dénombrables.

Lemme 5.1. *Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors le support de la famille $\{i \in I \ ; \ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit un réel $M \geq \sum_{i\in I} u_i$. Pour chaque entier $p \geq 1$, soit I_p l'ensemble $I_p := \{i \in I \ ; \ u_i > \frac{1}{p}\}$. L'ensemble I_p est fini et on a :

$$M \geq \sum_{i\in I} u_i \geq \sum_{i\in I_p} u_i \geq \frac{\text{card } I_p}{p},$$

et donc card $I_p \leq pM$. Ainsi $\cup_{p\in\mathbb{N}^*} I_p$ est dénombrable et contient le support de la famille. D'où le résultat. □

Ainsi, on considèrera uniquement des ensembles d'indices I **dénombrables**. Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble dénombrable, on va considérer (comme pour le cas des suites sommables) des parties finies J de I, et des suites croissantes J_n de parties finies de I dont la réunion est I.

Propriété 5.6. *Soit I un ensemble dénombrable I. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs est sommable si et seulement si il existe $M \geq 0$ et une suite croissante (J_n) de parties finies de I dont la réunion est I et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\sum_{p\in J_n} u_p \leq M$. Alors on a pour toute suite (J_n) de ce type :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_n \sum_{i\in J_n} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i.$$

Pour une famille de nombres réels ou complexes on a les propriétés analogues.

Définition 5.9. *Une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels ou complexes est dite sommable si et seulement si la famille* $(|u_i|)_{i\in I}$ *est sommable.*

Proposition 5.9. *La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si les deux familles* (u_i^+) *et* (u_i^-) *sont sommables.*

Démonstration. On utilise l'égalité $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$ et les inégalités $0 \le u_i^+ \le |u_i|$ et $0 \le u_i^- \le |u_i|$ pour $i \in I$. □

On définit alors la somme de la famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ par

$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Propriété 5.7. *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille dénombrable de nombres réels ou complexe qui est sommable. Soit* (J_n) *une suite croissante de parties finies de* I *dont la réunion est* I*, et* $s_{J_n} := \sum_{p\in J_n} u_p$*. Alors, la suite* (s_{J_n}) *est convergente, sa limite est égale à* $\sum_{i\in I} u_i$ *et donc elle est indépendante de la suite* (J_n) *choisie. De plus on a :*

$$|\sum_{i\in I} u_i| \le \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Démonstration. Reprendre certains arguments utilisés dans des démonstrations précédentes. A faire en exercice. □

Proposition 5.10. *Une famille de réels* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si elle est absolument convergente. Dans ce cas on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Démonstration. Supposons la série $\sum x_n$ absolument convergente. La suite $I_n := [\![0, n]\!]$ est croissante et $\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}$. De plus $\sum_{k\in I_n} |u_k| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ d'où le résultat par la propriété 5.6. Supposons la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable et soit J_n une suite croissante d'intervalles de réunion $\mathbb{N}$ comme dans la propriété 5.6. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit le plus petit entier $\varphi(n)$ tel que $I_n \subset J_{\varphi(n)}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \le \sum_{k\in J_{\varphi(n)}} |x_k| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|,$$

d'où le résultat. □

Exemple. Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les deux séries $\sum_{n\ge 0} u_n$ et $\sum_{n\ge 1} u_{-n}$ sont absolument convergentes, et alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

5.5 Séries doubles

Théorème 5.7. *Soit* $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une famille de nombres réels ou complexes indexées par* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. Alors on a les équivalences suivantes :*
(i) La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *est sommable.*
(ii) Pour tout entier q *la série* $\sum_p |u_{p,q}|$ *est convergente ainsi que la série* $\sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$*.*

(iii) Pour tout entier p la série $\sum_q |u_{p,q}|$ est convergente ainsi que la série $\sum_p \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$.
Dans ce cas on a la **formule de Fubini** *:*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\Big) \text{ i.e. } \sum_{q\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{p,q}\Big) = \sum_{p\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q}\Big). \tag{5.3}$$

Démonstration. La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_{p,q}|)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable. Montrons donc les équivalences dans le cas d'une famille positive sommable u. Toute sous famille étant sommable, les sous familles $(u_{p,q})_p$ sont sommables. Ainsi, les séries $\sum_p u_{p,q}$ sont convergentes. Soit donc $P, Q \in \mathbb{N}$. Comme u est sommable, on a :

$$\sum_{q=0}^{Q}\sum_{p=0}^{P} u_{p,q} \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{p,q}.$$

Comme chacune des séries $\sum_p u_{p,q}$ est convergente, on obtient :

$$\sum_{q=0}^{Q}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{p,q}.$$

On déduit que la série à termes positifs $\sum_q(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a ses sommes partielles majorées et que :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{p,q}.$$

Inversement, on suppose (ii) dans le cas où les termes sont positifs. La suite $J_n := \{0,...,n\}\times\{0,...,n\}$ est croissante et $\cup_n J_n = \mathbb{N}^2$ et on a :

$$\sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n} u_{p,q}\right) \leq \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leq \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Ainsi la famille est sommable et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{p,q} \leq \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\right) u_{p,q}$. D'où les équivalences.

Montrons maintenant (5.3). Par ce qui précède, on dispose de $U_q := \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et de $U'_q := \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$. On a alors :

$$\left|\sum_{q=0}^{n} U_q - \sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q}\right| = \left|\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_{p,q}\right| \leq \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \sum_{q=0}^{n} U'_q - \sum_{(p,q)\in J_n} |u_{p,q}|. \tag{5.4}$$

Mais on a :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} U'_q = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_{p,q}| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{(p,q)\in J_n} |u_{p,q}|.$$

Ainsi le membre de droite de (5.4) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{q=0}^{n} U_q - \sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q}\right) = 0.$$

Ceci donne :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{q=0}^{n} U_q = \lim_{n\to+\infty}\sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}.$$

□

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Fubini qui permet d'intervertir les indices de sommation dans une famille sommable indexée par un ensemble d'indices I quelconque.

Exemple. Montrons que la famille $(\frac{1}{pq(p+q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable. On a en posant $J_n := \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ p+q \leq n\}$:

$$\sum_{(p,q)\in J_n} \frac{1}{pq(p+q)} = \sum_{k=2} \sum_{p+q=k} \frac{1}{pq(p+q)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p(k-p)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right] = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$$

D'où l'on obtient :

$$\sum_{(p,q)\in J_n} \frac{1}{pq(p+q)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2H_k}{k^2},$$

où $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ désigne la suite des sommes partielles de la série harmoniques. Comme $H_n \sim \ln n$, on a $\frac{2H_n}{n^2} \sim \frac{2\ln n}{n^2}$, ainsi la série $\sum_n \frac{2\ln n}{n^2}$ converge par le critère de Bertrand. Par conséquent, la famille est sommable.

La version suivante du théorème de Fubini dépasse le cadre du cours. On rappelle qu'une partition d'un ensemble I est une collection d'ensembles D_j non vides avec $j \in J$, deux à deux disjoints et qui recouvrent I.

Théorème 5.8. *Soit* $\sum_{i\in I} x_i$ *une famille (non nécessairement sommable) d'éléments* **positifs** *sur un ensemble dénombrable* I *et soit* $(P_j)_{j\in J}$ *une partition de* I*. Alors on a :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} \sum_{k\in P_j} x_k.$$

6 Exercices

6.1 Exercice sur les développements limités (rappels de première année)

Exercice 6.1. *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Montrer que $f = o(g)$ au voisinage de x_0 si et seulement si il existe une fonction θ définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x) = \theta(x)g(x)$ et telle que $\theta(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.*

Exercice 6.2. *Démontrer la proposition 6.1 (voir ci-dessous[8]).*

Exercice 6.3. *La fonction f définie par $x \longmapsto e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ possède-t-elle un développement limité à l'ordre n au voisinage de $x = 0$?*

Exercice 6.4. *Effectuer les développements limités des fonctions suivantes au voisinage de $x = 0$:*

$$\begin{array}{ll}
f_1(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) & \text{ordre } 4 \\
f_2(x) = \frac{e^{\cosh x} - e^{\cos x}}{x^2} & \text{ordre } 2 \\
f_3(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{ordre } 5 \\
f_4(x) = (1+x)^{1/x} & \text{ordre } 2 \\
f_5(x) = (1+x)^{1/\sin x} & \text{ordre } 3 \\
f_6(x) = \frac{2\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)} & \text{ordre } 2
\end{array}$$

Exercice 6.5. *Effectuer les développements limités des fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{lll}
g_0(x) = \sin x & \text{en } x = \pi/3 & \text{ordre } 3 \\
g_1(x) = \ln x & \text{en } x = 2 & \text{ordre } 2 \\
g_2(x) = (1 + \sin x)^x & \text{en } x = \pi/2 & \text{ordre } 2 \\
g_3(x) = (2 - \ln x)^{1/4} & \text{en } x = 1 & \text{ordre } 2 \\
g_4(x) = (x-4)(x+3)(x-1)(x^2+2) & \text{en } x = 1 & \text{ordre } 2 \text{ et } 2000
\end{array}$$

Exercice 6.6. *Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 0$ des fonctions définies ci-dessous par :*

$$\begin{array}{l}
h_1(x) = x(2 - \cos x) - \arctan x \\
h_2(x) = 1 + \frac{\ln \cosh x}{\ln \cos x} \\
h_3(x) = e^{\cos x} - e^{\cosh x} \\
h_4(x) = x(1 + \cos x) - 2\tan x \\
h_5(x) = \sqrt{\tan x} - (x \sin x)^{1/5}
\end{array}$$

---

8. Rappel de la proposition 6.1.

Proposition 6.1. *Soit $f_1, f_2, \varphi, \psi, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ six fonctions, $x_0 \in \mathbb{R}$ et α, β deux réels.*
(i) $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g) \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 = O(g)$.

(ii) $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 = o(g)$.

(iii) On a :

$$\begin{array}{lcll}
\varphi = O(\psi) & \text{et} & f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = O(\psi g) \\
\varphi = o(\psi) & \text{et} & f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g) \\
\varphi = O(\psi) & \text{et} & f = o(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g).
\end{array}$$

(iv) On a :

$$\begin{array}{lcll}
f = O(g) & \text{et} & g = O(h) & \Rightarrow f = O(h) \\
f = O(g) & \text{et} & g = o(h) & \Rightarrow f = o(h) \\
f = o(g) & \text{et} & g = O(h) & \Rightarrow f = o(h).
\end{array}$$

Exercice 6.7. *Déterminer la limite en $x = 0$ des fonctions définies ci-dessous par :*

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \tfrac{\ln(\cos x \cosh x)}{x^4} \\ \phi_2(x) &= \tfrac{1}{x} - \tfrac{\ln(1+x)}{x^2} \\ \phi_3(x) &= \tfrac{\sin x - \tan x}{\tanh x - \tan x} \\ \phi_4(x) &= \tfrac{\sin x - x}{x \ln(1-x^2)} \\ \phi_5(x) &= (\cos x)^{1/x^2} \end{aligned}$$

Exercice 6.8. *a) Trouver un développement limité à l'ordre 4 en puissance de $1/x$ de $f(x) := \frac{x^2-2}{x^2+2x}$.*

b) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $f(x) := (x-1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

c) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\frac{x^3+2x^2-1+1}{x^5-x+2}$.

d) Trouver un développement limité à l'ordre 2 en puissance de $1/x$ de $f(x) = (x^4+x^2)^{1/4} - (x^3+x^2)^{1/3}$.

e) Trouver un développement limité à l'ordre 2 en puissance de $1/x$ de $f(x) = \frac{x^5+1}{x^3+x+2} - x^2 + 1$.

6.2 Exercice sur l'intégration

Exercice 6.9. Une fonction n'ayant pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) := \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que H n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$ (considérer par exemple un taux d'accroissement).

Exercice 6.10. Une fonction discontinue ayant une primitive sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.
2) On considère maintenant la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

Exercice 6.11. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_0 = \int_0^x t\sin(t^2)dt, \ \ I_1 = \int_0^{4\pi} \cos t e^{\sin t} dt, \ \ I_2 = \int_0^1 t^2 \text{arctan} t \ dt, \ \ I_3 = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt,$$

Exercice 6.12. *Soit $a > 1$ un réel. Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a - \cos x}$.

Exercice 6.13. *Calculer une primitive de $x \longmapsto \arctan(\sqrt[3]{x})$.*

Exercice 6.14. *Calculer une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.*

Exercice 6.15. *Calculer les primitives suivantes (on précisera l'intervalle de définition) ainsi que les intégrales :*

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx, \ \int \frac{1}{x^4 - x^2 - 2} dx, \int \frac{x^2+x+1}{x^4+1} dx, \ \int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx, \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx) \ dx \ \text{ avec } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Exercice 6.16. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ dx, \ I_2 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} \ dx, \ I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \ dx.$$

(Indication : poser $x = \cos t$ pour I_1, $u = \sqrt{\cos x}$ pour I_2).

Exercice 6.17. *1) Montrer que*

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) \ dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) \ dt.$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt,$$

(Indication : utiliser une formule de trigonométrie).

Exercice 6.18. *(Fractions rationnelles en sinus et cosinus).*
Calculer les primitives des fonctions suivantes (on prendra soin de préciser l'intervalle sur lequel la primitive est calculée). Utiliser éventuellement la règle de Bioche.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\ dx,\ \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\ dx,\ \int \frac{3-\sin x}{\cos x + 3\tan x}\ dx,\ \int \cos^2 x \sin^2 x\ dx.$$

(Indication : linéariser pour la dernière).

Exercice 6.19. *(calculs divers). Calculer les primitives suivantes :*

$$\int \ln(1+x^2),\ \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx,\ \int \sqrt{x^2+1}\ dx,\ \int (\arcsin x)^2\ dx,\ \int \frac{1}{1+x^3}\ dx$$

(Indication : IPP pour la première, changement de variable pour la seconde, changement de variable hyperbolique pour la troisième, poser $u = \arcsin x$ dans la quatrième, décomposer en éléments simples dans la dernière).

Exercice 6.20. *Calculer les intégrales (faire $I+J$ et $I-J$)*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx,\quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Exercice 6.21. *Calculer une primitive des fonctions suivantes (préciser si besoin l'intervalle de définition) :*

$$f_0(x) := \frac{\ln x}{x},\ f_1(x) = xe^x,\ f_2(x) = \ln x,\ f_3(x) = 1/\cosh x,\ f_4(x) = \tan^3 x,\ f_5(x) = 1/\sin x,\ f_6(x) = 1/\cos x.$$

Exercice 6.22. *Calculer une primitive de $x \longmapsto x\sqrt{x^2+x+1}$ (utiliser un changement de variable logarithmique).*

Exercice 6.23. *Calculer $\int_0^1 x^a(1-x)^b$ où $a, b \in \mathbb{N}$.*

Exercice 6.24. Intégrales de Wallis *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.*
1) Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2) En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 6.25. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On note $\|f\|_\infty$ son supremum sur $[a,b]$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty.$$

Exercice 6.26. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable bornée et soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx = \ell.$$

Exercice 6.27. Sommes de Riemann.
1) Trouver la limite des suites

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2},\ v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}},\ w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}},\ x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}.$$

2) Trouver la limite des suites

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n (1+\frac{k}{n}) \right)^{\frac{1}{n}},\ v_n = \left(\prod_{k=1}^n (1+\frac{k}{n^2}) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6.28. Sommes de Riemann (suite). *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose*

$$u_n := \int_0^\pi f(t)|\sin nt|dt.$$

1) Etablir l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin u du.$$

2) Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u du.$$

3) En déduire la limite de la suite u_n.

Exercice 6.29. Aire d'un disque.
1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer une primitive de la fonction $x \in [0,1] \to \sqrt{1-x^2}$.
2) En déduire l'aire d'un disque de rayon 1.
3) Retrouver ce résultat en utilisant un changement de variable.

Exercice 6.30. Inégalité de Cauchy-Schwarz. *On souhaite montrer le résultat suivant. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors on a :*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

1) Montrer le résultat lorsque la fonction g est nulle.
2) On suppose la fonction g non nulle. On considère le polynôme du second degré $\lambda \longmapsto P(\lambda)$ défini par :

$$P(\lambda) := \int_a^b (f+\lambda g)^2.$$

En utilisant le discriminant de P, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les exercices qui suivent sont plus difficiles.

Exercice 6.31. *Montrer la proposition 2.2. En déduire que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$. Cette fonction est-elle réglée ?*

Exercice 6.32. Fonction de Thomae.
Soit f la fonction dite fonction de Thomae définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ si } x = p/q \text{ et } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel non nul.
2) On souhaite montrer que f est continue en tout point irrationnel x_0. On se donne $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon$.
a) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels p/q avec $q \le N$ appartenant à l'intervalle $[x_0-1, x_0+1]$ est fini. On note S cet ensemble et soit $\delta := \min\{|x-y| \,;\, y \in S\}$.
b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et conclure.
3) En déduire que f est Riemann intégrable sur tout segment $[a,b]$ (utiliser la remarque 2.8 admise). Que vaut son intégrale ?

Exercice 6.33. Fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. *On souhaite montrer que cette fonction n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$. On suppose qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - \varphi| \leq \psi$.*
1) Montrer que $\varphi - \psi \leq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \leq \varphi + \psi$.
2) a) En utilisant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, montrer que $\varphi - \psi \leq 0 \leq 1 \leq \varphi + \psi$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
b) En déduire que $\psi \geq 1/2$ sauf éventuellement sur un ensemble fini et montrer que $\int_0^1 \psi \geq \frac{1}{2}$.
3) Par ce qui précède, montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 6.34. Seconde formule de la moyenne. *Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.*

Théorème 6.1. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1, positive, décroissante et que g est continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

1) Posons $G(x) = \int_a^x g$ la primitive de g qui s'annule au point a. Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq G(t) \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$.
2) a) Montrer que :

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'(t)G(t))dt.$$

b) En déduire que l'on a $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.
3) Conclure en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la première formule de la moyenne.

Exercice 6.35. Lemme de Riemann-Lebesgue *On souhaite montrer le lemme suivant.*

Lemme 6.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors on a :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$$

1) a) Montrer le résultat si $f = 1$.
b) En déduire le résultat pour une fonction f en escalier.
2) a) On suppose dorénavant que f continue et soit g une fonction en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Montrer que $|\int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t}dt| \leq \varepsilon(b-a)$.
b) Conclure en utilisant la première question.

6.3 Exercices sur les intégrales généralisées

Exercice 6.36. *Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeurs* $\int_0^1 \ln(t)\,dt$, $\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$, $\int_0^1 \arctan(\frac{1}{t})\,dt$, $\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt$.

Exercice 6.37. *Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4t+1};\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t+1};\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+\cos^2 x};\ \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+\ln x}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2(1-t))^{\frac{1}{3}}}dt;\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x+1)};\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin 5t-\sin 3t}{t^{\frac{5}{3}}}dt;$$

Exercice 6.38. *Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x^2)}};\ \int_{-1}^1 x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx;\ \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan x}};\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx;\ \int_{-1}^2 \frac{|x|}{x}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}};\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx;$$

Exercice 6.39. *Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$$

Exercice 6.40. *Etudier la convergence de l'intégrale de Fresnel I définie par $I := \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.*

Exercice 6.41. Règle d'Abel pour les intégrales.
Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[1, +\infty[$. On suppose que f est de classe C^1, positive, décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0$. On suppose que $G(x) := \int_1^x g$ est bornée sur $[1, +\infty[$.
1) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x fg$$

existe dans $\mathbb{R}$. (Indication : montrer que $\int_1^x fg$ vérifie le critère de Cauchy en utilisant la seconde formule de la moyenne).
2) Soit $0 < \alpha \leq 1$. On considère les deux fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1/x^\alpha$ et $g(x) = \sin(x)$. Quel résultat retrouve-t-on par la première question ?

Exercice 6.42. *1) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.*
2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $s > 0$. Dans ce cas on note $\Gamma(s)$ cette intégrale.
3) a) Montrer que $\Gamma(s) = s\Gamma(s-1)$ pour tout $s > 1$. En déduire que $\Gamma(n) = n!$.
b) Montrer que $I = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Exercice 6.43. *Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$ converge, et calculer sa valeur.*

Exercice 6.44. *On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$.*

1. *Justifier l'existence de I.*
2. *En effectuant un changement de variables, montrer que $I = J$. En déduire que J existe.*
3. *En effectuant un changement de variables, montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)dt = I$.*

4. Montrer que $I+J=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I$, puis déterminer I.

Exercice 6.45. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que lorsque $x\to+\infty$, on a l'équivalent :*

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 6.46. *1. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge.*

2. Montrer, en posant $u=1/t$, que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=0$.

3. Pour $a>0$, montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2a}\ln a$.

Exercice 6.47. *1) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell=0$.*
2) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty}f$ converge. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3) Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ converge.

Problème de synthèse : calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.
Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,dt\,.$$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. A l'aide d'une formule de trigonométrie, montrer que $I_{n+1}-I_n=0$ puis que $I_n=\pi/2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t} & \text{si } x\in]0,\frac{\pi}{2}]\\ 0 & \text{si } x=0\,.\end{cases}$$

   Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et que $f'\le 0$.
4. A l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$\left|\int_0^{\pi/2}f(t)\sin((2n+1)t)\,dt\right|\le\left|\frac{f(\pi/2)}{2n+1}\right|\,.$$

   En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}f(t)\sin((2n+1)t)\,dt=0$.
5. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\,.$$

6. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt=\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

7. Justifier l'existence de l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ puis la calculer.

6.4 Exercices sur les séries numériques

Exercice 6.48. *Calculer* $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\cos(\frac{1}{n+1})-\cos(\frac{1}{n})\right)$, $\sum_{n=3}^{+\infty}e^{-n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

Exercice 6.49. *Déterminer la nature des séries*

$$\sum e^{-1/n} \quad \sum \frac{1}{n^{\alpha}}e^{-1/n} \quad \sum \frac{e^n}{n!} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 6.50. *Déterminer la nature des séries*

$$\sum \frac{n^2}{n^3+1} \quad \sum e^{-n^2} \quad \sum \frac{(\ln n)^{123456}}{n^{1,1}} \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \sum \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}.$$

$$\sum \frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \quad \sum 1-\cos(\frac{1}{n}) \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(2n+7)}}.$$

Exercice 6.51. *Etudier la nature des séries suivantes (ci-dessous, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$) :*

$$\sum \frac{x^n}{y^n+n}, \quad \sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}), \quad \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

Exercice 6.52. *Etudier la nature de la série $\sum u_n$ (ci-dessous, $\alpha\in\mathbb{R}$) où le terme général u_n est donné par :*

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx, \quad u_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{si } u_n \text{ un carre,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \quad u_n=\arctan(n+a)-\arctan(n), \ u_n=\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$u_n=\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n, \quad u_n=ne^{-\sqrt{n}}, \quad u_n=\frac{(-1)^n+\alpha}{n^2+1}, u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \quad u_n=\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}.$$

Exercice 6.53. *Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n=an\ln(1+\frac{1}{n})-b\cos(\frac{1}{n})+c\sin(\frac{1}{n})$ où a, b, et c sont trois réels.*

Exercice 6.54. *Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{E(\sqrt{k+1})-E(\sqrt{k})}{k}$.*

Exercice 6.55. *On admet que $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$ puis $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$.*

Exercice 6.56. *On définit la suite (u_n) par $u_{2p}=(\frac{2}{3})^p$ et $u_{2p+1}=2(\frac{2}{3})^p$. Tester le critère de d'Alembert puis de Cauchy pour étudier la nature de $\sum u_n$.*

Exercice 6.57. *On suppose $u_n>0$. On définit $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n=\frac{u_n}{1+u_n{}^2}$.*

1. *Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.*
2. *Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum w_n$ converge, mais que la réciproque est fausse.*

Exercice 6.58. *Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $0<\alpha\leq 1$. A l'aide de la transformation d'Abel, montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ est semi-convergente.*

Exercice 6.59. *Etudier la convergence de la série $\sum\frac{1}{\ln n}\sin(\frac{n\pi}{4})$.*

Exercice 6.60. Série harmonique alternée.
1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.
2) On note S_n la suite des sommes partielles de cette série. Montrer que :

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$$

(utiliser que $1/(p+1)=\int_0^1 t^p dt$).
3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

Exercice 6.61. *Montrer que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$ *n'est pas absolument convergente, puis grâce à un développement asymptotique montrer qu'elle est convergente.*

Exercice 6.62. Règle de Duhamel
Soit $\sum x_n$ *une série à termes positifs telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait :*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(1/n).$$

1) Soit $y_n = 1/n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Montrer que si* $\alpha \neq \lambda$, *alors on a*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \sim \frac{\alpha - \lambda}{n}.$$

2) Montrer que si $\lambda > 1$, *alors la série converge, et si* $\lambda < 1$, *alors la série diverge.*

Exercice 6.63. Constante d'Euler.
On cherche un développement asymptotique de la série harmonique $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. *On pose :*

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \ln n - \ln(n-1), \quad z_n = x_n - y_n.$$

1) a) Montrer que la série $\sum_n z_n$ *converge et que* $z_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
b) On note R_n *le reste de la série* $\sum_{n\geq 1} z_n$. *Montrer que* $R_n \sim -\frac{1}{2n}$.
2) Démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \ln n + (1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k) - R_n.$$

3) En déduire qu'il existe une constante γ *(la constante d'Euler) telle que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 6.64. Formule de Stirling. *On souhaite montrer la formule de Stirling :*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On pose $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ *et* $b_n = \ln a_n - \ln a_{n-1}$.
1) Par un développement limité montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ *telle que* $b_n = \frac{c}{n^2} + O(1/n^3)$. *En déduire que la série* $\sum b_n$ *converge.*
2) a) Montrer qu'il existe une constante c' *telle que* $\ln a_n = c' + \frac{1}{12n} + o(1/n)$.
b) Déduire que $n! \sim \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
3) On rappelle le résultat suivant concernant la valeur des intégrales de Wallis $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ *(voir chapitre intégrale). On a :*

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}, \quad I_{2p+1} = \frac{2^p(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

a) Montrer que $I_n \to 1$ *lorsque* n *tend vers l'infini (découper par exemple l'intégrale sur* $[0, 1-\eta]$ *et sur* $[1-\eta, 1]$*).*
b) En étudiant un équivalent du quotient I_{2p}/I_{2p+1}, *déduire de la question 3a) que* $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 6.65. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. *On pose* $w_n = \sum_{p+q=n} u_p u_q$. *En utilisant l'inégalité* $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ *(la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique), montrer que* $|w_n| \geq \frac{2n}{n+2}$ *puis que la série* $\sum w_n$ *diverge.*
3. *Que dit cet exercice par rapport au théorème sur le produit de Cauchy ?*

Exercice 6.66. Critère de la loupe. *On considère une suite de réels* $(u_n)_{n\geq 0}$ *positive décroissante. En sommant par paquet, montrer que la série* $\sum_n u_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum_n 2^n u_{2^n}$ *converge.*

Exercice 6.67. *Etudier la convergence de l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4 \sin^2 t}$$

(Indication : à l'aide d'un changement de variable, ramener l'étude de la convergence de I *à celle d'une série* $\sum_n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{1+(u+n\pi)^4 \sin^2 u}$, *et utiliser la minoration* $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ *sur* $[0, \pi/2]$*).*

6.5 Exercices sur les ensembles dénombrables et les familles sommables

Exercice 6.68. *1) Est-ce que les ensembles* $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$, *et* $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ *sont dénombrables ? (Ici* $\mathbb{D}$ *désigne l'ensemble des décimaux).*
2) L'ensemble $A := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \exists q, q' \in \mathbb{Q}\ ;\ z = q + iq'\}$ *est-il dénombrable ?*

Exercice 6.69. *Pour chaque entier* $m \in \mathbb{N}$ *soit* $f_m : \mathbb{N} \to J_m$ *une application surjective.*
1) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k \quad \text{avec} \quad f(m,n) = f_m(n),$$

est bien définie et surjective.
2) En déduire le résultat du cours disant que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.
3) Donner un exemple montrant que le résultat est faux en général quand l'ensemble d'indices n'est pas dénombrable.

Exercice 6.70. *Soit* J *un ensemble dénombrable non vide.*
1) Montrer que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, *l'ensemble des parties finies de* J *ayant au plus* n *éléments est dénombrable.*
2) En déduire que l'ensemble de toutes les parties finies de J *est dénombrable.*
3) L'ensemble de toutes les parties de J *est-il dénombrable ?*

Exercice 6.71. *On rappelle qu'une suite d'éléments d'un ensemble non vide est par définition une application de* $\mathbb{N}$ *dans* X. *Pour un sous-ensemble* X *d'un espace vectoriel* E *avec* $0 \in X$ *on dit qu'une suite* $q : \mathbb{N} \to X$ *de* X *est nulle à partir d'un certain rang quand il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *(dépendant de la suite) telle que pour tout entier* $n \geq N$ *on ait* $q_n = 0$. *On note* $c_{00}(X)$ *l'ensemble de ces suites.*
1) Montrer que l'ensemble $c_{00}(\mathbb{Q})$ *est dénombrable.*
2) Est-ce que $c_{00}(\mathbb{R})$ *est dénombrable ?*
3) L'ensemble de toutes les suites de rationnels est-il dénombrable ?

Exercice 6.72. *Etudier les sommes suivantes (discuter en fonction du paramètre si nécessaire) :*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j)^\alpha}, \quad \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{i^{\alpha+j^\alpha}},$$

Exercice 6.73. Non intervertion des sommations.
1) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ *un entier fixé. Montrer que la série* $\sum_{p\in\mathbb{N}^*, q\neq p} \frac{1}{p^2-q^2}$ *converge.*
2) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$a_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2-q^2},\ p \neq q, \\ 0,\ p = q. \end{cases}$$

Montrer que

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q}\right) = -\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}\right).$$

Quelle propriété ce résultat montre-t-il ?

Exercice 6.74. *Soit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une famille de réels telle que la famille* $(ka_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *soit sommable. Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j.$$

Exercice 6.75. *Soit la famille* $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *définie par :*

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+j}}, & i \text{ et} j \text{ pairs} \\ -\frac{1}{2^{i+j}}, & i \text{ et} j \text{ impairs} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que cette famille est sommable et calculer sa somme.

Exercice 6.76. *On note* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. *Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2}, \quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ p|q} \frac{1}{p^2q^2}, \quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \text{pgcd}(p,q)=1} \frac{1}{p^2q^2},$$

Exercice 6.77. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de* f *est dénombrable. Qu'en est-il pour une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *?*

Exercice 6.78. *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble* E. *Montrer que l'ensemble* $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *est dénombrable.*

Exercice 6.79. *1) Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p_1, ..., p_n$ n *nombres premiers distincts. Montrer que* $\mathbb{N}^n$ *est dénombrable (considérer l'application* $\phi : (k_1, ..., k_n) \longmapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$*).*
2) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d ?un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?

Exercice 6.80. *Un nombre réel est dit algébrique s'il existe un polynôme* P *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *tel que* $P(x) = 0$. *Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit transcendant. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.*

Exercice de synthèse

Exercice 6.81. Fonction ζ de Riemann et nombres premiers.
On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, et soit* $\zeta(s)$ *la fonction définie par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

1) a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n^s}$ *converge pour* $s > 1$ *(utiliser par exemple* $\ln(1-x) < x$ *pour* $x \in [0,1[$*).*
b) Montrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

2) a) Soit m *et* M *deux entiers strictement positifs. Montrer l'égalité*

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \sum_{0\leq i_1\leq\cdots\leq i_m\leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1}\cdots p_m^{i_m})^s}.$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers m_0 et M_0 strictement positif tels que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{m_0} \left(\sum_{i_k=0}^{M_0} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

c) En déduire que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s} \right).$$

3) a) Montrer que $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1 (minorer par exemple ζ par une somme partielle et utiliser la série harmonique).
b) On suppose que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Montrer alors que le produit

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

converge. On note ℓ la valeur de ce produit.
c) Montrer l'inégalité $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et en déduire que $\zeta(s) < \ell$ pour tout $s > 1$.
d) Conclure que la série $\sum_n \frac{1}{p_n}$ diverge.

Références

[1] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques 1, algèbre*, Dunod, 1994.

[2] M. Alfaro,*GLMA 302*, Poly d'Analyse 3, 2013-2014.

[3] M. Briane, G. Pagès, *Théorie de l'intégration, Licence de Mathématiques - Cours et Exercices*, Vuibert 2000.

[4] S. Francinou, H. Gianella, *Oraux X-ENS, Analyse 1*, Cassini, 2012.

[5] D. Monasse *Cours complet Prépa MP et MP* Mathématiques*, Vuibert, 1998.

[6] J.-P. Ramis, A. Warusfel, *Mathématiques : tout-en-un pour la licence Niveau 1, 2ème édition*, DUNOD, 2006.