Exercices d'application du principe du maximum de Pontryagin

Térence Bayen et Alain Rapaport
(tbayen@math.univ-montp2.fr, rapaport@supagro.inra.fr)

Exercices sur le théorème de Fillipov (contre-exemples à l'existence d'un contrôle optimal).

Exercice 1. *On considère le problème de contrôle optimal* $\inf_{u(\cdot)} x_2(T)$ *où* $T > 0$ *est fixé et*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

et $u(\cdot)$ *est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans l'ensemble* $\{-1, 1\}$*. Montrer que ce problème n'admet pas de solution. Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*

Exercice 2. *1) Peut-on connecter le système* $\dot{x}(t) = u(t)$, $u(t) \in U := \mathbb{R}$ *en temps minimal de l'origine au point* 1 *? Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*
2) Mêmes questions qu'en 1) avec cette fois $u(t) \in U := [0, 1)$.

Exercice 3. *On considère le problème* $\max x(T, u)$ *où* $\dot{x} = ux^2$ *avec* $x(0) = 1$ *et* $u \in [-1, 1]$, $T > 0$ *fixé, et* $x(T, u)$ *désigne la solution à l'instant* T *associé au contrôle* u.
1) Trouver la solution du problème de Cauchy $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$.
2) Grâce à 1), montrer en prenant un contrôle u *judicieux que ce problème n'admet pas de solution. Quelle hypothèse est en défaut dans le théorème de Fillipov ?*

Exercice 4. *On considère le système contrôlé* $\dot{x} = u$ *où* $u : [0, 1] \to [-2, 2]$ *est une fonction mesurable. On s'intéresse au problème de contrôle optimal suivant :*

$$\inf_{u(\cdot)} J(u) := \int_0^1 [u^2(t) - u^4(t)] \, dt$$

où la solution $x(\cdot)$ *du système précédent sur* $[0, 1]$ *est telle que* $x(0) = x(1) = 0$.
1) Montrer qu'il existe une suite de fonctions $x_k(\cdot)$ *convergeant vers* 0 *uniformément sur* $[0, 1]$ *telle que* $J(u_k) < 0$. *Soit* $\bar{u} \equiv 0$ *le contrôle nul sur* $[0, 1]$ *et* $\bar{x}$ *la trajectoire associée.*
2) Peut-on dire que $\bar{x}$ *est un minimum fort (cad il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $J(u) \geq J(\bar{u})$ *pour tout contrôle* u *tel que* $\|x - \bar{x}\|_1 \leq \varepsilon$*) ou un minimum faible (cad il existe* $\varepsilon' > 0$ *tel que* $J(u) \geq J(\bar{u})$ *pour tout contrôle* u *tel que* $\|u - \bar{u}\|_1 \leq \varepsilon'$*) ?*

Exercice 5. *Démontrer le théorème d'existence de Fillipov pour le problème de Bolza vu en cours, en admettant le résultat dans le cas Mayer. Montrer d'abord qu'il existe une constante* $M \geq 0$ *telle que pour toute trajectoire reliant* x_0 *à* S *et tout* $\omega \in U$ *on ait* $L(t, x(t), \omega) < M$.

Puis, on considérera le problème auxiliaire

$$\inf_u x_0(T, u) + \phi(T, x(T, u)),$$

où (x_0, x) *est solution de :*

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0(t) M + (1 - u_0(t)) L(t, x, u), \\ \dot{x} = f(t, x, u). \end{cases}$$

sur lequel on appliquera le cas Mayer.

Exercices d'application du principe du maximum de Pontryagin sur un système linéaire

Exercice 6. *(Principe bang-bang pour les systèmes linéaire). Le but de cet exercice est de montrer comment à l'aide du principe de Pontryagin on peut ramener un problème de temps minimal pour un système linéaire en l'état et le contrôle à la résolution d'un problème aux deux bouts.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$, $U := [-1,1]^m$, $\mathcal{U} := \{u : [0,\infty) \to U \ ; \ mes.\}$, et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé non vide. On considère le problème de temps minimal pour rejoindre la cible S. Etant donnée une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on cherche un contrôle $u \in \mathcal{U}$ qui minimise le temps T_u parmi les trajectoires solutions du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{p.p. } t \in [0, T_u],$$

qui relient x_0 à la cible S. Autrement dit, le problème est le suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} T_u, \ \dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \ x(T_u) \in S.$$

On suppose que le couple (A, B) vérifie l'hypothèse de Kalman.

1) Montrer qu'il existe un contrôle optimal (i.e. une solution au problème de temps minimal).

2) Appliquer le principe de Pontryagin au problème et montrer que l'équation adjointe s'écrit $\dot{p}(t) = -A^T P(t)$, p.p. $t \in [0, T]$.

3) Le but set de montrer que pour tout $1 \le i \le n$ on a

$$u_i(t) := -\text{sign}(\langle p(t), b_i \rangle).$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que pour i donné on a $\langle p(t), b_i \rangle = 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$ où $0 \le t_1 < t_2 \le T_u$ sont deux instants donnés.

a) Montrer que pour $t_1 \le t \le t_2$ on a $p(t) = e^{-(t-t_2)A^T} p(t_2)$.

b) En déduire que pour tout $t \in [t_1, t_2]$ on a $\left\langle p(t_2), e^{(t-t_2)A} b_i \right\rangle = 0$.

c) Montrer que pour tout $0 \le k \le n-1$ on a $\left\langle p(t_2), A^k b_i \right\rangle = 0$ (indication : utiliser la question b) et dériver).

d) En déduire une contradiction avec l'hypothèse de Kalman et conclure.

<u>*Remarque*</u> *: l'expression ainsi trouvée pour le contrôle optimal $u(t)$ permet ensuite d'implémenter une méthode de tir.*