TD2 : Feuille d'exercices portant sur les intégrales généralisées
Les exercices avec (*) sont plus difficiles.

I) Convergence et calculs d'intégrales généralisées.

Exercice 1. *Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeurs* $\int_0^1 \ln(t)\,dt$, $\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$, $\int_0^1 \arctan(\frac{1}{t})\,dt$, $\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt$.

Exercice 2. Fonctions positives. *Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4t+1};\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t+1};\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+\cos^2 x};\ \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+\ln x}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2(1-t))^{\frac{1}{3}}}dt;\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x+1)};\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx;\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x^2)}};$$

Exercice 3. *1) Pour quelles valeurs de* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *l'intégrale* $J(\alpha,\beta) := \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta}dt$ *est-elle définie ?*
2) Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ *l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}$ *converge-t-elle ?*

Exercice 4. Fonctions de signe quelconque. *Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5t - \sin 3t}{t^{\frac{5}{3}}}dt;\ \int_{-1}^1 x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx;\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan x}};\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx;\ \int_{-1}^2 \frac{|x|}{x}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}};\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}dx;\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx;$$

Exercice 5. *(*) Etudier la convergence de l'intégrale* $\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)}$ *(Indication : étudier d'abord la limite lorsque* $x\to+\infty$ *de la fonction* $x\longmapsto x(\ln x)^{-\ln(\ln x)}$*. On rappelle que* $\lim_{u\to\infty} \frac{(\ln u)^2}{u} = 0$*).*

Exercice 6. *Etudier l'intégrabilité en* 0 *de la fonction* $x\mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

Exercice 7. *(*) Etudier la convergence des intégrales*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{\sqrt{x}}dx,\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

Exercice 8. *1) On considère la fonction* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=x^2\cos(1/x^2)$ *pour* $x\neq 0$ *et* $f(0)=0$*. Montrer que* f *est dérivable sur* $[0,1]$*.*
2) (*) Montrer que f' *n'est pas intégrable sur* $]0,1]$*.*

Exercice 9. *Etudier la convergence de* **l'intégrale de Fresnel** I *(utilisée en optique en diffraction) et définie par*

$$I := \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

Exercice 10. Règle d'Abel pour les intégrales.
Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[1,+\infty[$. On suppose que f est de classe C^1, positive, décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0$. On suppose que la fonction $G(x) := \int_1^x g$ est bornée sur $[1,+\infty[$.
1) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x fg$$

existe dans $\mathbb{R}$. (Indication : montrer que $\int_1^x fg$ vérifie le critère de Cauchy en utilisant la seconde formule de la moyenne ou une intégration par partie).
2) Soit $0 < \alpha \leq 1$. On considère les deux fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) := 1/x^\alpha$ et $g(x) := \sin(x)$. Quel résultat retrouve-t-on par la première question ?

Exercice 11. *1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ converge et calculer sa valeur (indication : décomposition en éléments simples).*
2) Montrer que l'intégrale $I' = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^{3/2}}$ converge et calculer sa valeur (indication : changement de variable).

Exercice 12. *1) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.*
2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $s > 0$. Dans ce cas on note $\Gamma(s)$ cette intégrale.
3) a) Montrer que $\Gamma(s) = s\Gamma(s-1)$ pour tout $s > 1$. En déduire que $\Gamma(n) = n!$.
b) Montrer que $I = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Exercice 13. *Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$ converge, et calculer sa valeur. Retrouver ce résultat en calculant directement l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{ix}dx$.*

Exercice 14. *On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$.*

1. *Justifier l'existence de I.*
2. *En effectuant un changement de variables, montrer que $I = J$. En déduire que J existe.*
3. *En effectuant un changement de variables, montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)dt = I$.*
4. *Montrer que $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$, puis déterminer I.*

Exercice 15.
1. *Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge.*
2. *Montrer, en posant $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.*
3. *Pour $a > 0$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2a}\ln a$.*

II) Exercices sur le comportement asymptotique.

Exercice 16. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que lorsque $x \to +\infty$, on a l'équivalent :*

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 17. *(*) 1) Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est-elle bornée ?*
2) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive, uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
3) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive, dérivable de dérivée bornée. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors f^p est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ (utiliser la question précédente).

Exercice 18. *1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.*
2) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ converge.

Exercice 19. *1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, croissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*
2) On suppose qu'il existe $A \geq 0$ et $M \geq 0$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $\int_x^{x+1} f''(t)^2 dt \leq M$. Montrer que f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3) Montrer que $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 20. *1) Soit f une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.*
2) (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable i.e. $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt < +\infty$. Montrer que $\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x})$ (Indication : découper l'intégrale en deux morceaux).

Problème de synthèse (***) : calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\, dt\,.$$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. A l'aide d'une formule de trigonométrie, montrer que $I_{n+1} - I_n = 0$ puis que $I_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

   Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $f' \leq 0$.
4. A l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(t) \sin((2n+1)t)\, dt \right| \leq \left| \frac{f(\pi/2)}{2n+1} \right|\,.$$

   En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin((2n+1)t)\, dt = 0$.
5. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

6. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$$

7. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ puis la calculer.