ON ATTACHERA UNE TRES GRANDE IMPORTANCE AU SOIN. TOUTE REPONSE NON JUSTIFIEE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE

Les notes de cours sont autorisées.

Toute question peut être abordée en admettant les précédentes.

Exercice 1. Pendule Inversé.
On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u, \end{cases}$$

où $u : [0, +\infty) \to [-1, 1]$ *est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans* $[-1, 1]$. *Soit* (x_1^0, x_2^0) *une condition initiale donnée. On cherche une commande* u *qui minimise le temps* T_u *pour aller de* (x_1^0, x_2^0) *à l'origine* $(0, 0)$ *:*

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^{T_u} dt \quad \text{t.q. } (x_1(T_u), x_2(T_u)) = (0, 0).$$

1) a) Trouver une équation différentielle vérifiée par la variable z *définie par* $z := x_1 + x_2$.
b) En déduire que si $|x_1^0 + x_2^0| \geq 1$ *alors la cible n'est pas atteignable (étudier le signe de* $\dot{z}$ *lorsque* $|z| > 1$*).*
2) On suppose dans toute la suite de l'exercice que $|x_1^0 + x_2^0| < 1$.
a) Ecrire l'équation adjointe (on note (p_1, p_2) *l'adjoint) et la condition de minimisation du Hamiltonien.*
b) Rappeler la valeur de H *le long d'une trajectoire extrémale (on ne demande pas de justifier).*
c) Montrer qu'un contrôle optimal est bang-bang (i.e. $u(t) = \pm 1$ *p.p.* $t \in [0, T_u]$*) et a au plus une commutation (pour cela on étudiera les variations de la fonction* $t \longmapsto p_2(t)$*).*
d) Montrer que l'ensemble des conditions initiales arrivant sur la cible $(0, 0)$ *sans commutation coïncide avec l'ensemble :*

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ \ ; \ x_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 - 1}\right\} \bigcup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- \ ; \ x_2 = -\sqrt{(x_1 + 1)^2 - 1}\right\}.$$

3) Proposer une loi de commande par retour d'état ou feedback (i.e. pour toute condition initiale (x_1^0, x_2^0)*) pour atteindre la cible et démontrer son optimalité. Dessiner la synthèse optimale (i.e. les trajectoires optimales dans le plan de phase* (x_1, x_2)*).*

Exercice 2. Système de Markov-Dubin.
Soit $T > 0$. *On considère sur* $[0, T]$ *le système dans* $\mathbb{R}^4$ *défini par :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta, \\ \dot{y} = \sin\theta, \\ \dot{\theta} = \kappa, \\ \dot{\kappa} = u, \end{cases} \tag{1}$$

où $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ *est un contrôle mesurable à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $z_0 := (x_0, y_0, \theta_0, \kappa_0) \in \mathbb{R}^4$ *une condition initiale donnée et* $z_1 := (x_1, y_1, \theta_1, \kappa_1) \in \mathbb{R}^4$ *une condition finale donnée. On s'intéresse au problème de contrôle optimal :*

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T u^2(t) dt, \tag{2}$$

parmi les trajectoires solutions de (1) *reliant* z_0 *à* z_1 *en temps* T.

1) a) Peut-on appliquer le théorème de Fillipov pour montrer l'existence d'un contrôle optimal (justifier) ?

b) On suppose $z_0 = 0$. Si $|x_1| > T$ ou $|y_1| > T$, le problème (2) a-t-il une solution ?

On suppose dans la suite que le problème de contrôle optimal (2) admet une solution optimale. Soit $(x(\cdot), y(\cdot), \theta(\cdot), \kappa(\cdot))$ une trajectoire optimale.

2) Ecrire l'équation adjointe (on notera (p_1, p_2, p_3, p_4) la variable adjointe). Calculer un contrôle optimal en fonction de la variable adjointe.

3) Montrer que $\theta(\cdot)$ est de classe C^4 et qu'il existe deux réels $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telle que la solution optimale vérifie :

$$\ddddot{\theta}(t) = \alpha \sin(\theta(t)) + \beta \cos(\theta(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

En déduire que le contrôle optimal $u(\cdot)$ est de classe C^∞ sur $[0, T]$.

4) On suppose dans cette question uniquement que les contrôles $t \longmapsto u(t)$ admissibles prennent leur valeur dans $[-1, 1]$. Ecrire la nouvelle loi de commande en fonction de l'état adjoint. Si p_4 s'annule sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, que peut-on dire de la trajectoire optimale ?

5) Question difficile (bonus) : dans le cas où $u(t) \in \mathbb{R}$ démontrer l'existence d'un contrôle optimal (indication : considérer une suite minimisante $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que l'on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2([0, T]; \mathbb{R})$ et utiliser le théorème d'Ascoli).