TP Programmation linéaire sous contraintes linéaires en nombres entiers

Le but du TD est de résoudre un problème linéaire sous contraintes linéaires et dont les variables sont entières :

$$\min\{c \cdot x |\ x \geq 0,\ Ax = b,\ x \in \mathbb{N}^n\}. \tag{0.1}$$

où $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Pour cela on utilisera Matlab.

Préliminaires. On considère le même problème mais en variables réelles :

$$\min\{c \cdot x |\ x \geq 0,\ Ax = b,\ x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{0.2}$$

Que peut-on dire de la valeur du critère pour les solutions de (0.2) par rapport aux solutions de (0.1)?

Exercice 1. On considère le problème

$$\min\{-8x_1 - 5x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 6,\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45,\ x_1, x_2 \geq 0\} \tag{0.3}$$

1) Résoudre (0.3) en variables réelles à l'aide de la fonction `linprog`.
2) Résoudre (0.3) en imposant $x_1 \leq 3$. Que dire de la solution obtenue?
3) a) Résoudre (0.3) en imposant $x_1 \geq 4$. Que dire de la solution obtenue?
b) On suppose maintenant que $x_2 \leq 1$ en plus de la condition $x_1 \geq 4$. Résoudre (0.3) avec ces deux contraintes en plus. Même question en supposant que $x_1 \geq 4$ et $x_2 \geq 2$.
c) En continuant la procédure de découpage (la méthode s'appelle **méthode des coupes**), trouver la solution entière de (0.3) avec la condition $x_1 \geq 4$ (s'aider éventuellement d'une représentation graphique).
4) Quelle est la solution de (0.3) avec des variables entières? Retrouver le résultat en utilisant la fonction `MILP_bb` de Matlab.

Exercice 2. Résoudre de même le problème suivant en variables réelles puis en variables entières.

$$\min\{2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \mid x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 10,\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 13,\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,\ x_i \geq 0\} \tag{0.4}$$

Exercice 3. On considère $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^{*p}$ donné, $p \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Chaque coordonnée de x représente un nombre d'individu appartenant à un département p, et on suppose qu'il y a N sièges de députés à répartir parmi ces p départements. Justifier qu'une façon de minimiser l'écart de représentativité entre individu consiste à considérer le problème de programmation linéaire suivant :

$$\min \left\{ u - v \mid v \leq \frac{\alpha_i}{x_i} \leq u,\ \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i = N,\ (\alpha_1, ...\alpha_p) \in \mathbb{N}^p \right\},$$

où α_i représente le nombre de députés dans le département i.
Résoudre le problème suivant par la programmation linéaire en nombre entier : avec $N = 7$, $p = 4$ et $x = (10, 18, 30, 34)$, puis avec $N = 10$, $p = 4$, $x = (350, 251, 248, 151)$. On pourra essayer plusieurs valeurs de la précision ϵ (voir `MILP_bb`). Dans les deux cas, trouver aussi la solution du problème linéaire continue ($\alpha_i \in \mathbb{R}$). Calculer les rapports $\frac{\alpha_i}{x_i}$ dans le cas continue et le cas entier. Conclusions?

Indication Matlab :

- fonction simplexe continue : `linprog`
- fonction simplexe entière : `MILP_bb` (`http://www4.ncsu.edu/~kksivara/ma505/codes/MILP_bb.m`). `MILP_bb` utilise les deux fonctions : `dual_simplex_bb`, `revised_simplex_bb`.
- fonctions à télécharger: `http://www.math.univ-montp2.fr/~bayen/essai/`
- Exemple d'appel à la fonction `MILP_bb`: $[x, val, status] = MILP\_bb(c, A, b, M, eps)$