# Exercices autour de la notion de contrôlabilité

Térence Bayen et Alain Rapaport
(tbayen@math.univ-montp2.fr, rapaport@supagro.inra.fr)

**Exercice 1.** *On considère le système dans* $\mathbb{R}^5$ *:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\alpha x_1 + \beta x_4, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - m_1 x_2 - \alpha x_2, \\ \dot{x}_3 = \alpha x_1 - m_1 x_3 - \alpha x_3, \\ \dot{x}_4 = \alpha x_2 - m_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = \alpha x_3 - m_2 x_5, \end{cases}$$

*qui représente une population structurée en cinq classes :* $x_1$ *désigne la densité des nouveaux nés, qui donnent lieu à deux types possible* $x_2$ *et* $x_3$*, qui à leur tour donnent lieu à* $x_4$ *et* $x_5$*. On suppose tous les paramètres strictement positifs. Soit* $A$ *la matrice du système précédent. On peut apporter ou retirer des individus d'une seule population, ce qui revient à considérer le système contrôlé*

$$\dot{x} = Ax + bu(t)$$

*où* $b$ *est un vecteur colonne avec un 1 à la ligne* $k$*,* $1 \leq k \leq 5$ *et des zéros ailleurs, et* $u(t) \in [-1, 1]$*. On demande de trouver l'entier* $k$ *pour rendre le système contrôlable (c.a.d. la population qu'il faut cibler).* <u>*Indication*</u> *: utiliser* `Maple` *par exemple.*

**Exercice 2.** *On considère le système contrôlé dans* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases}$$

*où* $u = (u_1, u_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *est un contrôle mesurable. Montrer que la condition de rang est vérifiée dans le théorème de Chow. Qu'en déduit-on pour la contrôlabilité du système ?*

**Exercice 3.** *Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec le système dans* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = \kappa u_1, \\ \dot{\kappa} = u_2 \end{cases}$$

*où* $u = (u_1, u_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *est un contrôle mesurable.*

**Exercice 4.** *(Planification de trajectoire).*
*Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$*. On considère le système commandé dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \tag{1}$$

*où* $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ *est un contrôle mesurable. On notera* $A(t, x_0)$ *l'ensemble des états atteignables à partir de* $x_0$ *en temps* $t$ *:*

$$A(t, x_0) := \{x(\tau) \; ; \; 0 \leq \tau \leq T \text{ et } x(\cdot) \text{ solution de (1) t.q. } x(0) = x_0\},$$

*et $C := [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ la matrice de Kalman associée à (1).*
*1) Montrer que la solution de (1) valant $x_0$ à $t = 0$ s'écrit $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds$.*

*2) Soit $G := \int_0^T e^{(T-s)A}BB^T(e^{(T-s)A})^T\, ds$ et $w \in \mathbb{R}^n$.*
*a) Montrer que $\mathrm{Im}G \subset A(t, 0)$.*

*b) En reprenant la démonstration vue en cours, montrer que $\mathrm{Im}C \subset \mathrm{Im}G$.*

*3) En déduire que la commande $\bar{u}(t) := (e^{(T-t)A}B)^T G^{-1}v$ envoie l'étant $x(0) = 0$ au temps $t = 0$ sur l'état $x(T) = v$ au temps $t = T$.*
*4) Soit $E(u) := \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt$.*
*a) Montrer que*

$$E(u) = E(\bar{u}) + \int_0^T \left\langle G^{-1}v, e^{(T-t)A}B(u(t) - \bar{u}(t))\right\rangle\, dt + E(u - \bar{u}).$$

*b) Montrer que $\int_0^T e^{(T-t)A}B(u(t) - \bar{u}(t))\, dt = 0$. En déduire que parmi toutes les commandes $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ permettant d'amener l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(T) = v$ en temps $T$, alors $\bar{u}$ minimise l'énergie $E(u)$.*

**Exercice 5.** *(Autour de le contrôlabilité d'un système non-linéaire). Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et soit $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit le problème de Cauchy :*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad \text{p.p. } t \in [0, T],\ x(0) = x_0. \tag{2}$$

*où $u \in L^\infty([0, T), U)$. On appellera $x_u(\cdot)$ l'unique solution de (2) définie sur $[0, T]$. On suppose que $u_0 = 0$ est dans l'intérieur de $U$, que $f(x_0, u_0) = 0$. Soit $A := D_x f(x_0, u_0)$ et $B := D_u f(x_0, u_0)$. On suppose que le rang de la matrice de Kalman $C$ associée à $A$ et $B$ vaut $n$. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :*

**Théorème 1.** *Le système (2) est localement contrôlable autour de $x_0$, i.e. pour tout $t \in (0, T]$ l'ensemble accessible $R(t) := \{x_u(t)\ ;\ u \in L^\infty([0, t], U)\}$ contient un voisinage de $x_0$.*

*Soit $\tau \in (0, T]$ fixé. On considère le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{3}$$

*1) Soit $y_1, ..., y_n$, $n$ vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $n$ commandes mesurables bornées $u_i$ $(1 \le i \le n)$ telles que la solution de (3) relie $x_0$ à l'instant $0$ à $y_i$ à l'instant $\tau$. (Indication : pour la bornitude on pourra admettre que l'on peut prendre des commandes par morceaux ou utiliser l'exercice précédent).*
*2) Montrer que si $\theta := (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment petit, alors le contrôle $u := \sum_{1 \le i \le n} \theta_i u_i$ est admissible.*
*3) Soit $F : L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $F(u) := x_u(\tau)$ où $u \in L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^m)$.*
*a) Soit $v \in L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^m)$. Montrer que $dF(u)v = y(\tau)$ où $y(\cdot)$ est l'unique solution de*

$$\dot{y} = D_x f(x(t), u(t))y(t) + D_u f(x(t), u(t))v(t), \qquad \text{p.p. } t \in [0, \tau] \quad y(0) = x_0.$$

*(Question difficile : on pourra admettre le résultat).*
*b) Montrer que le système linéarisé de (2) au voisinage de $(x_0, u_0)$ dans la direction $v$ s'écrit $\dot{y} = Ay + Bv$.*
*c) En calculant $dF(u_0)u_i$, montrer que l'application $\phi : \theta \to F(u_\theta)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $\Omega_1$ de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert $\Omega_2$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x_0$ et conclure.*

# Références


[1] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Modern Birkhaüser Classics, 1997.

[2] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer, 1994.

[3] J. F. Bonnans, *Lectures Notes in Optimal Control*, `http://www.cmap.polytechnique.fr/∼ bonnans`

[4] J.F. Bonnans, P. Rouchon, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques.* Editions de l ?Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2005.

**[5]** A. Bressan, B. Piccoli**, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, Amer. Inst. of Mathematical Sciences, 2007.**

[6] L. Cesari, *Optimization-Theory and Applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer, 1983.

[7] F. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, 1997.

[8] J.-B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire, vol. 2, la commande optimale pour les débutants*, ellipses, 2010.

[9] V. Jurdjevic *Geometric Control Theory*, vol. 51 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[10] E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

[11] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *Mathematical theory of optimal processes*, The Macmillan Company, 1964.

[12] H. Schattler, U. Ledzewicz, *Geometric Optimal Control*, Springer 2012.

[13] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1998.

**[14]** E. trelat**, *Contrôle Optimal, Théorie et Applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.** `https://www.ljll.math.upmc.fr/∼trelat`