# Exercices sur Cauchy-Lipschitz et le théorème de Filippov

Térence Bayen et Alain Rapaport
(tbayen@math.univ-montp2.fr, rapaport@supagro.inra.fr)

**Exercice 1.** *1) Résoudre le problème de Cauchy* $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$. *Que montre cet exemple ?*
*2) Résoudre* $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ *sur un intervalle* $[a, b]$ *avec* $a < 0 < b$. *Que montre cet exemple ?*

**Exercice 2.** *Extension Lipschitzienne (suite de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz).*
*Soit* $K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \; ; \; |t - t_0| \leq \varepsilon \; ; \; |x - x_0| \leq \varepsilon\}$. *Soit* $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *une fonction qui vaut* 1 *sur* $K$ *et* 0 *sur* $\mathbb{R}^n \backslash K'$ *où* $K \subset K' \subset \Omega$ *et* $K' := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \; ; \; |t - t_0| \leq \varepsilon \; ; \; |x - x_0| \leq 2\varepsilon\}$. *Démontrer que* $\tilde{g} := g\phi$ *est* $L_{K'}$*-Lipschitzienne sur* $\Omega$.

**Exercice 3.** *Soit* $T > 0$ *donné. On suppose donnée une suite de fonctions* $(x_n(\cdot))_{n \geq 0}$ *absolument continue, avec pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, $x_n : [0, T] \to \mathbb{R}^q$ *On suppose en outre que :*

$$\exists C \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\dot{x}_n(t)\| \leq C(1 + \|x_n(t)\|) \quad p.p. \; t \in [0, T].$$

*Démontrer qu'il existe une application* $x^* : [0, T] \to \mathbb{R}^q$ *absolument continue telle qu'à une sous-suite près, la suite* $(x_n(\cdot))_{n \geq 0}$ *converge uniformément vers* $x^*$ *sur* $[0, T]$ *(utiliser le théorème d'Ascoli).*

**Exercice 4.** *On considère le problème de contrôle optimal* $\inf_{u(\cdot)} x_2(T)$ *où* $T > 1$ *est fixé et*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

*et* $u(\cdot)$ *est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans l'ensemble* $\{-1, 1\}$. *Montrer que ce problème n'admet pas de solution. Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*

**Exercice 5.** *1) Peut-on connecter le système* $\dot{x}(t) = u(t)$, $u(t) \in U := \mathbb{R}$ *en temps minimal de l'origine au point* 1 *? Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*
*2) Mêmes questions qu'en 1) avec cette fois* $u(t) \in U := [0, 1)$.

**Exercice 6.** *On considère le problème* $\max x(T, u)$ *où* $\dot{x} = ux^2$ *avec* $x(0) = 1$ *et* $u \in [-1, 1]$, $T > 0$ *fixé, et* $x(T, u)$ *désigne la solution à l'instant* $T$ *associé au contrôle* $u$.
*1) Trouver la solution du problème de Cauchy* $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$.
*2) Grâce à 1), montrer en prenant un contrôle* $u$ *judicieux que ce problème n'admet pas de solution. Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*

**Exercice 7.** *On considère le système contrôlé* $\dot{x} = u$ *où* $u : [0, 1] \to [-2, 2]$ *est une fonction mesurable. On s'intéresse au problème de contrôle optimal suivant :*

$$\inf_{u(\cdot)} J(u) := \int_0^1 [u^2(t) - u^4(t)] \; dt$$

*où la solution* $x(\cdot)$ *du système précédent sur* $[0, 1]$ *est telle que* $x(0) = x(1) = 0$.
*1) Montrer qu'il existe une suite de fonctions* $x_k(\cdot)$ *convergeant vers* 0 *uniformément sur* $[0, 1]$ *telle que* $J(u_k) < 0$. *Soit* $\bar{u} \equiv 0$ *le contrôle nul sur* $[0, 1]$ *et* $\bar{x}$ *la trajectoire associée.*
*2) Peut-on dire que* $\bar{x}$ *est un minimum fort (cad il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $J(u) \geq J(\bar{u})$ *pour tout contrôle* $u$ *tel que* $\|x - \bar{x}\|_1 \leq \varepsilon$*) ou un minimum faible (cad il existe* $\varepsilon' > 0$ *tel que* $J(u) \geq J(\bar{u})$ *pour tout contrôle* $u$ *tel que* $\|u - \bar{u}\|_1 \leq \varepsilon'$*) ?*

**Exercice 8.** *Démontrer le théorème d'existence de Fillipov pour le problème de Bolza vu en cours, en admettant le résultat dans le cas Mayer. Montrer d'abord qu'il existe une constante* $M \geq 0$ *telle que pour toute trajectoire reliant* $x_0$ *à* $S$ *et tout* $\omega \in U$ *on ait* $L(t, x(t), \omega) < M$.

*Puis, on considérera le problème auxiliaire*

$$\inf_u x_0(T, u) + \phi(T, x(T, u)),$$

*où* $(x_0, x)$ *est solution de :*

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0(t)M + (1 - u_0(t))L(t, x, u), \\ \dot{x} = f(t, x, u). \end{cases}$$

*sur lequel on appliquera le cas Mayer.*