Feuille de TD4 : Ensembles dénombrables et familles sommables

Exercice 1. *1) Est-ce que les ensembles* $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$, *et* $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ *sont dénombrables ? (Ici* $\mathbb{D}$ *désigne l'ensemble des décimaux).*
2) L'ensemble $A := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; \exists q, q' \in \mathbb{Q} \; ; \; z = q + iq'\}$ *est-il dénombrable ?*

Exercice 2. *Pour chaque entier* $m \in \mathbb{N}$ *soit* $f_m : \mathbb{N} \to J_m$ *une application surjective.*
1) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k \quad \text{avec} \quad f(m,n) = f_m(n),$$

est bien définie et surjective.
2) En déduire le résultat du cours disant que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.
3) Donner un exemple montrant que le résultat est faux en général quand l'ensemble d'indices n'est pas dénombrable.

Exercice 3. *Soit* J *un ensemble dénombrable non vide.*
1) Montrer que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, *l'ensemble des parties finies de* J *ayant au plus* n *éléments est dénombrable.*
2) En déduire que l'ensemble de toutes les parties finies de J *est dénombrable.*
3) L'ensemble de toutes les parties de J *est-il dénombrable ?*

Exercice 4. *On rappelle qu'une suite d'éléments d'un ensemble non vide est par définition une application de* $\mathbb{N}$ *dans* X. *Pour un sous-ensemble* X *d'un espace vectoriel* E *avec* $0 \in X$ *on dit qu'une suite* $q : \mathbb{N} \to X$ *de* X *est nulle à partir d'un certain rang quand il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *(dépendant de la suite) telle que pour tout entier* $n \geq N$ *on ait* $q_n = 0$. *On note* $c_{00}(X)$ *l'ensemble de ces suites.*
1) Montrer que l'ensemble $c_{00}(\mathbb{Q})$ *est dénombrable.*
2) Est-ce que $c_{00}(\mathbb{R})$ *est dénombrable ?*
3) L'ensemble de toutes les suites de rationnels est-il dénombrable ?

Exercice 5. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de* f *est dénombrable. Qu'en est-il pour une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *?*

Exercice 6. *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble* E. *Montrer que l'ensemble* $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *est dénombrable.*

Exercice 7. *1) Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p_1, ..., p_n$, n *nombres premiers distincts. Montrer que* $\mathbb{N}^n$ *est dénombrable (considérer l'application* $\phi : (k_1, ..., k_n) \longmapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$*).*
2) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?

Exercice 8. *Un nombre réel est dit algébrique s'il existe un polynôme* P *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *tel que* $P(x) = 0$. *Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit transcendant. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.*

Exercice 9. *Etudier les sommes suivantes (discuter en fonction du paramètre si nécessaire) :*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j)^\alpha}, \quad \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha},$$

Exercice 10. Non intervertion des sommations.
1) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ *un entier fixé. Montrer que la série* $\sum_{p\in\mathbb{N}^*, q\neq p} \frac{1}{p^2-q^2}$ *converge.*
2) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$*, on pose :*

$$a_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2-q^2}, \ p \neq q, \\ 0, \ p = q. \end{cases}$$

Montrer que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q} \right) = - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q} \right).$$

Quelle propriété ce résultat montre-t-il ?

Exercice 11. *Soit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une famille de réels telle que la famille* $(ka_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *soit sommable. Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j.$$

Exercice 12. *Soit la famille* $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *définie par :*

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+j}}, \ \ i \text{ et} j \text{ pairs} \\ -\frac{1}{2^{i+j}}, \ \ i \text{ et} j \text{ impairs} \\ 0, \ \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que cette famille est sommable et calculer sa somme.

Exercice 13. *On note* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$*. Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2}, \quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*, \ p|q} \frac{1}{p^2q^2}, \quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*, \ \mathrm{pgcd}(p,q)=1} \frac{1}{p^2q^2},$$

Exercice 14. Inégalité de Carleman. *On admet dans cet exercice que si* $x_1,\ldots,x_n$ *sont* n *nombres positifs, alors* $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ *et Soit pour* $i \in \mathbb{N}^*$*,* $c_i := (i+1)^i / i^{i-1}$*. Soit* $\sum a_n$ *une série à termes positifs convergente. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad \text{(carleman)}$$

1) Démontrer que $(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq (c_1 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$.
2) Démontrer que $(c_1 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} = 1/(n+1)$.
3) En déduire que pour $N \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\sum_{n=1}^{N} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

4) Montrer en intervertissant les sommes que :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{i=1}^{n} c_i a_i = \sum_{i=1}^{N} c_i a_i \sum_{n=i}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

5) En écrivant $c_i = \frac{(i+1)^i}{i^i} i$ *et en utilisant l'inégalité* $(1+1/i)^i \leq e$, $i \in \mathbb{N}^*$*, montrer que* $c_i \leq ei$.
6) En déduire (carleman) *en utilisant le caractère télescopique de la série* $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$.