Examen d'Optimisation Numérique - 1er juin 2012

Durée 3h. Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$. On considère un problème linéaire

$$\min_{AX=b,\ X\geq 0} \langle c, X\rangle ,$$

où $A \in M_{2,4}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}^4$, et on considère une b.f.s. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le tableau $[1, 2]$ qui lui est associé :

$$\begin{array}{cccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & X \\ \hline 1 & 0 & y_{1,3} & y_{1,4} & x_1 \\ 0 & 1 & y_{2,3} & y_{2,4} & x_2 \\ \hline 0 & 0 & r_3 & r_4 & z = -\langle c, X\rangle \end{array}$$

1) Si $r_3 < 0$, $y_{1,3} \leq 0$ et $y_{2,3} \leq 0$, démontrer que le problème n'a pas de solution.
2) Si $r_3 \geq 0$ et $r_4 \geq 0$, démontrer que X est une solution optimale.
Remarque : on demande dans ces deux questions de redémontrer le résultat vu en cours dans ce cadre.

Exercice 2. On considère le problème d'optimisation:

$$(P): \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} xy, \quad x^2 + y^2 \leq 2,\ x + y \geq 0.$$

1) Montrer que tout minimum local satisfait les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
2) Trouver les points qui satisfont ces conditions (donner les multiplicateurs de Lagrange associés à ces points). Y-a-t-il complémentarité stricte pour ces points?
3) a) Rappeler le théorème de condition suffisante du second ordre.
b) Appliquer ce théorème pour trouver les minima locaux de (P). (*Indication* : calculer la Hessienne du Lagrangien, mettre en place les gradient des contraintes actives). Quels sont les minima globaux de (P)?

Exercice 3. Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.
Partie 1. Etude de l'optimalité.
1) Soit Q une matrice de taille n symétrique, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, et $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$. On considère le problème d'optimisation:

$$(P): \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) := \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle c, x\rangle , \quad \langle a_i, x\rangle \leq b_i,\ 1 \leq i \leq m.$$

Ecrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour ce problème.
2) a) Soit x^* un point de Karush-Kuhn-Tucker pour ce problème. Rappeler la définition de l'ensemble des indices des contraintes actives $I(x^*)$.
b) On suppose que pour tout $i \in I(x^*)$ et tout $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle a_i, d\rangle \leq 0$, on a $\langle Qd, d\rangle \geq 0$. Soit x un point réalisable et $d = x - x^*$. Montrer que $f(x) - f(x^*) = \langle \nabla f(x^*), d\rangle + \frac{1}{2}\langle Qd, d\rangle$ (utiliser le caractère quadratique de f).
c) En utilisant les conditions de KKT, montrer que $f(x) - f(x^*) \geq \frac{1}{2}\langle Qd, d\rangle$ (*Indication* : montrer que $\langle a_i, d\rangle \leq 0$).
d) Qu'en déduit-on sur la nature du point x^*?

Partie 2. Etude d'un algorithme.
On considère maintenant le problème d'optimisation

$$(P_0): \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) := \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle c, x\rangle , \quad Ax = b,$$

où $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ est de rang m. On suppose que Q est définie positive. On considère l'algorithme suivant : soit $\rho > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$. A chaque étape k, on effectue les deux opérations suivantes :

- on résout le problème suivant (P_k) : x_{k+1} est le minimum sur $\mathbb{R}^n$ de $x \longmapsto f(x) + \langle \lambda_k, Ax - b \rangle$ (ici, $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$).
- on remet à jour : $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Ax_{k+1} - b)$.

1) Ecrire les conditions d'optimalité pour (P_0) (i.e. les conditions de KKT). On notera x la solution et λ le multiplicateur associé.
2) Ecrire la condition d'optimalité pour (P_k) et déduire une relation entre $x_{k+1} - x$ et entre $\lambda_k - \lambda$.
3) Montrer que $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho A(x_{k+1} - x)$.
4) En déduire grâce à 2) que $\lambda_{k+1} - \lambda$ s'exprime en fonction de $\lambda_k - \lambda$, puis que si ρ est suffisamment petit, la suite $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ converge de même que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$.