Examen d'Optimisation Numérique - 25 juin 2012 (seconde session)

Durée 2h. Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite. Les exercices sont indépendants. On attachera de l'importance à la rédaction et à la précision des réponses. Aucune réponse non justifiée sera prise en compte.

Exercice 1. Dans cet exercice, on appliquera la méthode du simplexe vue en cours sous forme tableau. On considère le problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires:

$$(LP): \ \min x_2 - 2x_1, \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_4 \leq 8, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 2, \\ x_i \geq 0, i = 1, ..., 6. \end{cases}$$

1) Le problème (LP) admet-il une bfs de départ "naturelle'?
2) Résoudre la phase d'initialisation.
3) Résoudre le problème (LP).
4) Tracer l'ensemble E des solutions admissibles (dans $\mathbb{R}^2$), le cône normal à E en chaque sommet, ainsi que le gradient de la fonction en chaque sommet. Que peut-on en déduire?

Exercice 2. On considère le problème d'optimisation suivant:

$$(P): \ \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x+1)^2 + (y+1)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 3, \ -x^2 + 2y \leq 0.$$

1) Justifier l'existence d'une solution pour le problème (P).
2) Appliquer le théorème de Fritz-John au problème (P).
3) Montrer que le multiplicateur λ_0 associé au coût est non-nul.
4) Calculer tous les points de KKT. Pour chaque point de KKT, on précisera les deux multiplicateurs (λ_1, λ_2) associés aux deux contraintes. (*Indication* : on montrera qu'il y a exactement cinq points de KKT).
5) En déduire directement le maximum global pour le problème (P).
6) Appliquer le théorème de conditions suffisantes du second ordre au problème (P), et montrer qu'il y a uniquement deux maxima locaux pour ce problème (on calculera le hessien du lagrangien associé au problème, puis pour chaque point de KKT on mettra en place l'ensemble des directions critiques).

Exercice 3. Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ une matrice de rang m, et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. On dit que x est un point extrémal de E si et seulement si il ne n'écrit pas comme combinaison convexe stricte de deux points de E (i.e. x ne peut s'écrire $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ avec $\lambda \in]0,1[$, $y \in E$, $z \in E$).
1) Rappeler la définition d'une bfs.
2) Soit $x = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$ une bfs, on note $a_1, ..., a_m$ les m colonnes de base de A associées à x. On suppose que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ avec $\lambda \in]0,1[$, $y \in E$, $z \in E$.
a) Montrer que $y = (y_1, ..., y_m, 0, ..., 0)$ et $z = (z_1, ..., z_m, 0, ..., 0)$.
b) En déduire que x est extrémale.