Méthode du simplexe sous forme tableau (algorithme tableau move)

Le problème linéaire standard s'écrit:

$$(\text{PLS}) \quad \min_{Ax=b,\ x\geq 0} \langle c, x\rangle$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $rg(A) = m \leq n$ et $\langle c, x\rangle$ désigne le produit scalaire de c par x. On note $A_1, ..., A_n$ les colonnes de A.

Etape 1: obtention d'une bfs pour (PLS). Considérer le problème auxiliaire (P_{aux}):

$$(\mathrm{P_{aux}}) \quad \min_{Ax+y=b,\ x\geq 0,\ y\geq 0} \sum_{1\leq j\leq m} y_j,$$

où $y \in \mathbb{R}^m$. Appliquer la méthode du simplexe à ce problème pour trouver une bfs X pour le problème (PLS).

Etape 2: Algorithme du simplexe à partir du tableau (T) suivant associé à une bfs $X = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$

$$\begin{array}{ccccccccccc|cc}
A_1 & A_2 & \cdots & A_p & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_q & \cdots & A_n & X & \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,q} & \cdots & y_{1,n} & x_1 & \text{ligne 1} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,q} & \cdots & y_{2,n} & x_2 & \text{ligne 2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & y_{p,m+1} & \cdots & y_{p,q} & \cdots & y_{p,n} & x_p & \text{ligne p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,q} & \cdots & y_{m,n} & x_m & \text{ligne m} \\
\hline
r_1 & r_2 & \cdots & r_m & \cdots & r_{m+1} & & \cdots & r_q & \cdots & r_n & z = -c^T \cdot X & \text{ligne m+1}
\end{array}$$

où les r_i sont les rcc associés au tableua: $r_j = c_j - \sum_{1\leq i\leq n} y_{ij}c_i$

Tant qu'il existe $1 \leq q \leq n$ tel que $r_q < 0$ et $1 \leq i \leq m$ tel que $y_{iq} > 0$, faire:

- choisir p est tel que $\frac{x_p}{y_{pq}} = \min\left(\frac{x_i}{y_{iq}} \mid 1 \leq i \leq m,\ y_{iq} > 0\right)$.
- effectuer l'opération $\ell_p \leftarrow \frac{1}{y_{pq}}\ell_p$
- pour $1 \leq i \leq m$, $i \neq p$, faire $\ell_i \leftarrow \ell_i - y_{iq}\ell_p$ et faire $\ell_{m+1} \leftarrow \ell_{m+1} - r_q\ell_p$

Si $r_q \geq 0$ pour tout q, alors l'algorithme se termine (on a convergé) ou si à une itération k de l'algorithme, il existe une colonne q telle que $r_q < 0$ et $y_{iq} < 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, alors (PLS) n'admet pas de solution.