Exercices d'application du principe du maximum de Pontryagin

Térence Bayen et Alain Rapaport
(tbayen@math.univ-montp2.fr, rapaport@supagro.inra.fr)

Quelques rappels sur le principe du maximum de Pontryagin

On rappelle d'abord la notion de **commutation** en contrôle optimal. Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteur de classe C^1. Soit $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de temps minimal suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} T_u \quad \text{t.q.} \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T_u] \quad x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(T_u) \in \mathcal{T},$$

où $u : [0, T_u) \to [-1, 1]$ est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans $[-1, 1]$. Autrement dit on cherche le contrôle qui minimise le temps T_u pour relier le système du point x_0 à la cible.

Définition 0.1. *Soit $x(t)$ une trajectoire optimale et $u(t)$ le contrôle correspondant. Soit $t \longmapsto \lambda(t)$ l'adjoint donné par le principe du maximum de Pontryagin. On appelle* **commutation** *un instant t_0 tel que le contrôle $t \longmapsto u(t)$ est non constant dans tout voisinage de t_0.*

Propriété 0.1. *Soit φ la fonction de commutation définie par :*

$$\varphi(t) := \langle \lambda(t), g(x(t)) \rangle ,$$

et soit t_0 un instant de commutation. Alors on a $\varphi(t_0) = 0$.

Cette propriété découle aisément de l'application du principe de Pontryagin (en appliquant la condition de minimisation du Hamiltonien). Mentionnons maintenant la propriété de conservation du Hamiltonien dans le cas autonome.

Propriété 0.2. *Lorsque le problème est* **autonome** *i.e. la variable t n'apparait pas explicitement :*

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt + \phi(x(T)) \quad \text{t.q. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \text{et } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

alors le Hamiltonien est **constant** *le long d'une trajectoire extrémale (i.e. le long d'un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ trajectoire, adjoint, contrôle).*

En outre, lorsque le temps terminal T est libre, on a la propriété suivante.

Propriété 0.3. *Lorsque le problème est* **autonome** *et qu'en outre le temps terminal est* **libre** *(typiquement lorsque le critère est le temps minimal), alors le Hamiltonien est* **nul** *le long d'une trajectoire extrémale (i.e. le long d'un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ trajectoire, adjoint, contrôle).*

Signalons enfin que pour les problèmes avec cible, on a une condition supplémentaire sur la valeur à l'instant terminal du vecteur adjoint. Cette condition s'appelle **condition de transversalité**.

Propriété 0.4. *On considère le problème (1) et soit $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ une cible fermée dans $\mathbb{R}^n$ (supposée convexe). On considère le problème (1) en rajoutant la cible $\mathcal{T}$ i.e. on impose en outre la condition :*

$$x(T) \in \mathcal{T}.$$

Alors le vecteur adjoint vérifie à l'instant terminal $p(T) - \nabla\phi(x(T)) \in N_{\mathcal{T}}(x(T))$ où $N_{\mathcal{T}}(x)$ désigne le cône normal (au sens de l'analyse convexe) à l'ensemble $\mathcal{T}$ au point x i.e.

$$N_{\mathcal{T}}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \; ; \; \langle y, v - x \rangle \leq 0 \;\; \forall v \in \mathcal{T}\}.$$

En particulier, si $x(T) \in \mathbb{R}^n$ est libre, alors on retrouve la condition $p(T) = \nabla\phi(x(T)$ (car alors $N_{\mathbb{R}^n}(x) = \{0\}$).

Exercice 1. *On considère le problème du nageur :*

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} T_u \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v_n \cos\theta(t), \\ \dot{y}(t) = v_n \sin\theta(t) - v_c(x(t)) \end{cases} \quad \text{p.p. } t \in [0, T_u] \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et } \ x(T_u) \in \mathcal{T},$$

où $\mathcal{T} := \bar{B}(0, r)$ est l'île (boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$), v_c est la vitesse du courant (supposée C^1 par rapport à x), $v_n > 0$ est la vitesse du nageur, et $t \longmapsto \theta(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle i.e. le nageur peut choisir à n'importe quel instant la direction dans laquelle il nage.
1) A l'aide du principe du maximum de Pontryagin trouver l'expression du contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint.
2) Ecrire la condition de transversalité sur le vecteur adjoint à l'instant T_u.
3) En considérant le système différentiel état-adjoint, trouver une méthode basée sur la résolution d'un système différentiel pour trouver une trajectoire extrémale du problème reliant un point (x_0, y_0) à la cible.

Exercice 2. *On considère le système suivant appelé double intégrateur décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

où $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans $[-1, 1]$. Le problème de contrôle optimal est le suivant. Etant donnée une condition initiale (x_1^0, x_2^0), on cherche une commande u qui conduise le système en temps minimal du point initial au point cible $(0, 0)$.
1) A l'aide du principe du maximum de Pontryagin, montrer qu'une trajectoire admet au plus 1 commutation (cad un basculement du contrôle de $u = \pm 1$ à $u = \mp 1$).
2) Chercher les trajectoires optimales partant de n'importe quelle condition initiale (on commencera par trouver les trajectoires qui arrivent sur la cible sans commutations). Raisonner dans le plan de phase (x_1, x_2).
3) En déduire un feedback[1] optimal i.e. un contrôle $\mathbf{u}[x_1, x_2]$ qui dépend de l'état dans le plan de phase.

Exercice 3. *On considère le problème de contrôle optimal suivant avec* **cible** *:*

$$\min_u \int_0^2 x^2(t)dt, \ x(0) = 1, \ x(2) = \frac{1}{2}, \ \dot{x} = u, \ |u(t)| \leq 1.$$

Ici $u : [0, 2] \to [-1, 1]$ est un contrôle mesurable. On adoptera la convention de minimisation du Hamiltonien par rapport au contrôle. On conseille également de représenter les trajectoires sur un dessin.
1) On suppose que $p_0 < 0$. Montrer que $x(\cdot)$ croît au voisinage de $t = 0$. En déduire que la trajectoire admet nécessairement une commutation à un instant $t_0 > 0$ (et que donc $p(t_0) = 0$). En notant que $\dot{p}(t_0) = -2x(t_0)$ en déduire une contradiction.
2) Montrer de façon analogue que $p_0 = 0$ n'est pas possible (étudier le signe de $p(\cdot)$ au voisinage de $t = 0$).
3) On suppose $p_0 > 0$.
a) Montrer que la trajectoire admet nécessairement une commutation à un instant $t_0 > 0$.
b) En déduire que $p_0 \leq 1$ (on utilisera que $p(t_0) = 0$).
c) Montrer que l'on a $p_0 = 1$ (on supposera que $p_0 < 1$ et on aboutira à une contradiction en utilisant la question 1)).
d) En déduire la trajectoire optimale. Ce résultat pouvait il être prévu directement ?

---

1. Un contrôle feedback est un contrôle par retour d'état i.e. qui dépend de l'état du système $x(t)$. On dit parfois contrôle en boucle fermée. Par opposition un contrôle $u(t)$ dépendant du temps est appelé contrôle en boucle ouverte. Un feedback possède l'avantage d'être plus "robuste" (car il dépend de l'état).