TP2 : optimisation linéaire sous contraintes linéaires en nombres entiers

Partie 1. Problème primal et problème dual. Résoudre avec Matlab les deux problèmes

$$\min\{c \cdot x |\ x \geq 0,\ Ax = b,\ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{0.1}$$

$$\max\{b \cdot p |\ A^T p \leq c,\ = b,\ p \in \mathbb{R}^n\}, \tag{0.2}$$

avec $m = 3$, $n = 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$. On utilisera l'option `simplex` pour forcer Matlab à utiliser l'algorithme du simplexe (par défaut Matlab utilise un autre algorithme dit algorithme de points intérieurs). Vérifier que les solutions sont identiques (méthode simplexe et points intérieurs). Montrer que si x est admissible pour (0.1) et si p est admissible pour (0.2), alors $c^T x \geq b^T p$. Qu'en déduit-on?

Partie 2. On s'intéresse à un problème linéaire sous contraintes linéaires et dont les variables sont entières :

$$\min\{c \cdot x |\ x \geq 0,\ Ax = b,\ x \in \mathbb{N}^n\}. \tag{0.3}$$

où $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. On considère également le problème (PLS) mais en variables réelles :

$$\min\{c \cdot x |\ x \geq 0,\ Ax = b,\ x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{0.4}$$

On suppose que (PLS) admet une solution x^*. Montrer que (0.3) admet une solution $\overline{x}$ et que $c \cdot \overline{x} \leq c \cdot x^*$.

I (Exemple de la méthode des coupes "branch and bound"). On considère le problème

$$\min\{x_1 - 2x_2 \mid -4x_1 + 6x_2 \leq 9,\ x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\} \tag{0.5}$$

1) Résoudre (0.5) en variables réelles à l'aide de la fonction `linprog`.
2) Résoudre (0.5) en variables entières à l'aide de la fonction `linprog` (qui fonctionne en variables réelles) et en considérant une hiérarchie de problèmes en variables réelles. Pour cela, on rajoutera au fur et à mesure des contraintes d'inégalités sur les variables ajoutées en fonction de la solution.
3) Comparer la solution entière avec la solution réelle et vérifier la solution à l'aide des fonctions `MILP_bb`, `dual_simplex_bb`, `revised_simplex_bb`.

II. Résoudre de même le problème suivant en variables réelles puis en variables entières.

$$\min\{2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \mid x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 10,\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 13,\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,\ x_i \geq 0\} \tag{0.6}$$

III (Ecart de représentativité). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{N}^{*p}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Chaque entier α_i représente un nombre d'habitants d'un département $1 \leq i \leq p$, et on suppose qu'il y a N sièges de députés en tout à répartir sur les p départements. On suppose qu'une façon de minimiser l'écart de représentativité entre chaque individu consiste à résoudre le problème suivant:

$$\min\left\{v - u \mid u \leq \frac{x_i}{\alpha_i} \leq v,\ \sum_{1 \leq i \leq p} x_i = N,\ (\alpha_1, ...\alpha_p) \in \mathbb{N}^p\right\},$$

où x_i représente le nombre de députés dans le département i.
Résoudre le problème suivant par la programmation linéaire en nombre entier : avec $N = 7$, $p = 4$ et $x = (10, 18, 30, 34)$, puis avec $N = 10$, $p = 4$, $x = (350, 251, 248, 151)$. On pourra essayer plusieurs valeurs de la précision ϵ (voir `MILP_bb`). Dans les deux cas, trouver aussi la solution du problème linéaire continue ($\alpha_i \in \mathbb{R}$). Calculer les rapports $\frac{\alpha_i}{x_i}$ dans le cas continue et le cas entier. Conclusions? Résoudre le même problème pour les quatre départements du Languedoc-Roussillon.

Indication Matlab :

- fonction simplexe continue : `linprog`
- fonction simplexe entière : `MILP_bb` (`http://www4.ncsu.edu/~kksivara/ma505/codes/MILP_bb.m`). `MILP_bb` utilise les deux fonctions : `dual_simplex_bb`, `revised_simplex_bb`.
- fonctions à télécharger: `http://www.math.univ-montp2.fr/~bayen/essai/`
- Exemple d'appel à la fonction `MILP_bb`: $[x, val, status] = MILP\_bb(c, A, b, M, eps)$