Examen du 6 janvier 2016 (16h-19h)

On attachera le plus grand soin à la présentation. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1. *Discuter la nature des séries de terme général :*
1) $u_n = \frac{2n+3^n}{n!}$, $n \geq 0$ *(on rappelle que* $0! = 1$ *et que pour* $n \geq 1$, $n!$ *est le produit des* n *premiers entiers).*
2) $u_n = \tan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 1$.
3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^2+n^2)^\alpha}$, $n \geq 1$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(discuter en fonction de la valeur de* α*).*

Exercice 2. *1) Calculer la primitive suivante en précisant son intervalle de définition :*

$$\int \frac{dx}{4-9x^2}.$$

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} 3^{-t} dt$.
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta > 0$. *Discuter en fonction de* α *et* β *la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^\beta} dt$.
4) a) Soit $\alpha > 0$. *Démontrer que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *est convergente.*
b) Démontrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} dt$$

est convergente (Indication : utiliser $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$*).*

Exercice 3. *1) Résoudre le problème de minimisation* $\min_{u>0}\left(u + \frac{1}{u}\right)$.
2) Existe-t-il une suite de terme général u_n *strictement positif (*$n \geq 1$*) telle que*

$$\sum \frac{u_n}{n} \text{ converge} \quad et \quad \sum \frac{1}{nu_n} \text{ converge} \quad ?$$

Exercice 4. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

1) Justifier l'existence de I_n.
2) En calculant $I_n - I_{n+1}$ *par une intégration par parties, montrer que pour* $n \geq 1$ *:*

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$$

3) On note $u_n = \sqrt[3]{n} I_n$ *et* $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. *Montrer à l'aide d'un développement limité que la série de terme général* v_n *converge.*
4) En déduire que la suite $(\ln(u_n))$ *converge et qu'il existe* $A > 0$ *tel que* $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 5. *On considère une fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *positive, décroissante et intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.
1) Montrer que $xf(x) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$ *(Indication : considérer* $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$ *pour* $x \geq 0$*).*
2) Calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} t(f(t+1) - f(t))dt$ *en fonction de* $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_1^2 tf(t)dt$.