Feuille de TD4 Programmation linéaire sous contraintes linéaires

Exercice 1. Montrer le lemme sur les bfs voisines (i.e., montrer que lorsque l'on passe d'une bfs X à une nouvelle bfs voisine de la façon vue en cours, les nouvelles colonnes $A_1, ...\hat{A}_p, ...A_m, A_q$ sont linéairement indépendantes).

Exercice 2. On considère le problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires :

$$(LP) \ \min J(x_1, x_2) := x_1 - 2x_2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} -4x_1 + 6x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dessiner l'ensemble des admissibles C , le gradient de J aux sommets, et le cône normal à C aux sommets. Quelle est la solution de (LP)?

Exercice 3. On considère le problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires :

$$(LP) \ \max J(x_1, x_2) := x_1 + 5x_2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1) Dessiner l'ensemble des admissibles C , le gradient de J aux sommets, et le cône normal à C aux sommets. Quelle est la solution de (LP)?
2) Résoudre le problème à l'aide de la méthode du simplexe.

Exercice 4. Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe le problème linéaire suivant:

$$(LP) \ \max J(x_1, x_2) := 4x_1 + 2x_2 + x_3 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x_1 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \leq 25, \\ 8x_1 + x_2 \leq 125, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Indication: si la théorie des rcc n'a pas été vue, on choisira successivement les indices suivants pour la colonne entrante dans la base: $q = 1$, $q = 2$, $q = 4$, $q = 3$, $q = 1$.

Exercice 5. Appliquer la méthode vue en cours pour initialiser le problème suivant (i.e. pour trouver une bfs de départ):

$$(LP) \ \max J(x_1, x_2) := -x_1 + 4x_2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq -8, \\ -x_1 + 3x_2 \leq -7, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Résoudre ensuite ce problème par la méthode du simplexe.

Exercice 6. Résoudre par la méthode du simplexe le problème suivant:

$$(LP) \ \max J(x_1, x_2) := x_1 + 2x_2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ |Ax = b, \ x \geq 0\}$.
1) Montrer que si x est une bfs, alors x est un point extrémal de E (i.e. il ne s'écrit pas comme une combinaison convexe stricte de deux éléments de E).
2) Montrer que si x est un point extrémal de E, alors x est une bfs (raisonner par l'absurde et écrire une relation de liaison afin d'obtenir une contradiction).

DM à rendre le lundi 16 avril 2012 : Lemme de Farkas et conséquences

Partie 1. Le but de cette partie est de montrer que l'enveloppe conique d'un nombre fini de vecteurs est fermée. Soit $u_1, ..., u_p$, p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'enveloppe conique K de ces vecteurs est par définition:

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^p,\ v = \sum_{1 \le i \le p} \lambda_i u_i \right\}.$$

1) On suppose que $\{u_1, ..., u_p\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Montrer que K est fermé.
2) On suppose que $\{u_1, ..., u_p\}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^n$. Soit $m < p$ et $1 \le i_1 < ... < i_m \le p$, m indices tels que $(u_{i_1}, ..., u_{i_p})$ soit une famille libre. On note i le m-uplet $(i_1, ..., i_m)$, et K_i l'enveloppe conique de cette sous-famille.
a) Montrer que $\cup_i K_i \subset K$.
b) On va démontrer l'autre inclusion par récurrence descendante. Montrer le résultat si $p = 1$.
c) On suppose que la propriété est vraie au rang p et on considère une famille liée de $p+1$ vecteurs, $u_1, ..., u_{p+1}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $u = \sum_{1 \le i \le p+1} \lambda_i u_i$, $\lambda_i \ge 0$. Montrer que l'on peut supposer que $\lambda_i > 0$ pour $1 \le i \le p+1$.
d) En utilisant une relation de liaison, montrer que u peut s'exprimer à l'aide de p vecteurs et en déduire l'inclusion inverse.
3) Conclure que K est fermé.

Partie 2. Partie préliminaire au lemme de Farkas.
Soit $(a_i)_{1 \le i \le n}$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $a_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère les deux assertions suivantes:
(i). $\forall\ h \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ 1 \le i \le p$, $\langle a_i, h \rangle \le 0 \Longrightarrow \langle a_0, h \rangle \ge 0$.
(ii). $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p$, $a_0 + \sum_{1 \le i \le p} \lambda_i a_i = 0$.
1) Montrer que $(ii) \Longrightarrow (i)$.
2) On veut montrer l'autre implication. Soit $C = \{\sum_{1 \le i \le p} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^p\}$.
a) Montrer que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ (utiliser la partie précédente) et qu'il suffit de montrer que $-a_0 \in C$.
b) On suppose que $-a_0 \notin C$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout h dans $\mathbb{R}^n$ et tout $y \in C$, $\langle -a_0, h \rangle > \varepsilon > \langle y, h \rangle$ (s'aider d'un dessin). En déduire une contradiction et conclure.

Partie 3. Lemme de Farkas. Soit $1 \le q \le p$ deux entiers, $(a_i)_{1 \le i \le p}$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $a_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère les deux assertions suivantes:
(i). $\forall\ h \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ 1 \le i \le p$, $\langle a_i, h \rangle = 0$, $\forall\ q+1 \le i \le p$, $\langle a_i, h \rangle \le 0 \Longrightarrow \langle a_0, h \rangle \ge 0$.
(ii). $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^p$, $\forall\ q+1 \le i \le p$, $\lambda_i \ge 0$, et $a_0 + \sum_{1 \le i \le p} \lambda_i a_i = 0$.
1) Montrer que $(ii) \Longrightarrow (i)$.
2) Montrer la réciproque en écrivant une égalité comme deux inégalités.

Partie 4. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour un problème linéaire avec contraintes d'égalité et d'inégalité.
On s'intéresse au problème de programmation linéaire suivant avec contraintes d'égalité et d'inégalité:

$$(PL) \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \langle c, x \rangle \,, \text{ sous les contraintes} \begin{cases} \langle a_i, x \rangle = b_i, \ 1 \le i \le q, \\ \langle a_i, x \rangle \le b_i, \ q+1 \le i \le p, \end{cases}$$

où $c, x, a_i \in \mathbb{R}^n$, et $0 \le q \le p$. On souhaite montrer qu'une solution réalisable x de (PL) est optimale si et seulement:

$$\begin{cases} (i) \quad c + \sum_{1 \le i \le p} \lambda_i a_i = 0, \\ (ii) \quad \langle a_i, x \rangle = b_i, \quad 1 \le i \le q, \\ (iii) \quad \langle a_i, x \rangle = b_i, \quad q+1 \le i \le p, \\ (iv) \quad \lambda_i \ge 0, \quad \lambda_i(\langle a_i, x \rangle - b_i) = 0, \ q+1 \le i \le p. \end{cases}$$

1) Soit $I(x) = \{q+1 \le i \le p \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}$ l'ensemble des contraintes actives au point x et $J(x) = \{1, ..., q\} \cup I(x)$. Montrer que $\langle c, h \rangle \ge 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle a_i, h \rangle = 0$, $1 \le i \le q$, $\langle a_i, h \rangle \le 0$ $\forall i \in I(x)$.
2) En déduire par le lemme de Farkas qu'il existe (λ_i), $i \in J(x)$ tel que $c + \sum_{i \in J(x)} \lambda_i a_i = 0$ et $\lambda_i \ge 0$ pour $i \in I(x)$.
3) Conclure que si x est optimale, alors les 4 points ci-dessus sont vérifiés.
4) On veut montrer la réciproque, cad que si x satisfait les 4 points ci-dessus, alors x est optimale.
a) Soit x une solution réalisable et $h = x' - x$. Montrer que $\langle c, h \rangle = -\sum_{1 \le i \le p} \lambda_i \langle a_i, h \rangle$.
b) Montrer que dans tous les cas $\langle a_i, h \rangle \le 0$, et en déduire que x est optimale.