Université Montpellier HLMA 302 - Analyse 3 (2016-2017)

CC3 : Séries numériques - 8 décembre 2016 (1h30)

Notes de cours et calculatrices interdites. On accordera une grande importance au soin et à la rédaction. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans chaque exercice, l'étudiant peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points). Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1) (2 point). Etudier la nature de la série

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \frac{\ln(n)}{2+\cos(2n)}$$

2) (2 points). Etudier la nature de la série

$$\sum \frac{1}{\ln(n)\ln(\cosh n)}.$$

3) (2 points). Etudier la nature de la série

$$\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$$

Exercice 2. *(5 points). Dans tout l'exercice α désigne un paramètre strictement positif. On pose*

$$u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

2) Pour quelles valeurs de α la série $\sum(-1)^n u_n$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 3. *(4 points).*

1) Question de cours. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et (S_n) la suite de ses sommes partielles. Démontrer que la suite (S_n) converge dans $\mathbb{R}$ ou $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2) Soit (u_n) une suite réelle positive. Etudier la nature de la série

$$\sum \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

Exercice 4. *(6.5 points) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.*

1) Justifier l'existence de R_n.

2) En utilisant l'inégalité $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k \geq 2$, donner un équivalent de R_n en l'infini.

3) Montrer que

$$R_n - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right).$$

4) En déduire que $R_n - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.