Examen du 6 avril 2017 (16h-19h) - session 2

Notes et polycopiés de cours, calculatrices, et appareils numériques interdits. On accordera une grande importance au soin et à la rédaction. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Dans chaque exercice, l'étudiant peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points). L'exercice est constitué de trois questions indépendantes.*
1) Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}\sin(t+1)}{\sqrt{|t|}(2+\cos t)}dt.$$

2) Calculer une primitive de l'application $x \mapsto \ln(1-x^2)$*, justifier la convergence de l'intégrale* $\int_0^1 \ln(1-x^2)dx$*, puis calculer la valeur de l'intégrale* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln(\sin t)dt$.
3) Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (1+\sin(t))e^{-\frac{1}{t^2}}dt.$$

Exercice 2. *(4 points). Soit* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$.
1) Montrer que pour $\alpha > 1$ *la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
2) Soit $\alpha \in]0,1]$. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge. Montrer qu'elle ne converge pas absolument (Indication : pour tout réel* x *on a l'inégalité* $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos 2x]$*).*

Exercice 3. *(5 points). Soit* λ *et* μ *deux nombres réels. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$u_n = \lambda\left(n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}\right) + \mu\left(n^{\frac{1}{2}} - (n-1)^{\frac{1}{2}}\right) - n^{\frac{1}{2}}.$$

1) a) Montrer qu'il existe trois réels α, β, *et* γ *tels que lorsque* $n \to +\infty$ *on ait :*

$$n^{-\frac{3}{2}}u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

b) En déduire qu'il existe un seul et unique couple $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^2$ *pour lequel la série* $\sum u_n$ *converge.*
2) On note S *la somme de la série trouvée à la question 1)b). Montrer que lorsque* $N \to +\infty$ *on a :*

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} = \bar{\lambda}N^{\frac{3}{2}} + \bar{\mu}N^{\frac{1}{2}} - S + o(1).$$

Exercice 4. *(5 points). Pour* $x > 0$ *on pose*

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

1) Montrer que F *est bien définie pour tout* $x > 0$.
2) Montrer que F *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer* $F'(x)$ *pour* $x > 0$.
3) a) Montrer que $xF(x) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$.
b) Montrer que $xF(x) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$ *(Indication : montrer que* $xF(x) - xF(1) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$*).*
4) A l'aide d'une intégration par partie, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ *(on justifiera l'existence de cette intégrale).*