Examen du 4 janvier 2017 (16h-19h)

Notes et polycopiés de cours, calculatrices, et appareils numériques interdits. On accordera une grande importance au soin et à la rédaction. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans chaque exercice, l'étudiant peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(7 points).*

1) On rappelle que $0! = 1$ *et pour* $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. *Etudier la nature de la série*

$$\sum \frac{n^3}{n!}.$$

2) Etudier la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$$

3) Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ *la nature de la série de terme général* u_n *donné par :*

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2}, \quad n \geq 1.$$

(Indication : trouver d'abord un équivalent du terme général u_n *lorsque* $n \to +\infty$*.)*

4) a) Enoncer la règle d'Abel pour les séries numériques.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$. *Que peut-on dire de la suite complexe* $\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *?*

c) On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, *on a l'égalité* $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. *Etudier la nature de la série*

$$\sum \left[\sqrt{1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}} - 1 \right].$$

Exercice 2. *(3.5 points).*

1) Soit $a > 0$ *un paramètre. Discuter en fonction de* a *la convergence de l'intégrale* I_a *définie par*

$$I_a = \int_0^{+\infty} a^{\sqrt{x}} dx.$$

2) Calculer I_a *lorsque cette intégrale converge.*

Exercice 3. *(3.5 points)*

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)^2 dx$ *converge.*

2) Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)^2}{\sqrt{|x^2 - 1|(\sqrt{x} + 2)}} dx.$$

Exercice 4. *(3 points).*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle strictement positive et croissante et telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1) Montrer que la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t}$ *diverge.*

2) En déduire que la série $\sum \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ *diverge.*

Exercice 5. *(7 points).*

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue, intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *et telle que que* f *soit dérivable au point* $t = 0$. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *on définit l'intégrale* I_λ *par*

$$I_\lambda = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt$$

1) a) Montrer que l'intégrale I_λ *converge pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

b) On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ *converge et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. *Que vaut* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}dt$ *?*

2) Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *et tout* $A \in \mathbb{R}_+^*$ *on a l'égalité suivante :*

$$I_\lambda - \frac{\pi}{2}f(0) = \int_0^A \frac{f(t)-f(0)}{t}\sin(\lambda t)dt + \int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\sin(\lambda t)dt - f(0)\int_A^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}dt.$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. *Montrer qu'il existe* $A_0 \geq 0$ *tel que pour tout* $A \geq A_0$ *et tout* $\lambda \geq 1$ *on ait*

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\sin(\lambda t)dt\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|f(0)\int_A^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}dt\right| \leq \varepsilon.$$

4) a) On admet le résultat suivant (lemme de Riemann-Lebesgue) : étant donné $A > 0$ *et une fonction continue* $g : [0, A] \to \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^A g(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$

Montrer que $\int_0^A \frac{f(t)-f(0)}{t}\sin(\lambda t)dt \to 0$ *lorsque* $\lambda \to +\infty$.

b) En déduire que $I_\lambda \to \frac{\pi}{2}f(0)$ *lorsque* $\lambda \to +\infty$.