Université Montpellier HLMA 302 - Analyse 3 (2015-2016)

Examen Session 2 (impairs) : Analyse 3 (HLMA 302) durée 3h - 13 juin 2016

ON ATTACHERA UNE TRES GRANDE IMPORTANCE AU SOIN. TOUTE REPONSE NON JUSTIFIEE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE. LE BARÊME EST INDICATIF.

Question de cours. *(2 points) Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert pour les séries.*

Exercice 1. *(5.5 points) Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*

1) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

2) Etudier la convergence de la série $\sum \frac{1+5\sin n}{n(\ln(n+1))^2}$.

3) Etudier la convergence de la série $\sum n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

4) Soit $\alpha \in]0,1[$. *Discuter en fonction de* α *la convergence de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Exercice 2. *(5.5 points) Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*

1) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ *de la fonction* $x \longmapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

2) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x})dx$

3) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx$.

4) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$.

Problème. *(10 points) I) Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1) Montrer que l'on a $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *lorsque* $n \to +\infty$.

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge. On notera* γ *la limite de cette suite.*

II) 1) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2) a) Soit $a > 0$. *Pour* $n \geq a$, *calculer* $\int_a^n \frac{\ln t}{t}dt$ *et donner un équivalent simple de* $\int_a^n \frac{\ln t}{t}dt$ *lorsque* $n \to +\infty$.

b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \frac{\ln t}{t}$ *décroît sur* $[e, +\infty[$ *et que pour tout entier* $k \geq 4$ *on a :*

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}dt \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}dt.$$

c) En déduire que $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$ *lorsque* $n \to +\infty$.

3)a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $w_n = v_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ *converge (effectuer un développement limité de* $w_{n+1} - w_n$ *avec reste en* $o(\frac{\ln n}{n^2})$ *et procéder comme dans la question I 2).*

b) Déduire que $v_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$ *lorsque* $n \to +\infty$ *où* C *désigne la limite de* $(w_n)_{n\geq 1}$.

III) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$.

1) a) Montrer que pour $n \geq 1$ *on a* $x_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{2k-1}$.

b) En déduire que pour $n \geq 1$ *on a* $x_{2n} = (\ln 2)(u_n + \ln n) + v_n - v_{2n}$.

c) Montrer que la suite $(x_{2n})_{n\geq 1}$ *converge vers une limite notée* $\ell = \frac{1}{2}\ln 2\,(2\gamma - \ln 2)$.

2) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* ℓ.