# TD0 : Rappels sur les relations de comparaison et les développements limités

Les exercices avec (*) sont plus difficiles. Il faut traiter en priorité les exercices sans (*).

**Exercice 1.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Montrer que $f = o(g)$ au voisinage de $x_0$ si et seulement si il existe une fonction $\theta$ définie sur un voisinage de $x_0$ telle que $f(x) = \theta(x)g(x)$ et telle que $\theta(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.*

**Exercice 2.** *Démontrer en revenant à la définition 1.3 (à l'aide du lemme 1.1) que la relation d'équivalence pour les fonctions est une relation d'équivalence pour les fonctions (au voisinage d'un point $x_0$).*

**Exercice 3.** *Démontrer la proposition de cours 1.2 (voir ci-dessous[1]).*

**Exercice 4.** *La fonction $f$ définie par $x \longmapsto e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ possède-t-elle un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x = 0$ ?*

**Exercice 5.** *Effectuer les développements limités des fonctions suivantes au voisinage de $x = 0$ :*

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ | ordre 4 |
| $f_2(x) = \frac{e^{\cosh x} - e^{\cos x}}{x^2}$ | ordre 2 |
| $f_3(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ | ordre 3 |
| $f_4(x) = (1+x)^{1/x}$ | ordre 2 |
| $f_5(x) = (1+x)^{1/\sin x}$ | ordre 3 |
| $f_6(x) = \frac{2\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)}$ | ordre 2 |

**Exercice 6.** *Effectuer les développements limités des fonctions suivantes :*

| | | |
|---|---|---|
| $g_0(x) = \sin x$ | en $x = \pi/3$ | ordre 3 |
| $g_1(x) = \ln x$ | en $x = 2$ | ordre 2 |
| $g_2(x) = (1 + \sin x)^x$ | en $x = \pi/2$ | ordre 2 |
| $g_3(x) = (2 - \ln x)^{1/4}$ | en $x = 1$ | ordre 2 |
| $g_4(x) = (x-4)(x+3)(x-1)(x^2+2)$ | en $x = 1$ | ordre 2 et 2000 |

**Exercice 7.** *Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 0$ des fonctions définies ci-dessous par :*

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= x(2 - \cos x) - \arctan x \\
h_2(x) &= 1 + \frac{\ln \cosh x}{\ln \cos x} \\
h_3(x) &= e^{\cos x} - e^{\cosh x} \\
h_4(x) &= x(1 + \cos x) - 2\tan x \\
h_5(x) &= \sqrt{\tan x} - (x \sin x)^{1/5}
\end{aligned}
$$

---

1. Rappel de la proposition 1.2.

**Proposition 1.** *Soit $f_1, f_2, \varphi, \psi, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ six fonctions, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta$ deux réels.*
*(i) $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g) \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 = O(g)$.*

*(ii) $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 = o(g)$.*

*(iii) On a :*

$$
\begin{array}{lcll}
\varphi = O(\psi) & \text{et} & f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = O(\psi g) \\
\varphi = o(\psi) & \text{et} & f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g) \\
\varphi = O(\psi) & \text{et} & f = o(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g).
\end{array}
$$

*(iv) On a :*

$$
\begin{array}{lcll}
f = O(g) & \text{et} & g = O(h) & \Rightarrow f = O(h) \\
f = O(g) & \text{et} & g = o(h) & \Rightarrow f = o(h) \\
f = o(g) & \text{et} & g = O(h) & \Rightarrow f = o(h).
\end{array}
$$

**Exercice 8.** *Déterminer la limite en $x = 0$ des fonctions définies ci-dessous par :*

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \tfrac{\ln(\cos x \cosh x)}{x^4} \\
\phi_2(x) &= \tfrac{1}{x} - \tfrac{\ln(1+x)}{x^2} \\
\phi_3(x) &= \tfrac{\sin x - \tan x}{\tanh x - \tan x} \\
\phi_4(x) &= \tfrac{\sin x - x}{x \ln(1-x^2)} \\
\phi_5(x) &= (\cos x)^{1/x^2}
\end{aligned}$$

**Exercice 9.** *a) Trouver un développement limité à l'ordre 4 en puissance de $1/x$ de $f(x) := \frac{x^2-2}{x^2+2x}$.*

*b) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $f(x) := (x-1)e^{\frac{1}{x+1}}$.*

*c) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\frac{x^3+2x^2-1+1}{x^5-x+2}$.*

*d) Trouver un développement limité à l'ordre 2 en puissance de $1/x$ de $f(x) = (x^4+x^2)^{1/4} - (x^3+x^2)^{1/3}$.*

*e) Trouver un développement limité à l'ordre 2 en puissance de $1/x$ de $f(x) = \frac{x^5+1}{x^3+x+2} - x^2 + 1$.*

**Exercice 10.** *(**) Exercice récapitulatif sur les développement limités. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2$ (i.e. deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue sur $]a, +\infty[$). On suppose $f$ et $f''$ bornées sur $]a, +\infty[$ et on pose :*

$$M_0 := \sup\{|f(t)| \; ; \; t > a\}, \quad M_2 := \sup\{|f''(t)| \; ; \; t > a\}.$$

*1) En appliquant la formule de Taylor, montrer que pour tout $x > a$ et pour tout $h > 0$ on a*

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

*2) Etablir le résultat suivant : soit $g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2$ à dérivée seconde bornée et telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Alors, $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.*