TD3 : Feuille de TD sur les séries

Les exercices avec une ou plusieurs * sont plus difficiles et sont à chercher dans un deuxième temps.

I) Etude de séries à termes positifs

Exercice 1. *Calculer* $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\cos(\frac{1}{n+1})-\cos(\frac{1}{n})\right)$, $\sum_{n=3}^{+\infty} e^{-n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

Exercice 2. *1) Pour* $x \in \mathbb{R}$, *calculer*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

2) Etudier la nature de la série

$$\sum\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Exercice 3. *Déterminer la nature des séries (ci-dessous* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est un paramètre) :*

$$\sum e^{-1/n} \quad \sum \frac{e^{-1/n}}{n^\alpha} \quad \sum \frac{e^n}{n!},\ \sum \frac{1}{\sqrt{(n+5)(n+7)(n+9)}},\ \sum\left(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}-1\right).$$

Exercice 4. *Déterminer la nature des séries (ci-dessous* $a>0$ *est un paramètre) :*

$$\sum \frac{n^2}{n^3+1} \quad \sum e^{-n^2} \quad \sum \frac{(\ln n)^{123456}}{n^{1,1}} \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \sum \frac{1}{\ln(n^2+n+1)},\ \sum \frac{1}{n\cos^2 n},\ \sum\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sum \frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \quad \sum\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right],\ \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(2n+7)}},\ \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\ \sum (1-e^{\frac{1}{n^2}})\sqrt{\ln n}.$$

Exercice 5. Sur le critère de Cauchy et D'Alembert. *On définit une suite* (u_n) *par* $u_{2p}=(\frac{2}{3})^p$ *et* $u_{2p+1}=2(\frac{2}{3})^p$. *Tester le critère de d'Alembert puis de Cauchy pour étudier la nature de* $\sum u_n$.

Exercice 6. *Soit* (u_n) *une suite à valeurs strictement positives et décroissante. On suppose que la série* $\sum u_n$ *converge. Montrer que la suite* (nu_n) *tend vers* 0 *lorsque* $n\to+\infty$.

Exercice 7. *Etudier la nature de la série* $\sum u_n$ *(ci-dessous,* $\alpha\in\mathbb{R}$ *est un paramètre) où le terme général* u_n *est donné par :*

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}dx,\ \ u_n=\arctan(n+a)-\arctan(n),\ u_n=\frac{\cosh n}{\cosh(2n)}$$

$$u_n=\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n,\ \ u_n=ne^{-\sqrt{n}},\ \ u_n=\frac{(-1)^n+\alpha}{n^2+1},\ \ u_n=\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}.$$

Exercice 8. *Etudier la convergence de la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = an\ln(1+\frac{1}{n})-b\cos(\frac{1}{n})+c\sin(\frac{1}{n})$ *où* a, b, *et* c *sont trois réels (discuter en fonction de* a, b *et* c*).*

Exercice 9. *On admet que* $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. *Calculer* $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$ *puis* $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$.

II) Quelques contre-exemples.

Exercice 10. *On suppose* $u_n > 0$. *On définit* $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ *et* $w_n = \frac{u_n}{1+{u_n}^2}$.

1. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum v_n$ *converge.*
2. *Montrer que si la série* $\sum u_n$ *converge, alors la série* $\sum w_n$ *converge, mais que la réciproque est fausse.*

Exercice 11. *Soit* $\sum u_n$ *une série réelle à termes strictement positifs et divergente.*
1) Peut-on conclure quant à la convergence ou la divergence de la série $\sum u_n^2$ *?*
2) Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ *diverge toujours (cf résultat de l'exercice précédent question 1)).*
3) Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$ *converge.*
4) (**) Peut-on conclure quant à la convergence ou divergence de la série $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$ *? (considérer par exemple* $u_n := 1$ *si* n *est un carré et* $u_n = 0$ *sinon.)*

Exercice 12. *Soit* $\sum u_n$ *une série réelle à termes strictement positifs et convergente.*
1) Montrer que la série $\sum u_n^2$ *converge.*
2) Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ *converge.*
3) (*) Montrer que la série $\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ *diverge (<u>Indication</u> : Utiliser l'égalité* $\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{u_n}}{n\sqrt{u_n}}$ *puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)*

III) Séries à terme quelconque

Exercice 13. *Etudier la nature de la série* $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 14. *Etudier l'absolue convergence et la convergence des séries :*

$$\sum \frac{\sin n + 3\cos(2n)}{n^3+n-1}, \quad \sum \frac{e^n \sin(4n)}{\ln(3n)^n}.$$

Exercice 15. *Etudier la nature des séries*

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \ \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 16. *Etudier la convergence des séries suivantes (ci-dessous* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*) :*

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{4^n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}, \quad \sum (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{3n+\sin(n)}, \ \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

Exercice 17. *(*) Montrer que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$ *n'est pas absolument convergente, puis grâce à un développement asymptotique montrer qu'elle est convergente.*

Exercice 18. *(*). Soit* $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $0 < \alpha \leq 1$. *A l'aide de la transformation d'Abel (reprendre la méthode du cours), montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *est semi-convergente.*

Exercice 19. *Etudier la convergence des séries* $\sum \frac{1}{\ln n} \sin(\frac{n\pi}{4})$ *et* $\sum \frac{(-1)^n \cos n}{\ln(\ln(\ln n))}$.

Exercice 20. Calcul de la somme de la série harmonique alternée.
1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge.*
2) On note S_n *la suite des sommes partielles de cette série. Montrer que :*

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$$

(utiliser que $1/(p+1) = \int_0^1 t^p dt$*).*
3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

IV) Les exercices classiques

Exercice 21. Formule de Stirling. *On souhaite montrer la formule de Stirling :*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On pose $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ *et* $b_n = \ln a_n - \ln a_{n-1}$.
1) Par un développement limité montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ *telle que* $b_n = \frac{c}{n^2} + O(1/n^3)$*. En déduire que la série* $\sum b_n$ *converge.*
2) a) Montrer qu'il existe une constante c' *telle que* $\ln a_n = c' + \frac{1}{12n} + o(1/n)$.
b) Déduire que $n! \sim \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
3) a) (**) Démontrer le résultat suivant concernant la valeur des intégrales de Wallis $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ *(voir chapitre intégrale). On a :*

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p(p!)^2}\frac{\pi}{2},\quad I_{2p+1} = \frac{2^p(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

b) (*) Montrer que $I_n \to 1$ *lorsque* n *tend vers l'infini (découper par exemple l'intégrale sur* $[0, 1-\eta]$ *et sur* $[1-\eta, 1]$*).*
c) En étudiant un équivalent du quotient I_{2p}/I_{2p+1}*, déduire de la question 3a) que* $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 22. Règle de Duhamel *(*).*
Soit $\sum x_n$ *une série à termes positifs telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait :*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(1/n).$$

1) Soit $y_n = 1/n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$*. Montrer que si* $\alpha \neq \lambda$*, alors on a*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \sim \frac{\alpha-\lambda}{n}.$$

2) Montrer que si $\lambda > 1$*, alors la série converge, et si* $\lambda < 1$*, alors la série diverge (Indication : dans le premier cas prendre* α *tel que* $1 < \alpha < \lambda$ *et étudier le signe de* $\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n}$*).*

Exercice 23. Constante d'Euler *(*).*
On cherche un développement asymptotique de la série harmonique $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$*. On pose :*

$$x_n = \frac{1}{n},\quad y_n = \ln n - \ln(n-1),\quad z_n = x_n - y_n.$$

1) a) Montrer que la série $\sum_n z_n$ converge et que $z_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
b) On note R_n le reste de la série $\sum_{n\geq 1} z_n$. Montrer que $R_n \sim -\frac{1}{2n}$.
2) Démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \ln n + (1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k) - R_n.$$

3) En déduire qu'il existe une constante γ (la constante d'Euler) telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 24. Produit de Cauchy.
1) Réaliser le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{3^n}$ par elle-même. Quel résultat obtient-on ?
2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
b) On pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_p u_q$. En utilisant l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique), montrer que $|w_n| \geq \frac{2n}{n+2}$ puis que la série $\sum w_n$ diverge.
c) Que dit cet exercice par rapport au théorème sur le produit de Cauchy ?

Exercice 25. Critère de la loupe. *On considère une suite de réels $(u_n)_{n\geq 0}$ positive décroissante. En sommant par paquet, montrer que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ converge.*

V) Exercices plus difficiles.

Exercice 26. *Etudier la convergence de la série de terme général u_n défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :*

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } \exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ n = k^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 27. *(*) Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k}$.*

Exercice 28. *(**) Etudier la convergence de l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4 \sin^2 t}$$

(Indication : à l'aide d'un changement de variable, ramener l'étude de la convergence de I à celle d'une série $\sum_n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{1+(u+n\pi)^4 \sin^2 u}$, et utiliser la minoration $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ sur $[0, \pi/2]$).

Exercice 29. *(**) Etudier la nature des séries suivantes (ci-dessous, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ sont des paramètres) :*

$$\sum (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}), \quad \sum \frac{x^n}{y^n + n}.$$

Exercice 30. *(***) Etudier la nature des séries $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ et $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.*

Exercice 31. *(**) Etudier la nature de la série $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{5})^n)$ (Indication : poser $a = 2 + \sqrt{5}$ et $b = -2 + \sqrt{5}$ puis étudier la parité de $a^n + b^n$).*