Partiel d'Optimisation Numérique - 5 avril 2012

Durée : 3h. L'usage des documents et de la calculatrice est interdit. Barème indicatif : 10 points par exercice.

Exercice 1. On demande de traiter cet exercice par la méthode du simplexe vue en cours (i.e. sous forme tableau). Soit $\theta > 0$ un paramètre. On considère le problème linéaire suivant (PL) :

$$\min \; -2x_1 + 2x_2 + 5x_3, \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq \theta, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1) *Question de cours*: Rappeler la définition d'une bfs. Comment reconnaître qu'une bfs est optimale?
2)a) Mettre le problème (PL) sous forme standard.
b) Initialiser le problème (PL) et trouver une bfs de départ.
c) Ecrire le tableau de départ pour résoudre (PL). On rappelle que l'on part du tableau trouvé dans la phase d'initialisation. On calculera avec soin les nouveaux rcc.
3) a) Résoudre le problème (PL) en fonction de θ. (Discuter en fonction de θ l'indice entrant, et résoudre deux problèmes).
b) Tracer la fonction $\theta \longmapsto z(\theta)$ où $z(\theta)$ est la valeur optimale du problème (PL).
c) Cette fonction est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 2. On considère une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On rappelle que f vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, y \in \mathbb{R}^n \; f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x),$$

où $u \cdot v$ désigne le produit scalaire usuel de u et v dans $\mathbb{R}^n$. En dimension un, cette condition s'interprète comme le fait que le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.
On définit une suite $x_{k+1} = x_k - \rho_k \frac{d_k}{\|d_k\|}$ où $d_k = \nabla f(x_k)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est fixé, et :

$$\rho_k > 0, \quad \sum_{k \geq 0} \rho_k = +\infty, \quad \rho_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{0.1}$$

1) a) Trouver une suite (ρ_k) qui satisfait (0.1).
b) Soit $\lambda = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. A-t-on nécessairement $\lambda < +\infty$?
On suppose dans la suite que (ρ_k) est quelconque et vérifie (0.1). On veut montrer qu'à une sous-suite près, la suite $(f(x_k))$ converge vers λ. On notera $\liminf x_k$ la plus petite valeur d'adhérence d'une suite réelle (x_k).
2) On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overline{x}) < \liminf f(x_k)$ pour tout k. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) \leq f(x_k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x - \overline{x}\| \leq \alpha$ et tout $k \geq k_0$.
3) Soit $\overline{x}_k = x_k - \overline{x}$.
a) Montrer que $\|\overline{x}_{k+1}\|^2 = \|\overline{x}_k\|^2 - 2\rho_k \frac{d_k}{\|d_k\|} \cdot \overline{x}_k + \rho_k^2$.
b) Montrer que $-\frac{d_k}{\|d_k\|} \cdot \overline{x}_k = -\alpha - \frac{d_k}{\|d_k\|} \cdot (\overline{x}_k - \alpha \frac{d_k}{\|d_k\|})$.
c) Montrer que $-d_k \cdot (\overline{x}_k - \alpha \frac{d_k}{\|d_k\|}) \leq 0$ (utiliser la convexité de f aux points x_k et $\overline{x} + \alpha \frac{d_k}{\|d_k\|}$ et l'hypothèse d'absurdité).
d) En déduire que $\|\overline{x}_{k+1}\|^2 \leq \|\overline{x}_k\|^2 - 2\alpha\rho_k + \rho_k^2$.
4) A l'aide de la question précédente, montrer que $0 \leq \liminf \|x_k\|^2 \leq \|x_0\|^2 - \alpha \sum_{k \geq k_0} \rho_k$ (remarque que $\rho_k \leq \alpha$ si $k \geq k_0$). Conclure.