Exercice d'application du principe du maximum de Pontryagin

Térence Bayen et Alain Rapaport
(tbayen@math.univ-montp2.fr, rapaport@supagro.inra.fr)

On considère le système dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1^2, \end{cases}$$

avec comme condition initiale $(0,0,0)$ à l'instant 0. Le contrôle $t \longmapsto u(t)$ prend ses valeurs dans $[-1,1]$. Soit $T > 0$. On s'intéresse dans cet exercice au problème de Mayer :

$$\max x_3(T)$$

1) Montrer l'existence d'un contrôle optimal.
2) Appliquer le PMP avec condition de minimisation sur le Hamiltonien (écrire l'équation adjointe vérifiée par $p = (p_1, p_2, p_3)$; calculer $p(T)$; écrire la loi de commande vérifiée par un contrôle optimal $u(t)$). En déduire l'expression de $p_2(t)$ et $p_3(t)$ sur $[0,T]$.
3) On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on a $p_1(0) < 0$. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $p_1(t) < 0$. En déduire une contradiction.
4) On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on a $p_1(0) > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $p_1(t) > 0$. En déduire une contradiction.
5) Déduire des questions 3) et 4) la valeur de $p_1(0)$ puis la valeur du contrôle optimal $u(t)$ sur $[0, T/3]$ puis sur $[T/3, T]$. Quelle propriété particulière vérifie la solution sur l'intervalle $[T/3, T]$?

Remarque sur la notion d'arc singulier et contrôle singulier.

Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteur de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère un problème de Mayer

$$\inf_{u(\cdot)} \phi(x(T)) \quad \text{t.q.} \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

où $u : [0,T] \to [-1,1]$ est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans $[-1,1]$. Soit $x(t)$ une trajectoire optimale et $u(t)$ le contrôle correspondant. Soit $t \longmapsto \lambda(t)$ l'adjoint donné par le principe du maximum de Pontryagin. Soit φ la fonction de commutation définie par :

$$\varphi(t) := \langle \lambda(t), g(x(t)) \rangle,$$

Définition 1. *On appelle arc singulier tout intervalle de temps* $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ *tel que :*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t) = 0.$$

Si une trajectoire optimal contient un arc singulier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, on notera alors que la condition de minimisation dans le Hamiltonien ne permet pas de calculer le contrôle optimal $t \longmapsto u(t)$ sur $[t_1, t_2]$ (appelé contrôle singulier). En général il faut alors dériver deux fois φ sur $[t_1, t_2]$ pour calculer le contrôle singulier. Ceci permet aussi de trouver le lieu singulier dans l'espace état-adjoint. La recherche d'arcs singuliers (dès que $n \geq 3$) est en générale une question délicate.