TD1 : Intégrales de Riemann

Cette feuille contient plusieurs sections relatives aux différentes parties du cours sur l'intégrale de Riemann. Les exercices marqués d'une * ou plusieurs * sont plus difficiles et peuvent être abordés dans un deuxième temps. Il est essentiel de chercher les exercices sans *.

I) Fonctions en escalier

Exercice 1. *(Preuve de la propriété de cours).*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier et* $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *une subdivision adaptée à* f *et soit* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *la constante telle que* $f(t) = \alpha_i$ *pour* $t \in]a_{i-1}, a_i[$ *et* $1 \leq i \leq n$.
a) Soit σ' *une autre subdivision adaptée à* f *qui contient exactement un point* c *en plus par rapport à* σ. *Montrer que les sommes relatives à* σ *et à* σ' *sont égales.*
b) Démontrer que si σ *et* σ' *sont deux subdivisions adaptées à* f*, alors la somme relative à* σ *est égale à la somme relative à* $\sigma \cup \sigma'$.
c) En déduire que la somme relative à σ *est indépendante du choix de* σ.

Exercice 2. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Calculer $\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt$.
b) En déduire $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt$.

II) Exercices sur les sommes de Riemann

Exercice 3. *A l'aide des sommes de Riemann, calculer* $\int_0^1 xdx$, $\int_0^1 x^2dx$ *et* $\int_0^1 e^x dx$.

Exercice 4. Sommes de Riemann.
1) Trouver la limite des suites

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}},\ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$

2) Trouver la limite des suites

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}},\ v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}};\ w_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 5. *(*) Trouver la limite de la suite*

$$x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

(<u>Indication</u> : couper la somme de 1 *à* n *et de* $n+1$ *à* $2n$ *et faire un changement d'indice dans la somme de* $n+1$ *à* $2n$*).*

Exercice 6. *(**)* **Sommes de Riemann (suite)**. *Cet exercice suppose connu toutes les propriétés des intégrales de Riemann (à faire en fin de chapitre).*
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1. *On pose*

$$u_n := \int_0^{\pi} f(t)|\sin nt|dt.$$

1) Etablir l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin u du.$$

2) Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u du.$$

3) En déduire la limite de la suite u_n.

III) Fonctions Riemann intégrables

Exercice 7. *(définition de cours)*
En utilisant la définition de cours, montrer qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$ il existe deux fonctions $f_\varepsilon, g_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier telles que :

$$f_\varepsilon \le f \le g_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (g_\varepsilon - f_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Exercice 8. *1) La fonction $x\mapsto E(x)$ sur $[-1,2]$ est-elle Riemann intégrable ?*
2) La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) & 0<x<1 \\ 1 \quad x=0 \end{cases}$$

est-elle Riemann intégrable ?

Exercice 9. *Montrer la proposition 2.2 p.14 du poly*[1]*. En déduire que la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$. Cette fonction est-elle réglée ?*

Exercice 10. Fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. *On souhaite montrer que cette fonction n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$. On suppose qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}-\varphi|\le\psi$.*
1) Montrer que $\varphi-\psi\le\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\le\varphi+\psi$.
2) a) En utilisant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, montrer que $\varphi-\psi\le 0\le 1\le\varphi+\psi$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
b) En déduire que $\psi\ge 1/2$ sauf éventuellement sur un ensemble fini et montrer que $\int_0^1\psi\ge\frac{1}{2}$.
3) Par ce qui précède, montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 11. Fonction de Thomae *(*).*
Soit f la fonction dite fonction de Thomae définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x\notin\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ si } x=p/q \text{ et } \mathrm{pgcd}(p,q)=1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel non nul.
2) On souhaite montrer que f est continue en tout point irrationnel x_0. On se donne $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $1/N<\varepsilon$.
a) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels p/q avec $q\le N$ appartenant à l'intervalle $[x_0-1,x_0+1]$ est fini. On note S cet ensemble et soit $\delta:=\min\{|x_0-y|\,;\,y\in S\}$.
b) Montrer que si $x\in\mathbb{R}$ vérifie $|x-x_0|<\delta$, alors $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ et conclure.
3) En déduire que f est Riemann intégrable sur tout segment $[a,b]$ (utiliser la remarque 2.8 admise sur les fonctions réglées). Que vaut son intégrale (Indication : introduire l'ensemble $A_\varepsilon:=\{x\in[a,b]\,;\,f(x)\ge\varepsilon\}$ et montrer que cet ensemble est fini, puis prendre $\varphi_\varepsilon(x):=f(x)$ pour $x\in A_\varepsilon$ et $\varphi_\varepsilon(x):=\varepsilon$ pour $x\notin A_\varepsilon$) ?

1. Proposition 2.2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann intégrable sur tout segment $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

IV) Primitives

Exercice 12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes (justifier) :*
- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
- Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
- Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
- Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 13. Une fonction n'ayant pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) := \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que H n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$ (considérer par exemple un taux d'accroissement).

Exercice 14. Une fonction discontinue ayant une primitive sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.
2) On considère maintenant la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

Exercice 15. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_0 = \int_0^x t\sin(t^2)dt, \ \ I_1 = \int_0^{4\pi} \cos t e^{\sin t}dt, \ \ I_2 = \int_0^1 t^2 \text{arctan}t \ dt, \ \ I_3 = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt.$$

Exercice 16. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx, \ \ J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx.$$

Exercice 17. *Calculer une primitive des fonctions suivantes (préciser si besoin l'intervalle de définition) :*

$$f_0(x) := \frac{\ln x}{x}, \ \ f_1(x) = xe^x, \ \ f_2(x) = \ln x, \ \ f_3(x) = 1/\cosh x, \ \ f_4(x) = \tan^3 x, \ \ f_5(x) = 1/\sin x, \ \ f_6(x) = 1/\cos x.$$

Exercice 18. Intégrales de Wallis *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.*
1) Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.
2) En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 19. *(**) Calculer une primitive de* $x \longmapsto x\sqrt{x^2+x+1}$ *(utiliser un changement de variable logarithmique).*

Exercice 20. *(**) Calculer l'intégrale* $\int_0^1 x^a(1-x)^b$ *où* $a, b \in \mathbb{N}$.

IV) Exercices divers sur l'intégrale

Exercice 21. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que* $f(1) \neq 0$. *A l'aide d'une intégration par partie trouver un équivalent lorsque* $n \to +\infty$ *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_n := \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Exercice 22. *(*) Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue. On note* $\|f\|_\infty$ *son supremum sur* $[a,b]$. *Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty.$$

Exercice 23. *(*) Soit* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue vérifiant*

$$\int_0^\pi f(t)\sin t \; dt = 0.$$

1) Montrer que f *admet au moins un zéro sur l'intervalle* $[0,\pi]$ *(<u>Indication</u> : raisonner par l'absurde et utiliser une propriété vue cours).*
2) On suppose en outre que f *vérifie*

$$\int_0^\pi f(t)\cos t \; dt = 0.$$

a) Montrer que pour tout $t_0 \in [0,\pi]$, *la fonction* f *vérifie*

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-t_0) \; dt = 0.$$

b) Montrer que f *admet au moins deux zéros sur l'intervalle* $[0,\pi]$. *(<u>Indication</u> : raisonner par l'absurde et utiliser les deux questions précédentes).*

Exercice 24. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction telle qu'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx = \ell.$$

Exercice 25. Aire d'un disque.
1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer une primitive de la fonction $x \in [0,1] \to \sqrt{1-x^2}$.
2) En déduire l'aire d'un disque de rayon 1.
3) Retrouver ce résultat en utilisant un changement de variable.

Exercice 26. Inégalité de Cauchy-Schwarz. *On souhaite montrer le résultat suivant. Soit* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $[a,b]$. *Alors on a :*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

1) Montrer le résultat lorsque la fonction g *est nulle.*
2) On suppose la fonction g *non nulle. On considère le polynôme du second degré* $\lambda \longmapsto P(\lambda)$ *défini par :*

$$P(\lambda) := \int_a^b (f+\lambda g)^2.$$

En utilisant le discriminant de P, *montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 27. Seconde formule de la moyenne. *Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.*

Théorème. *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1, positive, décroissante et que g est continue. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

1) Posons $G(x) = \int_a^x g$ la primitive de g qui s'annule au point a. Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq G(t) \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$.
2) a) Montrer que :

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'(t)G(t))dt.$$

b) En déduire que l'on a $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.
3) Conclure en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la première formule de la moyenne.

Exercice 28. Lemme de Riemann-Lebesgue *On souhaite montrer le lemme suivant.*

Lemme. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$$

1) a) Montrer le résultat pour une fonction f en escalier (utiliser exercice 2).
2) a) On suppose dorénavant que f continue et soit g une fonction en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Montrer que $|\int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t}dt| \leq \varepsilon(b - a)$.
b) Conclure en utilisant la première question.

III) Exercices pour approfondir le calcul de primitives et d'intégrales.

Exercice 29. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx,\ I_2 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx,\ I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$$

(Indication : poser $x = \cos t$ pour I_1, $u = \sqrt{\cos x}$ pour I_2).

Exercice 30. *1) Montrer que*

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\ dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\ dt.$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t)dt,$$

(Indication : utiliser une formule de trigonométrie).

Exercice 31. *(Fractions rationnelles en sinus et cosinus).*
Calculer les primitives des fonctions suivantes (on prendra soin de préciser l'intervalle sur lequel la primitive est calculée). Utiliser éventuellement la règle de Bioche.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx,\ \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx,\ \int \frac{3 - \sin x}{\cos x + 3\tan x}\, dx,\ \int \cos^2 x \sin^2 x\ dx.$$

(Indication : linéariser pour la dernière).

Exercice 32. *(calculs divers). Calculer les primitives suivantes :*

$$\int \ln(1+x^2)dx, \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}\ dx, \quad \int (\arcsin x)^2\ dx, \quad \int \frac{1}{1+x^3}\ dx$$

(Indication : IPP pour la première, changement de variable pour la seconde, changement de variable hyperbolique pour la troisième, poser $u = \arcsin x$ dans la quatrième, décomposer en éléments simples dans la dernière).

Exercice 33. *Soit $a > 1$ un réel. Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a-\cos x}$.

Exercice 34. *Calculer une primitive de* $x \longmapsto \arctan(\sqrt[3]{x})$.

Exercice 35. *Calculer une primitive de* $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 36. *(***).*
Soit $a < b$ deux réels. Montrer que $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{16}(b+a)(b-a)^2$.
(Indication : soit I l'intégrale précédente et $J := \displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$. Montrer d'abord que $I = \frac{1}{2}(a+b)J$ par une IPP. Calculer ensuite J).

Exercice 37. *(**) On pose*

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx.$$

1) Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
2) a) Montrer que I_n décroit et que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
b) Déterminer un équivalent de I_n (utiliser par exemple un encadrement de $I_{n+1} + I_{n+1}$.
3)a) Pour $N \in \mathbb{N}$, exprimer $\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en fonction de la suite (I_n).
b) En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$