

Notes de cours de commande optimale :
Conditions suffisantes d'optimalité et équation
d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Alain Rapaport

mars 2016

Ces notes présentent un ensemble de résultats classiques, et d'autres moins classiques, inspirés par les références citées. Plusieurs preuves ont été adaptées.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Définitions et rappels | 1 |
| 2 | Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman | 1 |
| 2.1 | Programmation dynamique | 1 |
| 2.2 | Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman | 2 |
| 2.2.1 | Problème de Mayer | 2 |
| 2.2.2 | Extension au cas non autonome | 2 |
| 2.2.3 | Extension au problème de Bolza | 3 |
| 2.2.4 | Extension au problème de temps minimum | 4 |
| 2.3 | Quelques exemples | 4 |
| 2.4 | Lien avec le Principe de Pontryagin | 6 |
| 3 | Conditions suffisantes d'optimalité | 7 |
| 3.1 | Le cas C^1 | 7 |
| 3.2 | Le cas C^1 par morceaux | 8 |
| 3.3 | Exemple du double intégrateur | 10 |
| 3.4 | Le cas linéaire-quadratique | 11 |
| 3.5 | Application au suivi de trajectoire | 12 |
| 4 | Fonctions valeur semi-continues | 15 |
| 4.1 | Préliminaires et définitions | 15 |
| 4.2 | Quelques notions d'analyse proximale | 16 |
| 4.3 | Characterization de domaines invariants | 18 |
| 4.4 | Solutions proximales pour le problème de Mayer | 20 |
| 4.5 | Application | 22 |
| 4.6 | Solutions proximales pour le temps mimum | 23 |
| 5 | Fonctions valeur continues | 25 |
| 5.1 | Problème de Mayer | 25 |
| 5.2 | Temps minimum | 25 |
| | Références | 31 |

Chapitre 1

Définitions et rappels

Soient X et U deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p , respectivement. Soit f une application de $X \times U$ dans \mathbb{R}^n . A la paire (f, U) on associe le système dynamique *autonome* défini sur X

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

où pour tout t , la commande $u(t)$ appartient U .

Hypothèse 1.

1. U est compact.
2. f est continue en (x, u)
3. f est Lipschitz en x , uniformément en u i.e. pour tout $x \in X$ et $R > 0$ il existe $L > 0$ tel que $\|f(x, u) - f(y, u)\| \leq L\|x - y\|$ pour tout $y \in \mathbb{B}(x, R) \cap X$ et $u \in U$
4. f est à croissance au plus linéaire i.e. il existe un nombre $C > 0$ tel que $\|f(x, u)\| \leq C(1 + \|x\|)$ pour tout (x, u) dans $X \times U$,

On note $\mathcal{U}_{[t_0, T]} = \{u(\cdot) \text{ mesurable t.q. } u(t) \in U, \forall t \in [t_0, T]\}$. On rappelle le Théorème d'existence et unicité des solutions d'une équation différentielle non autonome appliqué au contexte présent.

Proposition 1. *Sous l'hypothèse 1, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times X$ et application $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$, il existe une unique solution absolument continue $x_{t_0, x_0, u(\cdot)}(\cdot)$ solution de (1.1) pour presque tout $t \in [t_0, T]$*

Sous l'hypothèse 1, on note $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ l'ensemble des applications $x(\cdot)$ absolument continues de (1.1), pour $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$.

Soit ϕ est une fonction de X dans $\bar{\mathbb{R}}$. On définit le problème de Mayer, pour toute paire $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times X$

$$\inf \{ \phi(x(T)), x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0) \} .$$

On note D_ϕ le domaine où ϕ prend des valeurs finies.

Définition 1. *Sous l'hypothèse 1, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times X$, on définit la fonction valeur :*

$$V(t_0, x_0) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)} \phi(x(T)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}} \phi(x_{t_0, x_0, u(\cdot)}(T)) .$$

On note par D_V le domaine où V est définie et prend des valeurs finies, et par t la transposition d'une matrice ou d'un vecteur. Lorsque V est différentiable en x , on note ∇V le gradient de V par rapport à la variable x i.e. $\nabla V = (\partial_x V)^t$.

Définition 2. *Sous l'hypothèse 1, on définit pour tout $(x, p) \in X \times \mathbb{R}^n$ l'Hamiltonien*

$$\bar{H}(x, p) = \min_{u \in U} H(x, p, u)$$

où $H(x, p, u) = p \cdot f(x, u)$ (\cdot désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n).

Hypothèse 2. Pour tout $x \in \mathbf{X}$, l'ensemble des vitesses

$$f(x, \mathbf{U}) = \bigcup_{u \in \mathbf{U}} f(x, u) \text{ est convexe.}$$

On rappelle le Théorème de compacité des trajectoires :

Proposition 2. Sous les hypothèses 1 et 2, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$, l'ensemble de trajectoires $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Corollaire 1. Sous les hypothèses 1 et 2, pour toute fonction ϕ semi-continue inférieurement, le problème de Mayer admet une solution optimale $x^*(\cdot)$ pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in D_V$.

On rappelle également le théorème de dépendance continue par rapport à la commande :

Proposition 3. Sous les hypothèses 1 et 2, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$, l'application

$$u \in L^1([t_0, T], \mathbf{U}) \mapsto x_{t_0, x_0, u(\cdot)} \in C^0([t_0, T], \mathbf{X})$$

est continue.

Chapitre 2

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

2.1 Programmation dynamique

Lemme 1. Soit une condition initiale $(t_0, x_0) \in D_V$, les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. Pour tout $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$, l'application $t \mapsto V(t, x(t))$ est croissante (au sens large) sur $[t_0, T]$.
2. S'il existe une trajectoire optimale $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$, alors $V(t, x^*(t)) = V(t_0, x_0)$ pour tout $t \in [t_0, T]$.

Preuve. Par contradiction, supposons $V(t_1, x(t_1)) = V(t_0, x_0) - \epsilon$ pour $t_1 > t_0$ et $\epsilon > 0$. Soit $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_1, T]}(x(t_1))$ tel que $\phi(\bar{x}(T)) \leq V(t_1, x(t_1)) + \epsilon/2$. On construit la trajectoire

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, t_1] \\ \bar{x}(t), & t \in [t_1, T] \end{cases}$$

Clairement on a $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ avec $\phi(\tilde{x}(T)) \leq V(t_0, x_0) - \epsilon/2$, d'où une contradiction avec la définition de V .

Une trajectoire optimale vérifie donc nécessairement $V(t_0, x_0) \leq V(t, x^*(t)) \leq V(T, x^*(T))$ pour tout $t \in [t_0, T]$, mais également (par optimalité) $V(T, x^*(T)) = \phi(x^*(T)) = V(t_0, x_0)$, d'où l'égalité annoncée.

■

Proposition 4. (Principe de la Programmation Dynamique) Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in D_V$ avec $t_0 < T$, et tout $t_1 \in (t_0, T]$, on a

$$V(t_0, x_0) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(x_0)} V(t_1, x(t_1)) .$$

Preuve. Par le Lemme 1, on a

$$V(t_1, x(t_1)) \geq V(t_0, x_0)$$

pour toute trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(x_0)$, d'où

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(x_0)} V(t_1, x(t_1)) \geq V(t_0, x_0) .$$

Réciproquement, pour toute solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$, on a $\phi(x(T)) \geq V(t_1, x(t_1))$, et on prenant l'infimum sur $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$, on obtient

$$V(t_0, x_0) \geq \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)} V(t_1, x(t_1)) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(x_0)} V(t_1, x(t_1)) . \blacksquare$$

2.2 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

2.2.1 Problème de Mayer

Proposition 5. (Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman) Si V est C^1 sur D_V , alors $V(\cdot)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles (HJB) :

$$\partial_t V(t, x) + \bar{H}(x, \nabla V(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in D_V \quad (2.1)$$

avec la condition terminale :

$$V(T, x) = \phi(x), \quad \forall x \in D_\phi. \quad (2.2)$$

Preuve. Fixons (t, x) dans D_V . Pour $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t, T]}(x)$, on pose $v(\tau) = V(\tau, y(\tau))$. Soit $\bar{h} > 0$ tel que $t + \bar{h} \leq T$. Pour tout $h \in (0, \bar{h})$, on peut écrire

$$\begin{aligned} v(t+h) &= v(t) + \int_t^{t+h} v'(\tau) d\tau \\ &= v(t) + \int_t^{t+h} \partial_t V(\tau, y(\tau)) + \partial_x V(\tau, y(\tau)) f(y(\tau), u(\tau)) d\tau \\ &= v(t) + \int_t^{t+h} \partial_t V(t, x) + \partial_x V(t, x) f(x, u(\tau)) + r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Par la programmation dynamique (Proposition 4), on peut écrire

$$v(t) = \inf_{y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t, t+h]}(x)} V(t+h, y(t+h)) = \inf_{y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t, t+h]}(x)} v(t+h) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t, t+h]}} v(t+h)$$

et ainsi on a

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t, t+h]}} \int_t^{t+h} \partial_t V(t, x) + \partial_x V(t, x) f(x, u(\tau)) + r(\tau) d\tau = 0$$

Comme $\partial_t V$, $\partial_x V$ sont Lipschitz en (t, x) et f Lipschitz en x , uniformément en u , il existe un nombre $K > 0$ tel que

$$|r(\tau)| \leq K(h + \|y(\tau) - x\|), \quad \forall \tau \in [0, h], \forall y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t, t+h]}(x)$$

puis un nombre $M > 0$ tel que

$$|r(\tau)| \leq Mh, \quad \forall \tau \in [0, h], \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t, t+h]}.$$

Ainsi, on obtient la majoration

$$\left| \inf_{u \in \mathcal{U}_{[t, t+h]}} \int_t^{t+h} \partial_t V(t, x) + \partial_x V(t, x) f(x, u(\tau)) d\tau \right| \leq Mh^2$$

ou de façon équivalente

$$h |\partial_t V(t, x) + \bar{H}(x, \nabla V(t, x))| \leq Mh^2$$

En divisant par h puis en faisant tendre h vers zero, on obtient l'équation (HJB). Finalement, par définition de la fonction valeur, la condition terminale est trivialement vérifiée. ■

2.2.2 Extension au cas non autonome

Pour une dynamique de la forme

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \quad x(t_0) = x_0,$$

on peut considérer l'état et la dynamique augmentés

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} f(z, x, u(t)) \\ 1 \end{bmatrix}$$

et se ramener ainsi à un problème autonome pour la variable \tilde{x} dans $\tilde{X} = X \times (-\infty, T]$. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour la fonction valeur W associée à un problème de Mayer s'écrit

$$\partial_t W(t, x, z) + \bar{H}(t, x, \nabla W(t, x, z)) + \partial_z W(t, x, z) = 0$$

avec

$$\bar{H}(t, x, p) = \min_{u \in U} p \cdot f(t, x, u)$$

et la condition terminale $W(T, x, T) = \phi(x)$. La fonction valeur V du problème d'origine s'obtient en posant $V(t, x) = W(t, x, t)$, et on obtient alors l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour V :

$$\partial_t V(t, x) + \bar{H}(t, x, \nabla V(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in D_V$$

avec la condition terminale

$$V(T, x) = \phi(x), \quad x \in D_\phi .$$

2.2.3 Extension au problème de Bolza

Sous l'hypothèse 1, on considère le critère

$$\phi(x(T)) + \int_{t_0}^T l(x(\tau), u(\tau)) d\tau .$$

En considérant la dynamique augmentée dans \mathbb{R}^{n+1} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)) \\ \dot{z} &= l(x, u(t)) \end{aligned}$$

on définit le coût

$$\tilde{\phi}(x(T), z(T)) = \phi(x(T)) + z(T)$$

et \tilde{V} la fonction valeur associée au problème de Mayer. Ainsi, la fonction valeur V pour le problème de Bolza s'écrit $V(t, x) = \tilde{V}(t, x, 0)$. Pour le problème de Mayer associé, sous l'hypothèse que la fonction l vérifie les mêmes hypothèses que f , l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit

$$\partial_t \tilde{V}(t, x, z) + \min_{u \in U} \partial_x \tilde{V}(t, x, z) f(x, u) + \partial_z \tilde{V}(t, x, z) l(x, u) = 0$$

avec la condition terminale

$$\tilde{V}(T, x, z) = \phi(x) + z$$

Si \tilde{V} est C^1 , on a clairement $\partial_z \tilde{V}(t, x, z) = 1$. Ainsi, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème de Bolza s'écrit

$$\partial_t V(t, x) + \bar{H}(x, \nabla V(t, x)) = 0$$

avec la condition terminale

$$V(T, x) = \phi(x) ,$$

pour l'Hamiltonien

$$\bar{H}(x, p) = \min_{u \in U} p \cdot f(x, u) + l(x, u) .$$

Remarque. Le Principe de la Programmation Dynamique s'écrit pour un problème de Bolza :

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) = \tilde{V}(t_0, x_0, 0) &= \inf_{(x(\cdot), z(\cdot)) \in \tilde{S}_{[t_0, t_1]}(x_0, 0)} \tilde{V}(t_1, x(t_1), z(t_1)) \\ &= \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, t_1]}} \left\{ V(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} l(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right\} \end{aligned}$$

2.2.4 Extension au problème de temps minimum

Soit \mathcal{C} un fermé de X . Pour toute condition initiale $x_0 \in X \setminus \mathcal{C}$ et toute solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}(x_0)$, on définit le temps d'atteinte, pour t_0 quelconque

$$T_{\mathcal{C}}(x(\cdot)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x(t) \notin \mathcal{C}, \forall t \geq t_0 \\ \inf\{t \geq t_0 \text{ t.q. } x(t) \in \mathcal{C}\} - t_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le problème d'optimisation

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}(x_0)} T_{\mathcal{C}}(x(\cdot)) ,$$

qui peut s'écrire comme un problème de Bolza avec $\phi = 0$, $l = 1$ mais avec un temps terminal libre. Clairement, la fonction valeur V associée à un problème de temps minimum est indépendante de t_0 , et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit ainsi

$$1 + \bar{H}(x, \nabla V(x)) = 0, \quad \forall x \in D_V \setminus \mathcal{C}$$

avec la condition terminale

$$V(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{C} ,$$

pour l'Hamiltonien

$$\bar{H}(x, p) = \min_{u \in U} p \cdot f(x, u) .$$

2.3 Quelques exemples

Exemple 1

Soit le système non-autonome dans \mathbb{R}

$$\dot{x} = \cos(t)u, \quad x(t_0) = x_0$$

avec $u \in [-1, 1]$. Considérons le problème de Mayer

$$\sup_{x(\cdot)} x(T) .$$

Montrons que la fonction C^1

$$V(t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^T |\cos(\tau)| d\tau$$

est solution de l'équation d'HB. On a

$$\partial_t V(t, x) = -|\cos(t)|, \quad \partial_x V(t, x) = 1$$

Ainsi $\bar{H}(t, x, \nabla V(t, x)) = \max_u \partial_x V(t, x) f(x, u) = |\cos(t)|$ et on a bien $\partial_t V(t, x) + \bar{H}(t, x, \nabla V(t, x)) = 0$ pour tout (t, x) avec $V(T, x) = x$ pour tout x . On constate que la commande

$$u^*(t) = \text{sign}(\cos(t))$$

qui réalise le maximum n'est pas continue.

Exemple 2

Soit le système dans \mathbb{R}

$$\dot{x} = ux, \quad x(t_0) = x_0$$

avec $u \in [-1, 1]$. Considérons le problème de Mayer

$$\inf_{x(\cdot)} x(1) .$$

Il est clair que la commande constante $u^* = \text{sign}(x_0)$ est optimale, et la fonction valeur associée s'écrit alors

$$V(t_0, x_0) = \begin{cases} x_0 e^{t_0-1} & x_0 \geq 0 \\ x_0 e^{1-t_0} & x_0 \leq 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\partial_t V(t_0, x_0) = \begin{cases} x_0 e^{t_0-1} & x_0 > 0 \\ -x_0 e^{1-t_0} & x_0 < 0 \end{cases} \quad \partial_x V(t_0, x_0) = \begin{cases} e^{t_0-1} & x_0 > 0 \\ e^{1-t_0} & x_0 < 0 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction valeur n'est pas différentiable en $(t_0, 0)$ pour tout $t_0 < 1$, mais est C^1 par morceaux sur $(-\infty, 1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\partial_t V(t, x) - |\partial_x V(t, x)| x = 0$$

est vérifiée en tout (t_0, x_0) où V est différentiable, et la condition terminale

$$V(1, x) = x$$

est également vérifiée.

Exemple 3

Soit le problème de temps minimum dans \mathbb{R} :

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0$$

pour la cible $\mathcal{C} = \{-1, 1\}$, avec $u \in [-1, 1]$. Clairement la commande optimale consiste à choisir $u = 1$ pour $x_0 \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ et $u = -1$ pour $x_0 \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ (pour $x_0 = 0$, les deux choix sont optimaux). Ainsi, la fonction valeur est

$$V(x) = ||x| - 1| .$$

V est C^1 par morceaux, et en tout $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, V est différentiable avec $V'(x) \in \{-1, 1\}$. Ainsi, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$1 - |V'(x)| = 0$$

est bien vérifiée sur \mathcal{D} .

Soit $w(\cdot)$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} , constante par morceaux à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telle que

$$\int_{-1}^1 w(\xi) d\xi = 0 .$$

Posons

$$W(x) = \int_{-1}^x w(\xi) d\xi .$$

W est C^1 par morceaux et vérifie $W'(x) \in \{-1, 1\}$ pour presque tout x . Ainsi, W également solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman presque partout et satisfait la condition terminale $W(-1) = W(1) = 0$

Remarque. Ces exemples montrent que même lorsque la dynamique et le critère sont réguliers, la commande optimale n'est pas nécessairement continue, et la fonction valeur non nécessairement C^1 . D'autre part, une fonction valeur qui serait C^1 par morceaux ne peut pas être caractérisée comme l'unique solution C^1 par morceaux de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman qui vérifie la condition terminale.

2.4 Lien avec le Principe de Pontryagin

Considérons un problème de Mayer et supposons que la fonction valeur V soit C^2 sur $(-\infty, T] \times \mathsf{X}$. Soient $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ et $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$ une trajectoire optimale et une loi de commande associée. La fonction valeur V étant solution de l'équation (2.1), on peut écrire pour presque tout $t \in [t_0, T]$:

$$\begin{aligned}\partial_t V(t, x^*(t)) + H(x^*(t), \nabla V(t, x^*(t)), u^*(t)) &= 0, \\ \partial_t V(t, \xi) + H(\xi, \nabla V(t, \xi), u^*(t)) &\geq 0, \quad \forall \xi \in \mathsf{X}.\end{aligned}$$

Ainsi $x^*(t)$ minimise la fonction

$$\Gamma : \xi \mapsto \partial_t V(t, \xi) + H(\xi, \partial_x V(t, \xi)^t, u^*(t)).$$

Si $x^*(t) \in \text{int } \mathsf{X}$, on peut écrire la condition nécessaire d'optimalité $\partial_x \Gamma(x^*(t)) = 0$, soit :

$$\partial_{tx} V(t, x^*(t)) + \partial_x H(x^*(t), \nabla V(t, x^*(t)), u^*(t)) + \partial_{xx} V(t, x^*(t)) \partial_p H(x, \nabla V(t, x^*(t)), u^*(t)) = 0 \quad (2.3)$$

En posant $p(t) = \nabla V(t, x^*(t))$, on remarque tout d'abord que l'on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} p(t)^t &= \partial_{tx} V(t, x^*(t)) + \partial_{xx} V(t, x^*(t)) f(x^*(t), u^*(t)) \\ &= \partial_{tx} V(t, x^*(t)) + \partial_{xx} V(t, x^*(t)) \partial_p H(x, \nabla V(t, x^*(t)), u^*(t))\end{aligned}$$

Ainsi la condition d'optimalité (2.3) peut se re-écrire :

$$\frac{d}{dt} p(t) = -\partial_x H(x, p(t), u^*(t))^t$$

De plus, la condition terminale (2.2) entraîne l'égalité $\nabla V(T, x) = \partial_x \phi(x)^t$ pour tout .

Ainsi, pour toute trajectoire optimale *dans l'intérieur de* X , il existe un vecteur $p(\cdot)$ absolument continue, qui vérifie

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -\partial_x H(x^*(t), p(t), u^*(t))^t \quad \text{p.p. } t \in [t_0, T] \\ p(T) &= \partial_x \phi(x^*(T))^t\end{aligned}$$

où $u^*(t)$ vérifie $\bar{H}(x^*(t), p(t)) = H(x^*(t), p(t), u^*(t))$ pour presque tout $t \in [t_0, T]$.

Chapitre 3

Conditions suffisantes d'optimalité

3.1 Le cas C^1

Définition 3. Soit une application $\psi : (-\infty, T] \times \mathbf{X} \mapsto \mathbf{U}$. ψ est un retour d'état (ou rétroaction) admissible si pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$, l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, \psi(t, x)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

admet une unique solution absolument continue définie sur $[t_0, T]$.

Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$, on appelle *représentation en boucle ouverte*, notée $u_{t_0, x_0, \psi}$, toute application $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$ qui vérifie

$$u(t) = \psi(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

où $x(\cdot)$ est la solution de (3.1).

Proposition 6. S'il existe une fonction $W : (-\infty, T] \times \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$ continuellement différentiable vérifiant

$$\partial_t W(t, x) + \bar{H}(x, \nabla W(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$$

et

$$W(T, x) = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

ainsi qu'un retour d'état admissible ψ^* vérifiant

$$\bar{H}(x, \nabla W(t, x)) = \partial_x W(t, x) f(x, \psi^*(t, x)), \quad \forall (t, x) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$$

alors $V = W$. De plus, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$,

$$u^*(t) = u_{t_0, x_0, \psi^*}(t), \quad \forall t \in [t_0, T]$$

est une commande qui réalise le minimum de $V(t_0, x_0)$.

Preuve. Soit une condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$ et une solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. On définit la fonction $w(t) = W(t, x(t))$. $w(\cdot)$ est absolument continue et on peut écrire

$$\dot{w}(t) = \partial_t W(t, x(t)) + \partial_x W(t, x(t)) f(x(t), u(t)) \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in [t_0, T]$$

Ainsi $w(0) \leq w(T) = \phi(x(T))$ et ceci pour tout $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. On a donc $W(t_0, x_0) \leq V(t_0, x_0)$.

Considérons la trajectoire $x^*(\cdot)$ générée par le retour d'état ψ^* . La fonction $w^*(t) = W(t, x^*(t))$ vérifie $\dot{w}^*(t) = 0$ pour presque tout t . Ainsi

$$W(t_0, x_0) = W(T, x^*(T)) = \phi(x^*(T)) \geq V(t_0, x_0).$$

On obtient donc l'égalité $V(t_0, x_0) = W(t_0, x_0)$ et la trajectoire $x^*(\cdot)$ associée à la commande $u_{t_0, x_0, \psi^*}(\cdot)$ est optimale. ■

3.2 Le cas C^1 par morceaux

Définition 4. Soit $x(\cdot)$ une solution absolument continue d'une équation différentielle non autonome dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = g(t, x)$$

et soit une variété \mathcal{M} de \mathbb{R}^{n+1} définie par

$$\mathcal{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \mu(t, x) = 0\}$$

où μ est une fonction C^1 . Si $(t, x(t))$ appartient à \mathcal{M} , on dit que $x(\cdot)$ intersecte de façon transverse \mathcal{M} en $(t, x(t))$ si la condition

$$\mu_t(t, x(t)) + \mu_x(t, x(t)) g(t, x(t)) \neq 0$$

est vérifiée.

On admettra le résultat suivant (cf [2]) :

Proposition 7. (Théorème de transversalité générique des trajectoires) Soit g une application C^1 de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^n telle qu'il existe un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et un intervalle $[t_0, t_1]$ vérifiant la propriété

$$\forall x_0 \in \mathcal{O}, \text{ la solution } x_{(t_0, x_0)}(\cdot) \text{ de } \dot{x} = g(t, x), x(t_0) = x_0 \text{ est définie sur } [t_0, t_1]$$

Soit \mathcal{M} une variété de \mathbb{R}^{n+1} . Alors, l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{x_0 \in \mathcal{O}, \exists t \in [t_0, t_1] \text{ t.q. } (t, x_{(t_0, x_0)}(t)) \text{ intersecte } \mathcal{M} \text{ de façon non transverse}\}$$

est de mesure nulle.

Proposition 8. Soit V la fonction valeur d'un problème de Mayer qui satisfait les hypothèses 1 et 2. S'il existe une fonction W continue de $[\bar{t}, T] \times \mathbf{X}$ dans \mathbb{R} qui vérifie les propriétés

1. $W(t, x) \geq V(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [\bar{t}, T] \times \mathbf{X}$
2. $W(T, x) = \phi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{X}$
3. Il existe un nombre fini de variétés $\mathcal{M}_i \subset (\bar{t}, T) \times \mathbf{X}$ de dimension inférieure ou égale à n telles que pour tout $(t, x) \in (\bar{t}, T) \times \mathbf{X} \setminus \bigcup_i \mathcal{M}_i$, W est C^1 et vérifie

$$W_t(t, x) + \bar{H}(x, \nabla W(t, x)) = 0$$

alors W coïncide avec V sur $[\bar{t}, T] \times \mathbf{X}$.

Preuve. Il suffit de montrer que l'on a $W \leq V$ sur $[\bar{t}, T] \times \mathbf{X}$. Raisonnons par l'absurde. Soit $(t_0, x_0) \in (\bar{t}, T) \times \mathbf{X}$ et $\epsilon > 0$ tel que $V(t_0, x_0) \leq W(t_0, x_0) - \epsilon$. Par continuité de W par rapport à x , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|\xi - x_0\| < \eta \Rightarrow W(t_0, \xi) > W(t_0, x_0) - \epsilon/2 > V(t_0, x_0) + \epsilon/2. \quad (3.2)$$

D'autre part, par définition de la fonction valeur, il existe $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ tel que

$$\phi(x^*(T)) < V(t_0, x_0) + \epsilon/2. \quad (3.3)$$

Soit $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$ tel que $x^*(\cdot) = x_{t_0, x_0, u^*(\cdot)}(\cdot)$. Considérons une suite $y_n(\cdot)$ solutions de la dynamique

$$\dot{y}_n = -f(y_n, v_n(t)), \quad y_n(0) = x^*(T)$$

définie pour $t \in [0, T - t_0]$, où $v_n(\cdot)$ est une suite d'applications constantes par morceaux, continues à droite, à valeurs dans \mathbf{U} qui vérifient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \|v_n(t) - u^*(T - t)\| dt = 0.$$

Soient les suites $x_n(\cdot)$, $u_n(\cdot)$ définies par $x_n(t) = y_n(T - t)$ et $u_n(t) = v_n(T - t)$ pour tout $t \in [t_0, T]$. Clairement, on a $x_n(T) = x^*(T)$ pour tout n . Par le Théorème de continuité des solutions par rapport à

la commande (Proposition 3), les trajectoires $x_n(\cdot)$ convergent uniformément vers $x^*(\cdot)$. Ainsi, pour N assez grand, on a

$$\|x_N(t_0) - x^*(t_0)\| = \|x_N(t_0) - x_0\| < \eta . \quad (3.4)$$

Soit $[t_j, t_{j+1}[$ un intervalle où $u_N(\cdot)$ est constant. Par le Théorème de transversalité générique des trajectoires (Proposition 7), il existe une suite ξ_k qui tend vers $x_N(t_j)$ telle que la solution $\tilde{x}_k(\cdot)$ de

$$\dot{\tilde{x}}_k = f(\tilde{x}_k, u_N(t_j)), \quad \tilde{x}_k(t_j) = \xi_k$$

définie pour $t \in [t_j, t_{j+1}]$ vérifie

$$\tilde{x}_k(t) \notin \bigcup_i \mathcal{M}_i, \text{ p.p. } t \in [t_j, t_{j+1}] .$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} W(t_{j+1}, \tilde{x}_k(t_{j+1})) - W(t_j, \tilde{x}_k(t_j)) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} W_t(t, \tilde{x}_k(t)) + W_x(t, \tilde{x}_k(t)) \cdot f(\tilde{x}_k(t), u_N(t_j)) dt \\ &\geq \int_{t_j}^{t_{j+1}} W_t(t, \tilde{x}_k(t)) + \bar{H}(\tilde{x}_k(t), \nabla W(t, \tilde{x}_k(t))) dt \geq 0 \end{aligned}$$

et pour k qui tend vers l'infini, on obtient

$$W(t_{j+1}, x_N(t_{j+1})) \geq W(t_j, x_N(t_j)) .$$

Ainsi, on a

$$W(T, x_N(T)) - W(t_0, x_N(t_0)) = \sum_j W(t_{j+1}, x_N(t_{j+1})) - W(t_j, x_N(t_j)) \geq 0$$

En utilisant les égalités $W(T, x_N(T)) = \phi(x_N(T))$ et $x_N(T) = x^*(T)$, l'inégalité (3.3) donne finalement

$$W(t_0, x_N(t_0)) < V(t_0, x_0) + \epsilon/2 .$$

De part la propriété (3.4), cette dernière inégalité est en contradiction avec (3.2). ■

Corollaire 2. Soit C un fermé de X et V la fonction valeur d'un problème de temps minimum qui satisfait les hypothèses 1 et 2. S'il existe un ouvert \mathcal{O} de X qui contient la cible C et une fonction W continue de \mathcal{O} dans \mathbb{R} qui vérifie les propriétés

1. $W(x) \geq V(x)$ pour tout $x \in \mathcal{O}$
2. $W(x) = 0$ pour tout $x \in C$
3. Il existe un nombre fini de variétés $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{O}$ de dimension inférieure à n telles qu'en tout $x \in \mathcal{O} \setminus \bigcup_i \mathcal{M}_i$, W est C^1 et vérifie

$$1 + \bar{H}(x, \nabla W(x)) = 0$$

4. Pour tout $x \in \partial\mathcal{O}$, on a

$$W(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{O}} W(\xi)$$

alors W coïncide avec V sur $\bar{\mathcal{O}}$.

Remarque. Un usage typique de la Proposition 8 ou du Corollaire 2 consiste à déterminer le coût associé à une stratégie supposée optimale comme candidate fonction W . La condition $W \geq V$ est alors nécessairement vérifiée. L'ouvert \mathcal{O} du Corollaire 2 peut typiquement être choisi comme un ensemble de niveau $\{x \in X, W(x) < \gamma\}$ avec $\gamma > 0$.

3.3 Exemple du double intégrateur

Sur la droite réelle, on cherche à rejoindre $x = 0$ avec une vitesse nulle, en contrôlant l'accélération $\ddot{x} = u \in [-1, 1]$. On considère pour cela le problème de temps minimum pour la dynamique dans $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) \in \mathbf{U} = [-1, 1]$$

et la cible $\mathcal{C} = \{(0, 0)\}$. Montrons qu'une stratégie optimale consiste à rejoindre la cible en utilisant les commandes $u = +1$ ou $u = -1$ en commutant au plus une fois. On considère tout d'abord les deux trajectoires particulières qui arrivent en $(0, 0)$ sans commutation (en utilisant les commandes $u = +1$ et $u = -1$ respectivement) :

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, x_2 < 0 \right\}, \quad \Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, x_2 > 0 \right\}$$

puis les domaines G_+ , resp. G_- , pour lesquels la commande constante $u = +1$, resp. $u = -1$ permet à la trajectoire solution de rejoindre Γ_- , resp. Γ_+ :

$$G_+ = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 < -\text{sign}(x_2)\frac{1}{2}x_2^2 \right\}, \quad G_- = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 > -\text{sign}(x_2)\frac{1}{2}x_2^2 \right\}.$$

Nous montrons que la synthèse

$$\psi^*(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in \Gamma_+ \cup G_+ \\ -1 & \text{si } x \in \Gamma_- \cup G_- \end{cases}$$

est optimale, en explicitant la fonction W temps d'atteinte de la cible associée à cette stratégie. Pour $x \in \Gamma_+$, resp. Γ_- , on a $\dot{x}_2 = 1$, resp. $\dot{x}_2 = -1$ et ainsi $W(x(0)) = -x_2(0)$, resp. $W(x(0)) = x_2(0)$.

Soit $x \in G_+$, on a $\dot{x}_2(t) = 1$ pour $t < \bar{t}$ où \bar{t} désigne le premier instant tel que $x_1(\bar{t}) = -\frac{1}{2}x_2(\bar{t})^2$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + x_2(0)t + \frac{1}{2}t^2 \\ x_2(t) &= x_2(0) + t \end{aligned}$$

pour $t < \bar{t}$, et \bar{t} vérifie

$$\bar{t}^2 + 2x_2(0)\bar{t} + x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0)^2 = 0$$

soit

$$\bar{t} = -x_2(0) + \sqrt{\frac{1}{2}x_2(0)^2 - x_1(0)}$$

d'où on déduit

$$W(x(0)) = \bar{t} + x_2(\bar{t}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2(0)^2 - x_1(0)} - x_2(0)$$

On procède de même pour Γ_- . Finalement, la fonction W s'écrit

$$W(x) = \begin{cases} W_+(x) = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - x_2} & x \in \Gamma_+ \cup G_+ \\ W_-(x) = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 + x_2} & x \in \Gamma_- \cup G_- \end{cases}$$

On vérifie que W est bien continue :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_+ &\Rightarrow W_+(x) = W_-(x) = -x_2 \\ x \in \Gamma_- &\Rightarrow W_+(x) = W_-(x) = x_2 \end{aligned}$$

et vérifie l'équation HJB

$$1 + \partial_{x_1}W(x)x_2 - |\partial_{x_2}W(x)| = 0$$

en dehors des variétés Γ_+ et Γ_- . En effet, pour $x \in G_+$, on a

$$\partial_x W_+(x) = \left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_1}} - 1 \right]$$

et pour $x \in G_-$,

$$\partial_x W_-(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 + x_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 + x_1}} + 1 \right]$$

Néanmoins, W n'est pas C^1 sur $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$:

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_+ &\Rightarrow \partial_x W_+(x) = [-\infty, -\infty] \neq \partial_x W_-(x) = \left[\frac{1}{x_2}, 0 \right] \\ x \in \Gamma_- &\Rightarrow \partial_x W_+(x) = \left[-\frac{1}{x_2}, 0 \right] \neq \partial_x W_-(x) = [+\infty, +\infty] \end{aligned}$$

3.4 Le cas linéaire-quadratique

Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On considère la dynamique linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) \tag{3.5}$$

définie sur $X = \mathbb{R}^n$, où $u(t) \in U = \mathbb{R}^p$. Soit $T > 0$, $S, Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$. On considère le problème \mathcal{P} , pour toute paire $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{(t_0, T]}} \frac{1}{2} x^t(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^t(\tau) Q x(\tau) + u^t(\tau) R u(\tau) d\tau$$

Hypothèse 3. *Les matrices S et Q sont symétriques positives. R est définie positive.*

Pour une matrice M dans $\mathcal{M}_{p,q}$, on considère la norme $\|M\| = \sup\{\|Mx\|, x \in \mathbb{R}^p, \|x\| = 1\}$.

Remarque. Les Hypothèses 1, 2 ne sont pas vérifiées pour la dynamique augmentée

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x^t Q x + u^t R u) \end{aligned}$$

Pour $k > 0$ et toute paire $(t_0, x_0) \in [T - k, T] \times \mathbb{B}_n(0, k)$, on considère le problème modifié \mathcal{P}_k :

$$\inf_{(v(\cdot), \lambda(\cdot)) \in \mathcal{V}_{[t_0, T]}} \frac{1}{2} x^t(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T L_k(x(\tau), v(\tau), \lambda(\tau)) d\tau$$

avec

$$L_k(x, v, \lambda) = \lambda (x^t Q x + k^2 \|x\|^2 v^t R v) + (1 - \lambda) \bar{L}_k$$

pour la dynamique $\dot{x} = Ax + k\|x\|Bv$, où $(v, \lambda) \in V = \mathbb{B}_p(0, 1) \times [0, 1]$, en posant

$$\bar{L}_k = (\|Q\| + k^2 \|R\|) M_k^2, \quad M_k = k e^{(\|A\| + k\|B\|)(T-k)}.$$

On peut aisément vérifier, à l'aide du Lemme de Gronwall, la propriété suivante

$$(t_0, x_0) \in [T - k, T] \times \mathbb{B}_n(0, k) \Rightarrow \begin{cases} \|x(t)\| \leq M_k \\ |L_k(x(t), v(t), \lambda(t))| \leq \bar{L}_k \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Clairement le problème \mathcal{P}_k vérifie les hypothèses 1, 2 et la commande $\lambda \equiv 1$ est optimale. La proposition suivante montre que pour toute paire $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$, il existe un nombre k suffisamment grand pour lequel la solution optimale du problème \mathcal{P}_k est également optimale pour tout problème $\mathcal{P}_{k'}$ avec $k' > k$.

Proposition 9. *Sous l'hypothèse 3, les propriétés suivantes sont satisfaites.*

i. *L'équation de Riccati*

$$\dot{P} + PA + A^t P + Q - PBR^{-1}B^t P = 0, \quad P(T) = S(T) \quad (3.6)$$

possède une unique solution symétrique positive C^1 définie pour tout $t \in (-\infty, T]$.

ii. *L'application*

$$\psi^* : (t, x) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto -R^{-1}B^t P(t)x$$

est un retour d'état admissible optimal, et $V(t, x) = \frac{1}{2}x^t P(t)x$ est la fonction valeur du problème \mathcal{P} .

Preuve. Le deuxième membre de l'équation différentielle (3.6) étant C^1 , il existe par le Théorème de Cauchy-Lipschitz une unique solution pour le problème de Cauchy en temps rétrograde défini sur un intervalle maximal $[\bar{t}, T]$. Sur cet intervalle, $P(\cdot)$ est C^1 et nous montrons que la fonction $W(t, x) = \frac{1}{2}x^t P(t)x$ vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. En effet, on a

$$H(x, \nabla W, u) = \frac{1}{2} [x^t P A x + x^t A^t P x + x^t Q x + x^t P B u + u^t B^t P x + u^t R u]$$

que l'on re-écrit par *complétion des carrés* :

$$H(x, \nabla W, u) = \frac{1}{2} [x^t P A x + x^t A^t P x + x^t Q x + (u + R^{-1}B^t P x)^t R (u + R^{-1}B^t P x) - x^t P B R^{-1} B^t P x]$$

Ainsi on obtient

$$\partial_t W + \bar{H}(x, \nabla W) = \frac{1}{2} x^t \left(\dot{P} + PA + A^t P + Q - PBR^{-1}B^t P \right) x = 0$$

avec $\bar{H}(x, \nabla W(t, x)) = H(x, \nabla W(t, x), \psi^*(t, x))$. La condition terminale $W(T, x) = x^t S x$ est clairement vérifiée.

Soit $\bar{t}' \in]\bar{t}, T[$ et $k = \max_{t \in [\bar{t}', T]} \|R^{-1}B^t P(t)\|$, alors pour tout $t_0 > \max(T - k, \bar{t}')$ et toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{B}_n(0, k)$ on déduit par la Proposition 6 que le retour d'état ψ^* (qui est admissible étant C^1 et garantissant une solution $x(\cdot)$ bornée) est bien optimal pour le problème \mathcal{P}_k . Clairement, il est également optimal pour tout problème $\mathcal{P}_{k'}$ avec $k' > k$, et donc aussi pour le problème \mathcal{P} , et ceci pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in]\bar{t}, T] \times \mathbb{R}^n$.

Montrons que $P(\cdot)$ est bien défini pour tout $t < T$. Remarquons que pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in [\bar{t}, T] \times \mathbb{B}_n(0, 1)$, le coût associée à la solution (sous-optimale) pour la commande $u(\cdot) \equiv 0$ est uniformément borné. Ainsi $W(t_0, x_0) = x_0^t P(t_0)x_0$, qui est la fonction valeur pour $(t_0, x_0) \in]\bar{t}, T] \times \mathbb{B}_n(0, 1)$, est uniformément bornée sur $[\bar{t}, T] \times \mathbb{B}_n(0, 1)$, et on déduit que $\|P(\cdot)\|$ est borné sur $[\bar{t}, T]$, d'où une contradiction avec la maximalité de l'intervalle d'existence de $P(\cdot)$.

Ainsi W est la fonction valeur sur $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$. ■

Ce résultat s'étend facilement au cadre *linéaire-quadratique non autonome*.

Corollaire 3. *Lorsque les matrices A, B, Q et R sont fonctions mesurables du temps, bornées et que l'hypothèse 3 est vérifiée pour tout temps, alors les propriétés de la Proposition 9 restent vraies.*

3.5 Application au suivi de trajectoire

On souhaite commander le système (3.5) pour qu'une *sortie* du système

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^m,$$

où $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, soit "proche" d'une *consigne temporelle* $\tilde{y}(\cdot)$. On considère pour cela le critère

$$\frac{1}{2} x^t(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (Cx(\tau) - \tilde{y}(\tau))^t Q (Cx(\tau) - \tilde{y}(\tau)) + u^t(\tau) R u(\tau) d\tau$$

où les matrices S , Q et R vérifient l'Hypothèse 3, que l'on peut re-écrire de la façon suivante

$$\frac{1}{2}x^t(T)Sx(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^t(\tau) \ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} C^tQC & -C^tQ\tilde{y}(\tau) \\ -\tilde{y}^t(\tau)QC & \tilde{y}^t(\tau)Q\tilde{y}(\tau) \end{bmatrix}}_{\tilde{Q}(\tau)} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ 1 \end{bmatrix} + u^t(\tau)Ru(\tau) d\tau$$

où $\tilde{Q}(\cdot)$ est une matrice symétrique de taille $n + 1$. On considère alors la dynamique augmentée en dimension $n + 1$:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

avec $\dot{z} = 0$ et $z = 1$. on obtient ainsi un problème linéaire quadratique (non autonome) avec les matrices

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = R$$

et la matrice $\tilde{Q}(\cdot)$ définie ci-dessus. On peut appliquer le Corollaire 3 en cherchant une solution \tilde{P} à l'équation de Riccati (non autonome) :

$$\dot{\tilde{P}} + \tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^t\tilde{P} + \tilde{Q}(t) - \tilde{P}\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^t\tilde{P} = 0, \quad \tilde{P}(T) = \tilde{S}(T)$$

de la forme

$$\tilde{P}(t) = \begin{bmatrix} P(t) & \beta(t) \\ \beta^t(t) & \gamma(t) \end{bmatrix}$$

où β est un vecteur de dimension n et γ un scalaire, ce qui conduit aux équations

$$\begin{aligned} \dot{P} + PA + A^tP + C^tQC - PBR^{-1}B^tP &= 0, & P(T) &= S(T) \\ \dot{\beta} + A^t\beta - PBR^{-1}B^t\beta - C^tQ\tilde{y}(t) &= 0, & \beta(T) &= 0 \end{aligned}$$

avec le retour d'état optimal

$$u^*(t, x) = -\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^t\tilde{P}(t)\tilde{x} = -R^{-1}B^t(P(t)x - \beta(t))$$

On remarque que la matrice $P(\cdot)$ peut être déterminée indépendamment de la consigne $\tilde{y}(\cdot)$.

Chapitre 4

Fonctions valeur semi-continues

4.1 Préliminaires et définitions

Pour une paire (f, U) on considère la multi-application

$$F(x) = \bigcup_{u \in U} f(x, u) . \quad (4.1)$$

Sous les hypothèses 1 et 2, on sait (Lemme de Filippov) que pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times X$, l'ensemble des solutions $x(\cdot)$ absolument continues de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

est exactement l'ensemble $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$.

De façon plus générale, on peut considérer une inclusion différentielle (4.2) et les hypothèses suivantes sur F .

Hypothèse 4. La multi-application $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ vérifie

1. Pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un ensemble non vide, compact et convexe.
2. F est semi-continue supérieurement i.e. pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|y - x\| \leq \eta \Rightarrow F(y) \subset F(x) + \mathbb{B}(0, \epsilon)$$

3. F est à croissance au plus linéaire i.e. il existe un nombre $C > 0$ tel que $\|v\| \leq C(1 + \|x\|)$ pour tout $v \in F(x)$ et tout x dans X .

Hypothèse 5. La multi-application $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est Lipschitz i.e. pour tout $x \in X$ et $R > 0$, il existe $L > 0$ tel que

$$y \in \mathbb{B}(x, R) \cap X \Rightarrow F(y) \subseteq F(x) + \mathbb{B}(0, L\|x - y\|) .$$

Dans ce contexte, on admettra une généralisation directe du Théorème de compacité des trajectoires (Proposition 2) [3].

Proposition 10. (Théorème de compacité des trajectoires approchées) Sous l'Hypothèse 4, soit une suite $x_n(\cdot)$ de fonctions absolues continues à valeurs dans X , définies sur un intervalle $[t_0, T]$ telles que $x_n(t_0) = x_0^n$ et qui vérifient

$$\dot{x}_n(t) \in F(x_n(t) + \xi_n(t)) + \mathbb{B}(0, r_n(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

où $\xi_n(\cdot)$ et $r_n(\cdot)$ sont des fonctions mesurables sur $[t_0, T]$ qui convergent dans L^2 vers 0, et x_0^n converge vers x_0 . Alors il existe une sous-suite qui converge uniformément vers une solution $x(\cdot)$ absolument continue de (4.2) telle que $x(t_0) = x_0$, et dont les dérivées convergent faiblement vers $\dot{x}(\cdot)$.

Ce résultat s'étend également aux multi-applications *non-autonomes* avec une dépendance mesurable du temps et satisfaisant aux hypothèses 4 en tout temps.

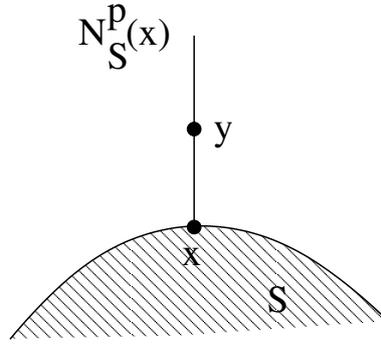
Définition 5. Soit S un ensemble fermé de X et une multi-application $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. (S, F) est dit faiblement invariante si pour tout x_0 dans S , il existe une fonction $x(\cdot)$ absolument continue de $[t_0, +\infty)$ dans X solution de (4.2) et telle que $x(t) \in S$ pour tout $t > t_0$.

Définition 6. Soit S un ensemble fermé de X et une multi-application $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. (S, F) est dit fortement invariant si pour tout x_0 dans S , toute fonction $x(\cdot)$ absolument continue de $[t_0, +\infty)$ dans X solution de (4.2) vérifie $x(t) \in S$ pour tout $t > t_0$.

4.2 Quelques notions d'analyse proximale

Soit S un fermé de \mathbb{R}^n . On note $\text{Proj}_S(x)$ la projection de x sur S . Soit x un élément de S . On définit le cône normal proximal à S en x :

$$N_S^p(x) := \{t(y - x) \mid x \in \text{Proj}_S(y), y \notin S, t \geq 0\}$$



et on appelle *normale proximale* à S en x tout élément de $N_S^p(x)$.

Remarque. $N_S^p(x)$ peut être réduit à $\{0\}$. Exemple : pour $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq -|x_1|\}$, on a $N_S^p(0) = \{0\}$.

Lemme 2. Soit $x \in S$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. S'il existe des nombres $\sigma \geq 0$, $\delta > 0$ tels que

$$\xi \cdot (y - x) \leq \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in S \cap \mathbb{B}(x, \delta) \quad (4.3)$$

alors $\xi \in N_S^p(x)$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si $\xi \notin N_S^p(x)$, alors pour tout $n > 0$ le vecteur $\xi/(2n)$ n'appartient pas non plus à $N_S^p(x)$. Ainsi il existe y_n dans S tel que $\text{dist}(x + \xi/(2n), y_n) < \text{dist}(x + \xi/(2n), x)$ soit

$$\|x + \xi/(2n) - y_n\|^2 < \|\xi/(2n)\|^2 \implies \|x - y_n\|^2 + \frac{1}{n} \xi \cdot (x - y_n) + \|\xi/(2n)\|^2 < \|\xi/(2n)\|^2$$

d'où on déduit que la suite y_n vérifie $\xi \cdot (y_n - x) > n \|y_n - x\|^2$. Comme $\xi \cdot (y_n - x) \leq \|\xi\| \cdot \|y_n - x\|$, on conclut que y_n converge vers x quand n tend vers $+\infty$. Ainsi pour n assez grand, on a $\|y_n - x\| < \delta$ et $n > \sigma$, d'où une contradiction avec (4.3). ■

On rappelle la définition du cône tangent de Bouligand, pour $x \in S$:

$$T_S^B(x) := \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x}{t_n}, x_n \in S, x_n \rightarrow x, t_n > 0, t_n \rightarrow 0 \right\}.$$

Un lien avec le cône normal est le suivant :

Proposition 11. Soit $x \in S$, alors la propriété suivante est satisfaite

$$v \cdot \xi \leq 0, \quad \forall v \in T_S^B(x), \forall \xi \in N_S^p(x).$$

Preuve. Soit $v \in T_S^B(x)$ et deux suites $x_n \in S$, $t_n > 0$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x)/t_n = v$. Soit $\xi \in N_S^p(x)$ et $y \notin S$, $t \geq 0$ tels que $\xi = t(y - x)$. On écrit tout d'abord

$$(y - x_n) \cdot (y - x) = \|y - x_n\|^2 + (y - x_n) \cdot (x_n - x).$$

Comme on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y - x_n\| = \|y - x\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (y - x_n) \cdot (x_n - x) = 0,$$

il existe $N > 0$ tel que

$$(y - x_n) \cdot (y - x) \geq 0 \quad \forall n \geq N.$$

D'autre part, on écrit

$$\frac{(x_n - x)}{t_n} \cdot (y - x) = \frac{1}{n}(x_n - y) \cdot (y - x) + \frac{1}{t_n} \|y - x\|^2.$$

Comme $(x_n - y) \cdot (y - x) \leq 0$ pour $n \geq N$ et $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_n - x)}{n} \cdot (y - x) \leq 0$$

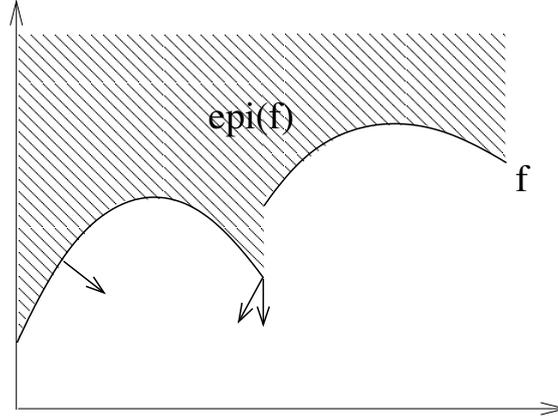
et ainsi $v \cdot t(y - x) = v \cdot \xi \leq 0$. ■

Soit f une application semi-continue inférieurement (s.c.i.) de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On note $\text{epi}(f)$ son épigraphe

$$\text{epi}(f) := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}} \mid z \geq f(x)\}$$

On rappelle qu'une fonction f est s.c.i. si et seulement si $\text{epi}(f)$ est fermé. On définit le *sous-différentiel proximal* de f en x

$$\partial^p f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, -1) \in N_{\text{epi}(f)}^p(x, f(x))\}$$



et on appelle *sous-gradient proximal* de f en x tout élément ξ de $\partial^p f(x)$.

Remarques. $\partial^p f(x)$ peut être vide. $\partial^p f(x)$ est convexe s'il n'est pas vide. Si f est C^2 en x , on vérifie aisément que l'on a $\partial^p f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Soient deux fonctions f_1, f_2 s.c.i. alors on a

$$\text{epi}(f_1 \vee f_2) = \text{epi}(f_1) \cap \text{epi}(f_2), \quad \text{epi}(f_1 \wedge f_2) = \text{epi}(f_1) \cup \text{epi}(f_2),$$

où les fonctions $f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2$ sont définies comme suit :

$$f_1 \vee f_2(x) = \max(f_1(x), f_2(x)) \quad f_1 \wedge f_2(x) = \min(f_1(x), f_2(x)).$$

Si f_1, f_2 sont deux fonctions de classe C^2 et \bar{x} est tel que $f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$ avec $\nabla f_1(\bar{x}) \neq \nabla f_2(\bar{x})$, alors on a $\partial^p(f_1 \vee f_2)(\bar{x}) = \overline{\text{co}}\{\nabla f_1(\bar{x}), \nabla f_2(\bar{x})\}$ et $\partial^p(f_1 \wedge f_2)(\bar{x}) = \emptyset$.

Pour une fonction C^2 en x , on a

$$\exists(\sigma, \eta) \text{ t.q. } f(y) \geq f(x) + \partial_x f(x)(y-x) - \sigma \|y-x\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x, \eta).$$

Cette propriété se généralise aux fonctions s.c.i. de la façon suivante.

Proposition 12.

$$\xi \in \partial^p f(x) \iff \exists(\sigma, \eta) \text{ t.q. } f(y) \geq f(x) + \xi \cdot (y-x) - \sigma \|y-x\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x, \eta)$$

Preuve. \Rightarrow Soit un vecteur ξ vérifiant $(\xi, -1) \in N_{\text{epi}(f)}^p(x, f(x))$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\delta(\xi, -1)\|^2 \leq \|(x, f(x)) + \delta(\xi, -1) - (y, f(y))\|^2, \quad \forall y$$

soit

$$\begin{aligned} \delta^2 \|\xi\|^2 + \delta^2 &\leq \|x-y + \delta\xi\|^2 + (f(x) - f(y) - \delta)^2 \\ &\leq \delta^2 \|\xi\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\delta(x-y) \cdot \xi + (f(x) - f(y) - \delta)^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$(f(x) - f(y) - \delta)^2 \geq \psi(y) := \delta^2 + 2\delta(y-x) \cdot \xi - \|x-y\|^2.$$

Or ψ est une fonction continue telle que $\psi(x) = \delta^2$. Donc il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\psi(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \eta_1)$. D'autre part, f étant s.c.i., il existe $\eta_2 > 0$ tel que $f(y) > f(x) - \delta$ pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \eta_2)$. Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On peut alors écrire

$$f(y) \geq g(y) := f(x) - \delta + \sqrt{\psi(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x, \eta).$$

Or, g étant C^2 sur $\mathbb{B}(x, \eta)$, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$g(y) \geq g(x) + \partial_y g(x)(y-x) - \sigma \|y-x\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x, \eta).$$

En remarquant que l'on a $g(x) = f(x)$ et $\partial_y g(x) = \xi^t$, on obtient finalement

$$f(y) \geq f(x) + \xi \cdot (y-x) - \sigma \|y-x\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x, \eta).$$

\Leftarrow Soit ξ vérifiant l'inégalité de droite. Pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \eta)$, on a

$$\begin{aligned} \xi \cdot (y-x) &\leq z - f(x) + \sigma \|y-x\|^2 \\ &\leq z - f(x) + \sigma (\|y-x\|^2 + (z-f(x))^2) \quad \forall z \geq f(y) \end{aligned}$$

que l'on peut re-écrire comme suit

$$(\xi, -1) \cdot ((y, z) - (x, f(x))) \leq \sigma \|(y, z) - (x, f(x))\|^2$$

pour tout $(y, z) \in \text{epi}(f) \cap \mathbb{B}((x, f(x)), \eta)$, et on conclut par le Lemme 2 que $(\xi, -1)$ appartient bien à $N_{\text{epi}(f)}^p(x, f(x))$. ■

4.3 Characterization de domaines invariants

Proposition 13. Soit S un ensemble fermé de X et f une application de $X \times U$ dans \mathbb{R}^n telle que la multi-application (4.1) vérifie l'Hypothèse 4. Alors l'équivalence suivante est vérifiée.

$$(S, F) \text{ faiblement invariant} \iff \forall x \in S, \forall \xi \in N_S^p(x), \exists u \in U \text{ t.q. } f(x, u) \cdot \xi \leq 0$$

Preuve. \Leftarrow Pour tout $x \in X$, on considère $s(x) \in \text{Proj}_S(x)$. Par définition, on a $x - s(x) \in N_S^p(s(x))$. Il existe ainsi $u^*(x) \in U$ tel que $f(s(x), u^*(x)) \cdot (x - s(x)) \leq 0$.

Soit $x_0 \in S$. Fixons $T > t_0$. Soit un ensemble fini de temps $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$ avec $t_i < t_{i+1}$ et $t_N = T$. On considère la solution absolument continue $x_\pi(\cdot) = x(\cdot)$ définie comme suit :

$$\dot{x}_\pi(t) = f(s(x_i), u^*(x_i)), \quad x_\pi(t_i) = x_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

En utilisant le Lemme de Gronwall, l'hypothèse de croissance au plus linéaire garantit que la fonction $x_\pi(\cdot)$ est bornée sur $[t_0, T]$, ainsi que sa dérivée, disons par M . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \text{dist}_S(x_1) &\leq M(t_1 - t_0) \\ \text{dist}_S(x_2)^2 &\leq \|x_2 - s(x_1)\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + \|x_1 - s(x_1)\|^2 + 2(x_2 - x_1) \cdot (x_1 - s(x_1)) \\ &\leq M^2(t_2 - t_1)^2 + d_S(x_1)^2 + 2(t_2 - t_1)f(s(x_1), u^*(x_1)) \cdot (x_1 - s(x_1)) \\ &\leq M^2(t_2 - t_1)^2 + M^2(t_1 - t_0)^2 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\text{dist}_S(x_k)^2 \leq M^2 \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i)^2 \leq M^2(T - t_0) \text{diam}(\pi) \quad k = 1, \dots, N.$$

Soit une suite π_j telle que $\text{diam}(\pi_j) \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow +\infty$. Clairement la suite $x_{\pi_j}(\cdot)$ est équicontinue et bornée. Par le Théorème d'Ascoli, il existe une sous suite convergente vers $x^*(\cdot)$ qui vérifie $x^*(t) \in S$ pour tout $t \in [t_0, T]$. De plus, pour tout j et presque tout t , il existe un indice i tel que

$$\dot{x}_{\pi_j}(t) = f(x_i, u^*(x_i)) \in F(x_{\pi_j}(t) + \epsilon_j(t))$$

où $\epsilon_j(\cdot)$ est une suite qui converge dans L^2 vers 0. Par le Théorème de compacité des trajectoires approchées (Proposition 10), on obtient $\dot{x}^*(t) \in F(x^*(t))$ pour presque tout $t \in [t_0, T]$ i.e. $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. Le même résultat est obtenu sur l'intervalle $[T, 2T]$ pour la condition initiale $x(T) = x^*(T)$ et ainsi de suite sur tout intervalle $[kT, (k+1)T]$, d'où l'existence d'une trajectoire sur $[t_0, +\infty)$ incluse dans S .

\Rightarrow Soit $x_0 \in S$ et une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}(x_0)$ incluse dans S . Pour $t > t_0$, la semi-continuité supérieure de la multi-application F donne pour tout $\epsilon > 0$ l'existence d'un nombre $\bar{t} > t_0$ t.q.

$$\frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau \in F(x_0) + \mathbb{B}(0, \epsilon), \quad \forall t \in]t_0, \bar{t}]$$

et ainsi on a

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} \in F(x_0).$$

Comme $v \in T_S^B(x_0)$, on déduit par la Proposition 11 l'inégalité $v \cdot \xi \leq 0$ pour tout $\xi \in N_S^p(x_0)$. ■

L'extension de ce résultat à des dynamiques non autonomes ne pose pas de problème particulier, en considérant une extension du Théorème de compacité des trajectoires approchées (Proposition 10) aux dynamiques non autonomes.

Proposition 14. *Soit S un ensemble fermé de X et f une application de $\mathbb{R} \times X \times U$ dans \mathbb{R}^n telle que la multi-application $F(t, x) = \cup_{u \in U} f(t, x, u)$ soit à valeurs convexes compactes non vides, mesurable par rapport à t , semi-continue et à croissance au plus linéaire par rapport à x , uniformément en t*

$$(S, F) \text{ faiblement invariant} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in S, \forall \xi \in N_S^p(x), \exists u \in U \text{ t.q. } f(t, x, u) \cdot \xi \leq 0$$

Proposition 15. *Soit S un ensemble fermé de X et f une application de $X \times U$ dans \mathbb{R}^n telle que la multi-application (4.1) vérifie les Hypothèses 4 et 5. Alors l'équivalence suivante est vérifiée.*

$$(S, F) \text{ fortement invariant} \Leftrightarrow \forall x \in S, \forall \xi \in N_S^p(x), f(x, u) \cdot \xi \leq 0, \forall u \in U$$

Preuve. \Leftarrow Soit $x_0 \in X$ et $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}(x_0)$. Par l'hypothèse de croissance linéaire, $\bar{x}(\cdot)$ est borné sur $[t_0, T]$ pour $T < +\infty$, disons par M . Grâce à l'Hypothèse 5, il existe une constante L telle que

$$y \in \mathbb{B}(0, M) \cap X \Rightarrow F(y) \subseteq F(\bar{x}(t)) + \mathbb{B}(0, L\|\bar{x}(t) - y\|), \quad \forall t \in [t_0, T].$$

On considère alors la multi-application

$$\tilde{F}(t, x) = \begin{cases} \{v \in F(x) \text{ t.q. } \|v - \dot{\bar{x}}(t)\| \leq L\|x - \bar{x}(t)\|\}, & t \in [t_0, T] \\ F(x), & t > T \end{cases}$$

Clairement, \tilde{F} vérifie les hypothèses de la Proposition 14 et (\tilde{F}, S) est ainsi faiblement invariant. Il existe donc une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}(x_0)$ qui reste dans S . Or cette trajectoire vérifie

$$\|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\| \leq L\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Comme $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$, on déduit par le Lemme de Gronwall l'égalité $\bar{x}(\cdot) = x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t_0, T]$. Ainsi on a $\bar{x}(t) \in S$ pour tout $t \in [t_0, T]$, et on peut re-itérer ce raisonnement sur tout intervalle $[kT, (k+1)T]$, $k = 1, \dots$.

\Rightarrow Soit $x_0 \in S$ et $v_0 \in F(x_0)$. Considérons une application $\tilde{f}(\cdot) : X \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{f}(x) \in \text{Proj}_{F(x)}(v_0)$ pour tout $x \in X$, et montrons que $\tilde{f}(\cdot)$ est nécessairement continue. Soit $R > 0$ et x_1, x_2 dans $X \cap \mathbb{B}(0, R)$. On écrit tout d'abord

$$\|\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1)\|^2 = \|\tilde{f}(x_2) - v_0\|^2 + \|v_0 - \tilde{f}(x_1)\|^2 + 2(\tilde{f}(x_2) - v_0) \cdot (v_0 - \tilde{f}(x_1))$$

Comme F est Lipschitz, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|\tilde{f}(x_2) - v_0\|^2 \leq \|\tilde{f}(x_1) - v_0\|^2 + L^2\|x_2 - x_1\|^2$$

et

$$(\tilde{f}(x_2) - v_0) \cdot (v_0 - \tilde{f}(x_1)) \leq L\|v_0 - \tilde{f}(x_1)\| \cdot \|x_2 - x_1\| - \|\tilde{f}(x_1) - v_0\|^2$$

Ainsi, on obtient l'inégalité :

$$\|\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1)\|^2 \leq L^2\|x_2 - x_1\|^2 + L\|v_0 - \tilde{f}(x_1)\| \cdot \|x_2 - x_1\|$$

de laquelle on déduit la convergence de $\|\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1)\|$ vers zero quand $\|x_2 - x_1\|$ tend vers zero, ce qui prouve la continuité de $\tilde{f}(\cdot)$. Soit la multi-application $\tilde{F} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\tilde{F}(x) = \{\tilde{f}(x)\}$. (S, \tilde{F}) est donc fortement invariant et également faiblement invariant. La Proposition 13 permet de conclure que l'on a $v_0 \cdot \xi \leq 0$ pour tout $\xi \in N_S^p(x_0)$ et ce raisonnement peut s'appliquer à tout $v_0 \in F(x_0)$. ■

4.4 Solutions proximales pour le problème de Mayer

On montre tout d'abord que la fonction valeur est semi-continue inférieurement.

Proposition 16. *Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction valeur du problème de Mayer est s.c.i. sur $(-\infty, T] \times X$.*

Preuve. Soit $(t_0, x_0) \in D_V$ et une suite $(t_0^n, x_0^n) \in D_V$ qui converge vers (t_0, x_0) telle que

$$\liminf_{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0)} V(t, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(t_0^n, x_0^n).$$

Soit $x_n(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0^n, T]}(x_0^n)$ tel que $\phi(x_n(T)) = V(t_0^n, x_0^n)$, et $u_n(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0^n, T]}$ une commande associée.

— Si $t_0^n > t_0$, on considère une solution $y_n(\cdot)$ de la dynamique

$$\dot{y} = -f(y, u_n(t)), \quad y(0) = x_0^n$$

sur l'intervalle $[0, t_0^n - t_0]$, et on définit

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} y_n(t_0^n - t) & \text{pour } t \in [t_0, t_0^n] \\ x_n(t) & \text{pour } t \in [t_0^n, T] \end{cases}$$

Clairement, on a $\tilde{x}_n(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(y_n(t_0^n - t_0))$.

— Si $t_0^n \leq t_0$, on pose $\tilde{x}_n(t) = x_n(t)$ pour $t \in [t_0, T]$.

Par l'hypothèse de croissance linéaire et grâce au Lemme de Gronwall, on peut écrire

$$\|\tilde{x}_n(t) - x_0^n\| \leq C(1 + \|x_0^n\|)|t - t_0|e^{C|t_0 - t_0^n|}$$

Ainsi la suite $\tilde{x}_n(t_0)$ converge vers x_0 quand n tend vers l'infini. Par le Théorème de compacité des trajectoires (Proposition 2), on peut extraire une sous-suite, à nouveau notée $\tilde{x}_n(\cdot)$, qui converge vers un certain $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. Comme ϕ est s.c.i., on a

$$\phi(\bar{x}(T)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(\tilde{x}_n(T)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(t_0^n, x_0^n)$$

Or $V(t_0, x_0) \leq \phi(\bar{x}(T))$ et on déduit ainsi

$$V(t_0, x_0) \leq \liminf_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} V(t, x)$$

d'où la semi-continuité de V . ■

Proposition 17. *Soit une paire (f, \mathbf{U}) qui vérifie les hypothèses 1 et 2, ϕ une fonction s.c.i. à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et un nombre T . La fonction valeur $V(\cdot)$ associée au problème de Mayer est l'unique fonction s.c.i de $]-\infty, T] \times \mathbf{X}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman proximale*

$$\theta + \bar{H}(x, \lambda) = 0, \quad \forall \begin{bmatrix} \theta \\ \lambda \end{bmatrix} \in \partial^p V(t, x), \quad \forall (t, x) \in D_V \quad (4.4)$$

et la condition terminale

$$\liminf_{t' \rightarrow T, x' \rightarrow x} V(t', x') = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (4.5)$$

Preuve. On considère la multi-application :

$$G : X = \begin{bmatrix} \tau \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} \{1\} \\ F(\xi) \\ \{0\} \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

Soit $(\bar{t}, \bar{x}) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$ tel que $V(\bar{t}, \bar{x}) < +\infty$ et un nombre $\bar{z} \geq V(\bar{t}, \bar{x})$. Alors, toute solution de l'inclusion différentielle $\dot{X} \in -G(X)$ pour la condition initiale

$$X(0) = \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

est telle que $\tilde{x}(s) = \xi(\bar{t} - s)$ est solution de l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$ pour tout $s < \bar{t}$ avec $\tilde{x}(\bar{t}) = \bar{x}$. Or, par le Lemme 1, on peut écrire :

$$\bar{z} \geq V(\bar{t}, \bar{x}) \geq V(s, \tilde{x}(s)), \quad \forall s \leq \bar{t}$$

ou de façon équivalente $X(t) \in \text{epi}(V)$ pour tout $t \geq 0$, et ceci pour tout $\bar{z} \geq V(\bar{t}, \bar{x})$, et tout (\bar{t}, \bar{x}) tel que $V(\bar{t}, \bar{x}) < +\infty$. Ainsi $(\text{epi}(V), -G)$ est fortement invariant. Comme V est s.c.i. (Proposition 16), $\text{epi}(V)$ est fermé et par la Proposition 15, on a donc

$$-\theta - \lambda \cdot v \leq 0, \quad \forall (\theta, \lambda^t)^t \in \partial^p V(t, x), \quad \forall v \in F(x)$$

soit

$$\theta + \bar{H}(x, \lambda) \geq 0, \quad \forall (\theta, \lambda^t)^t \in \partial^p V(t, x).$$

Soit une condition initiale $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$ telle que $V(t_0, x_0) < +\infty$ et une trajectoire optimale $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. Par le lemme 1, $t \mapsto V(t, x^*(t))$ est constant pour tout $t \in [t_0, T]$. Ainsi, $(\text{epi}(V), G)$ est faiblement invariant, d'où l'autre inégalité

$$\theta + \bar{H}(x, \lambda) \leq 0, \quad \forall (\theta, \lambda^t)^t \in \partial^p V(t, x).$$

Comme V est s.c.i., on a

$$\liminf_{t' \rightarrow T, x' \rightarrow x} V(t', x') \geq V(T, x) = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Soit $x \in \mathbf{X}$ tel que $\phi(x) < +\infty$. Comme $(\text{epi}(V), -G)$ est fortement invariant, il existe (t_0, x_0) et $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ tel que $\tilde{x}(T) = x$. Comme $t \mapsto V(t, \tilde{x}(t))$ est croissant (Lemme 1, on a $\liminf_{t \rightarrow T} V(t, \tilde{x}(t)) \leq V(T, \tilde{x}(T)) = \phi(x)$). Ainsi, on obtient l'autre inégalité $\liminf_{t' \rightarrow T, x' \rightarrow x} V(t', x') \leq \phi(x)$.

Soit une fonction s.c.i. W qui vérifie (4.4) et (4.5). Comme précédemment, on vérifie que $(\text{epi}(W), G)$ est faiblement invariant i.e. pour tout $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$, il existe une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ telle que $W(t_0, x_0) \geq W(t, x(t))$ pour tout $t \in [t_0, T]$. D'où

$$W(t_0, x_0) \geq \liminf_{t' \rightarrow T} W(t', x(t')) \geq \phi(x(T)) \geq V(t_0, x_0).$$

Soit $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$ une trajectoire telle que $\phi(x^*(T)) = V(t_0, x_0)$. Alors $X^*(t) = (T - t, x^*(T - t), V(t_0, x_0))^t$ est solution de l'inclusion différentielle $\dot{X} \in -G(X)$ pour $t \in [0, T - t_0]$. Comme précédemment, on vérifie que $(\text{epi}(W), -G)$ est fortement invariant et ainsi $X^*(T - t_0) \in \text{epi}(W)$ soit $W(t_0, x^*(t_0)) \leq V(t_0, x_0)$. Ainsi on a montré l'égalité $W(t_0, x_0) = V(t_0, x_0)$, et ceci pour tout $(t_0, x_0) \in (-\infty, T] \times \mathbf{X}$. ■

4.5 Application

On illustre l'usage de la Proposition 17 par l'exemple suivant.

Soit la dynamique sur $\mathbb{R} : \dot{x} = au + b$ avec $a > b > 0$ et $u \in \mathbf{U} = [-1, 1]$. Considérons le problème de Mayer pour $T = 1$ et $\phi(x) = -x^2$. L'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi s'écrit

$$V_t(t, x) - a|V_x(t, x)| + bV_x(t, x) = 0, \quad t < 1$$

avec la condition terminale $V(1, x) = -x^2$. Comme $\phi(\cdot)$ est Lipschitz, on sait que V est également Lipschitz par la Proposition 20 et par le Théorème de Rademacher V est presque partout différentiable.

Sous un sous-ensemble $D \subset (-\infty, 1] \times \mathbb{R}$ d'intérieur non vide tel que $\partial_x V(t, x)$ existe et est positif pour tout $(t, x) \in \text{int } D$, alors V vérifie

$$V_t(t, x) - (a - b)V_x(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in D.$$

On reconnaît une équation de transport "classique" dont les solutions C^1 vérifient $V(t, x) = V(t', x - (a - b)(t' - t))$. Ainsi

$$V^+(t, x) = -(x - (a - b)(1 - t))^2$$

est un candidate solution de l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi qui satisfait la condition terminale, mais la condition $\partial_x V(t, x) > 0$ n'est vérifiée que sur le domaine

$$D^+ = \{(t, x) \in (-\infty, 1] \times \mathbb{R} \text{ t.q. } x < (a - b)(1 - t)\}.$$

De même, on considère la fonction

$$V^-(t, x) = -(x + (a + b)(1 - t))^2$$

qui satisfait l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi et la condition terminale sur le domaine

$$D^- = \{(t, x) \in (-\infty, 1] \times \mathbb{R} \text{ t.q. } x > -(a + b)(1 - t)\}.$$

Ni V^+ , ni V^- ne peut être la fonction valeur puisqu'aucune ne satisfait l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi sur tout $(-\infty, 1] \times \mathbb{R}$. On constate néanmoins que les domaines D^+ et D^- sont tels que $\text{int } (D^+ \cap D^-) \neq \emptyset$ et $D^+ \cup D^- = (-\infty, 1] \times \mathbb{R}$. Il est alors naturel de considérer la fonction

$$W(t, x) = \begin{cases} V^-(t, x) & (t, x) \in D^- \setminus D^+ \\ \min(V^-(t, x), V^+(t, x)) & (t, x) \in D^- \cap D^+ \\ V^+(t, x) & (t, x) \in D^+ \setminus D^- \end{cases}$$

comme candidate fonction valeur. En effet, W vérifie la condition terminale et l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi en tout point où elle est différentiable. W n'est pas différentiable pour $(t, x) \in D^- \cap D^+$ tel que $V^+(t, x) = V^-(t, x)$ avec $(V_t^+(t, x), V_x^+(t, x)) \neq (V_t^-(t, x), V_x^-(t, x))$. En ces points on a $\partial^p W(t, x) = \emptyset$, et ainsi on peut conclure par la Proposition 17 que W est nécessairement la fonction valeur.

Considérons maintenant le même de problème de Mayer pour $\phi(x) = x^2$. De façon analogue, les fonctions

$$V^+(t, x) = (x - (a - b)(1 - t))^2, \quad V^-(t, x) = (x + (a + b)(1 - t))^2$$

vérifient l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi et la condition terminale sur les domaines respectifs

$$D^+ = \{(t, x) \in (-\infty, 1[\times \mathbb{R} \text{ t.q. } x > (a - b)(1 - t)\},$$

$$D^- = \{(t, x) \in (-\infty, 1[\times \mathbb{R} \text{ t.q. } x < -(a + b)(1 - t)\}.$$

On constate que les domaines D^+ et D^- sont tels que $D^+ \cap D^- = \emptyset$ (et donc ne recouvrent pas $(-\infty, 1[\times \mathbb{R})$ mais que V^+ et V^- s'annulent sur leurs frontières. Il est alors naturel de considérer la fonction

$$W(t, x) = \begin{cases} V^-(t, x) & (t, x) \in D^- \\ V^+(t, x) & (t, x) \in D^+ \\ 0 & (t, x) \notin D^- \cup D^+ \end{cases}$$

comme candidate fonction valeur. W vérifie la condition terminale, et ses lieux de non différentiables sont les frontières des domaines D^+ , D^- c'est à dire les demi-droites $x = (a - b)(1 - t)$ ($t < 1$) et $x = -(a + b)(1 - t)$ ($t < 1$). Remarquons qu'en ces points on a $W(t, x) = \max(0, V^+(t, x))$, $\partial^p W(t, x) = [0, 1](V_t^+(t, x), V_x^+(t, x))^t$ et $W(t, x) = \max(0, V^-(t, x))$, $\partial^p W(t, x) = [0, 1](V_t^-(t, x), V_x^-(t, x))^t$, respectivement. Ainsi, l'équation d'Hamilton-Bellman-Jacobi est vérifiée au sens proximal, ce qui permet de conclure par la Proposition 17 que W est bien la fonction valeur du problème.

4.6 Solutions proximales pour le temps mimum

On montre tout d'abord que la fonction valeur est semi-continue inférieurement.

Proposition 18. *Soit \mathcal{C} un fermé de X . Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction valeur V du problème de temps minimum est s.c.i., et pour tout $x_0 \in D_V$ il existe une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, V(x_0)]}(x_0)$ dont le temps d'atteinte à la cible est $V(t_0)$.*

Preuve. Soit $x_0 \in X \setminus \mathcal{C}$ tel que $V(x_0) < +\infty$. On pose $T = V(x_0)$. Soit $x_n(\cdot)$ une suite de trajectoires dans $\mathcal{S}_{[0, +\infty)}(x_0)$ telle que $T_n = T_{\mathcal{C}}(x_n(\cdot))$ converge vers T . Par le Lemme de Gronwall et l'hypothèse de croissance au plus linéaire, la suite $x_n(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$, ainsi que $\dot{x}_n(\cdot)$, mettons par $M > 0$. Par le Théorème de compacité des trajectoires (Proposition 2), on déduit l'existence d'une sous-suite qui converge sur $[0, T]$ vers $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x_0)$. Pour $\eta > 0$, soit $\bar{t} \in]T - \eta/M, T[$ tel que $\|x(T) - x(\bar{t})\| < \eta/3$. Pour n assez grand, on a également $\bar{t} > T_n - \eta/M$ et $\|x(\bar{t}) - x_n(\bar{t})\| < \eta/3$. Comme $x_n(T_n)$ appartient à \mathcal{C} , on peut écrire

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(x(T)) &\leq \|x(T) - x_n(T_n)\| \\ &\leq \|x(T) - x(\bar{t})\| + \|x(\bar{t}) - x_n(\bar{t})\| + \|x_n(\bar{t}) - x_n(T_n)\| \\ &\leq 2\eta/3 + \int_{\bar{t}}^T \|\dot{x}_n(\tau)\| d\tau \leq 2\eta/3 + (T - \bar{t})M \leq \eta \end{aligned}$$

et ceci pour tout $\eta > 0$. Ainsi $x(T) \in \mathcal{C}$ i.e. $T_{\mathcal{C}}(x(\cdot)) = T = V(x_0)$.

Soit une suite x_0^n qui converge vers x_0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_0^n) = \bar{T} = \liminf_{x \rightarrow x_0} V(x) < +\infty.$$

et $x_n(\cdot)$ dans $\mathcal{S}_{[0, +\infty)}(x_0^n)$ telle que $T_n = T_{\mathcal{C}}(x_n(\cdot)) = V(x_0^n)$ qui converge vers \bar{T} . Avec les mêmes arguments que précédemment, en utilisant le Théorème de compacité des trajectoires approchées (Proposition

10) on montre l'existence d'une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, \bar{T}]}(x_0)$ telle que $x(\bar{T}) \in \mathcal{C}$. Ainsi $V(x_0) \leq \bar{T}$, d'où la semi-continuité de V . ■

De façon analogue au problème de Mayer, on obtient une caractérisation de la fonction valeur (cf [4]).

Proposition 19. *Soit une paire (f, \mathbf{U}) qui vérifie les hypothèses 1 et 2 et \mathcal{C} un fermé de \mathbf{X} . La fonction valeur $V(\cdot)$ du problème temps minimum est l'unique fonction s.c.i bornée inférieurement qui vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman proximale*

$$1 + \bar{H}(x, \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \partial^p V(x), \quad \forall x \in D_V \cap (\mathbf{X} \setminus \mathcal{C}) \quad (4.6)$$

et la condition terminale

$$V(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 1 + \bar{H}(x, \lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \partial^p V(x), \quad \forall x \in \partial \mathcal{C} . \quad (4.7)$$

Chapitre 5

Fonctions valeur continues

5.1 Problème de Mayer

Proposition 20. *Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction valeur du problème de Mayer est Lipschitz continue sur $(-\infty, T] \times X$ dès lors que ϕ est Lipschitz continue sur X .*

Preuve.

Soit une condition initiale (t_0, x_0) dans $(-\infty, T) \times X$ et $x(\cdot)$ une solution optimale dans $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(x_0)$. Considérons une autre condition initiale (t'_0, x'_0) dans $(-\infty, T) \times X$ avec $t'_0 > t_0$. On peut écrire

$$|V(t_0, x_0) - V(t'_0, x'_0)| \leq |V(t_0, x_0) - V(t'_0, x(t'_0))| + |V(t'_0, x(t'_0)) - V(t'_0, x'_0)|$$

où le terme $|V(t_0, x_0) - V(t'_0, x(t'_0))|$ est nul par le Principe de la Programmation Dynamique. Soit une commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[t_0, T]}$ qui réalise l'optimum i.e. telle que $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ pour presque tout $t \in [t_0, T]$. Considérons pour cette même commande $u(\cdot)$ la solution $y(\cdot) = x_{t'_0, x'_0, u(\cdot)}(\cdot)$ dans $\mathcal{S}_{[t'_0, T]}(x'_0)$. L'application du Lemme de Gronwall donne l'existence d'un nombre $L > 0$ tel que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t'_0) - x'_0\| e^{L(T-t'_0)}, \quad \forall t \in [t'_0, T].$$

D'autre part, ϕ étant Lipschitzienne, il existe un nombre $K > 0$ tel que

$$V(t'_0, x'_0) \leq \phi(y(T)) \leq \phi(x(T)) + K\|x(T) - y(T)\|,$$

d'où l'inégalité

$$V(t'_0, x'_0) \leq V(t'_0, x(t'_0)) + K\|x(t'_0) - x'_0\| e^{L(T-t'_0)}.$$

où le terme $\|x(t'_0) - x'_0\|$ est majoré par $\|x(t'_0) - x_0\| + \|x_0 - x'_0\|$. D'autre part, l'hypothèse de croissance au plus linéaire et le Lemme de Gronwall permettent d'écrire l'estimation suivante

$$\|x(t'_0) - x_0\| \leq C(1 + \|x_0\|) e^{C(t'_0 - t_0)} (t'_0 - t_0).$$

Ainsi, on obtient

$$V(t'_0, x'_0) - V(t_0, x_0) \leq K\|x_0 - x'_0\| e^{L(T-t'_0)} + KC(1 + \|x_0\|) e^{L(T-t'_0) + C(t'_0 - t_0)} (t'_0 - t_0)$$

et on procède de même en échangeant (t_0, x_0) et (t'_0, x'_0) , ce qui permet de conclure sur la propriété de Lipschitz continuité satisfaite par la fonction valeur. ■

5.2 Temps minimum

Soit \mathcal{C} un fermé de X et V la fonction valeur associée au problème de temps minimum pour une paire (f, U) .

Définition 7. On définit l'ensemble atteignable à l'instant t

$$\mathcal{R}(t) := \{x \in \mathsf{X}, V(x) < t\}$$

et l'ensemble atteignable

$$\mathcal{R} := \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t) .$$

Définition 8. Une paire (f, U) est contrôlable en petit temps sur \mathcal{C} (CPT- \mathcal{C}) si

$$\mathcal{C} \subseteq \text{int } \mathcal{R}(t), \forall t > 0 .$$

Hypothèse 6. \mathcal{C} est fermé et sa frontière $\partial\mathcal{C}$ est compacte.

Soit un sous-ensemble E de X , note $\text{dist}_E(\cdot)$ la distance euclidienne à E , et pour tout nombre $r \geq 0$ $\mathbb{B}(E, r)$ désigne l'ensemble r -dilaté de E dans X :

$$\mathbb{B}(E, r) = \{x \in \mathsf{X} \mid \text{dist}_E(x) \leq r\} .$$

Lemme 3. Sous les hypothèses 1, 2 et 6, les trois assertions sont équivalentes

- i. (f, U) est CPT- \mathcal{C}
- ii. V est continue sur $\partial\mathcal{C}$
- iii. il existe un nombre $\delta > 0$ et une application $\omega : [0, \delta] \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{d \rightarrow 0} \omega(d) = 0$ et $V(x) \leq \omega(\text{dist}_{\mathcal{C}}(x))$ pour tout $x \in \mathbb{B}(\mathcal{C}, \delta)$.

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii). Soit $\epsilon > 0$. On a $\mathcal{C} \subset \text{int } \mathcal{R}(\epsilon)$. Ainsi pour tout $x \in \partial\mathcal{C}$, il existe un voisinage $\mathbb{B}(x, \eta)$ de x vérifiant $\mathbb{B}(x, \eta) \subseteq \mathcal{R}(\epsilon)$, ce qui revient à écrire $V(y) < \epsilon$ pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \eta)$, d'où la continuité de V sur la frontière $\partial\mathcal{C}$.

(ii) \Rightarrow (iii). Posons

$$\omega(d) = \sup \{V(x) \mid \text{dist}_{\mathcal{C}}(x) \leq d\} .$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in \partial\mathcal{C}$, il existe un nombre $\delta(x) > 0$ tel que $y \in \mathbb{B}(x, \delta(x)) \Rightarrow V(y) < \epsilon$ (par continuité de V sur $\partial\mathcal{C}$). D'autre part, $\partial\mathcal{C}$ étant compact, il existe un recouvrement fini d'ouverts vérifiant

$$\partial\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathbb{B}(x_i, \delta(x_i)/2), \quad x_i \in \partial\mathcal{C} .$$

En posant $\delta = \min_i \delta(x_i)/2$, on obtient la propriété

$$0 < \text{dist}_{\mathcal{C}}(x) < \delta \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^N \mathbb{B}(x_i, \delta(x_i))$$

et donc

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(x) < \delta \Rightarrow V(x) < \epsilon \Rightarrow \omega(d) \leq \epsilon, \forall d < \delta$$

Ainsi on a $\omega(d) \rightarrow 0$ lorsque $d \rightarrow 0$.

(iii) \Rightarrow (i). Soient $t > 0$ et $d \in]0, \delta]$ tel que $\omega(d) < t$. On a ainsi $V(x) < t$ dès que $\text{dist}_{\mathcal{C}}(x) < d$ soit $\mathbb{B}(\mathcal{C}, d) \subseteq \mathcal{R}(t)$, d'où la propriété CPT- \mathcal{C} . ■

Remarque. Lorsque la fonction $\omega(\cdot)$ est linéaire, alors la fonction V est Lipschitz continue sur $\mathbb{B}(\mathcal{C}, \delta)$.

Proposition 21. Sous les hypothèses 1, 2 et 6, si la paire (f, U) est CPT- \mathcal{C} , alors les propriétés suivantes sont vérifiées

- i. \mathcal{R} est ouvert

ii. V est continue sur \mathcal{R}

iii. $\lim_{x \in \mathcal{R} \rightarrow \partial \mathcal{R}} V(x) = +\infty$

Preuve. Pour $x_0 \in \mathcal{R}$ et $\epsilon > 0$ il existe une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,+\infty)}(x_0)$ telle que

$$T = T_{\mathcal{C}}(x(\cdot)) \leq V(x_0) + \epsilon \quad (5.1)$$

et une commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[0,T]}$ telle que $x(\cdot) = x_{0,x_0,u(\cdot)}(\cdot)$ sur $[0, T]$. Soit une autre condition initiale x'_0 et $x'(\cdot) = x_{0,x'_0,u(\cdot)}(\cdot)$ définie sur $[0, T]$. Par le Principe de Programmation dynamique, on a l'inégalité

$$V(x'_0) \leq T + V(x'(T))$$

et par le Lemme de Gronwall

$$\|x'(T) - x(T)\| \leq \|x'_0 - x_0\| e^{LT}.$$

Soit $\eta = \delta e^{-LT}$, où le nombre $\delta > 0$ est donné par la propriété iii. du Lemme 3. On a

$$\|x'_0 - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \text{dist}_{\mathcal{C}}(x'(T)) \leq \delta$$

Par cette même propriété iii du Lemme 3, on obtient l'inégalité

$$V(x'(T)) \leq \omega(\text{dist}_{\mathcal{C}}(x'(T)))$$

d'où la propriété

$$\|x'_0 - x_0\| \leq \eta \Rightarrow V(x'_0) \leq T + \omega(\text{dist}_{\mathcal{C}}(x'(T))) \quad (5.2)$$

et on conclut donc que x'_0 appartient à \mathcal{R} , ce qui montre (i).

Les inégalités (5.1) et (5.2) permettent également d'écrire

$$V(x'_0) \leq V(x_0) + \omega\left(\|x'_0 - x_0\| e^{L(V(x_0) + \epsilon)}\right) + \epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0$ et en échangeant les rôles de x_0 et x'_0 , on obtient

$$|V(x'_0) - V(x_0)| \leq \omega\left(\|x'_0 - x_0\| e^{L \max(V(x'_0), V(x_0))}\right)$$

d'où la continuité de V sur \mathcal{R} , ce qui prouve (ii).

Finalement, on montre (iii) par l'absurde. Soit une suite $x_{0,n} \in \mathcal{R}$ telle que $\|x_{0,n} - x_0\| < 1/n$ avec $x_0 \in \partial \mathcal{R}$ vérifiant $V(x_{0,n}) \leq M < +\infty$ pour tout n . On considère alors un entier $N > e^{LM}/\delta$ (où $\delta > 0$ est donné par la propriété iii. du Lemme 3) et une commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{[0,M]}$ telle que la solution $x_N(\cdot) = x_{0,x_{0,N},u(\cdot)}(\cdot)$ vérifie

$$T = T_{\mathcal{C}}(x_N(\cdot)) \leq V(x_{0,N}) + \epsilon$$

ce qui permet d'obtenir, comme précédemment, l'inégalité

$$V(x_0) \leq T + \omega(\delta)$$

d'où une contradiction avec l'appartenance de x_0 à la frontière de l'ouvert \mathcal{R} . ■

Nous donnons ci-dessous une condition géométrique sur la frontière de la cible garantissant la continuité de la fonction valeur.

Hypothèse 7. \mathcal{C} est fermé et d'intérieur non vide. Sa frontière $\partial \mathcal{C}$ est une variété compacte C^2 .

Sous cette hypothèse on considère la distance orientée à \mathcal{C}

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x) = \begin{cases} \text{dist}_{\mathcal{C}}(x) & \text{si } x \notin \mathcal{C} \\ -\text{dist}_{\partial\mathcal{C}}(x) & \text{si } x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

et on définit la normale extérieure :

$$n_{\mathcal{C}}(x) = \nabla \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x), \quad x \in \partial\mathcal{C}.$$

Proposition 22. *Sous les hypothèses 1, 2, 7 et la condition de Petrov*

$$\bar{H}(x, n_{\mathcal{C}}(x)) < 0, \quad \forall x \in \partial\mathcal{C}$$

la fonction valeur du problème de temps minimum dans X est continue sur \mathcal{R} , et Lipschitz dans un voisinage de la cible.

Preuve. Soit $x_0 \in \partial\mathcal{C}$. Les applications f et $n_{\mathcal{C}}$ étant continues, considérons $\bar{u} \in \mathsf{U}$ et des nombres positifs ϵ et η vérifiant

$$f(x, \bar{u}) \cdot n_{\mathcal{C}}(x) < -\epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \eta).$$

Désignons par $y_x(\cdot)$ la solution de $\dot{y} = f(y, \bar{u})$ pour une condition initiale $y(0) = x \in \mathbb{B}(x_0, \eta)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(y_x(t)) &= \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x) + \int_0^t f(y_x(\tau), \bar{u}) \cdot \nabla \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(y_x(\tau)) d\tau \\ &= \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x) + t f(x, \bar{u}) \cdot n_{\mathcal{C}}(x) + \int_0^t r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de croissance au plus linéaire et le Lemme de Gronwall, on a

$$\|y_x(t) - x\| \leq C(1 + \|x\|)te^{Ct}, \quad \forall t > 0.$$

La variété $\partial\mathcal{C}$ étant compacte, il existe ainsi des nombres positifs \bar{t} et M tels que

$$\|y_x(t) - x\| \leq Mt \quad \forall x \in \partial\mathcal{C}, \forall t \in [0, \bar{t}].$$

En utilisant la propriété de Lipschitz continuité de f en x , et $\|\nabla \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(\cdot)\| \leq 1$, on obtient $\|r(t)\| \leq LMt$ pour $t \in [0, \bar{t}]$, d'où l'inégalité

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}^o(y_x(t)) < \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x) - \epsilon t + LM \frac{t^2}{2}, \quad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

ou encore

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}^o(y_x(t)) < \text{dist}_{\mathcal{C}}^o(x) - \frac{\epsilon}{2}t, \quad \forall t \in [0, \tilde{t}],$$

en posant $\tilde{t} = \min(\bar{t}, \epsilon/(LM))$. Ainsi, lorsque $x \notin \text{int } \mathcal{C}$ avec $\text{dist}_{\mathcal{C}}(x) < \tilde{t}/2$, on a $y_x(t) \in \mathcal{C}$ pour $t = 2\text{dist}_{\mathcal{C}}(x)/\epsilon$, et on obtient l'inégalité

$$V(x) \leq a(x_0)\text{dist}_{\mathcal{C}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \rho(x_0)) \setminus \text{int } \mathcal{C}$$

où $a(x_0) = 2/\epsilon$ et $\rho(x_0) = \min(\eta, \tilde{t}/2)$.

La variété $\partial\mathcal{C}$ étant compacte, il existe un recouvrement fini d'ouverts vérifiant

$$\partial\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathbb{B}(x_i, \rho(x_i)/2), \quad x_i \in \partial\mathcal{C}.$$

En posant $\bar{a} = \min_i a(x_i)$ et $\bar{\rho} = \min_i \rho(x_i)/2$, on a

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(x) < \bar{\rho} \Rightarrow V(x) \leq \bar{a} \cdot \text{dist}_{\mathcal{C}}(x).$$

Par le Lemme 3, la paire (f, U) est CPT- \mathcal{C} pour $\omega(d) = \bar{a}d$, et par la Proposition 21 on conclut que V est continue. Comme la fonction $\omega(\cdot)$ est linéaire, V est Lipschitz continue dans un voisinage de la cible.

■

De façon analogue, on obtient le résultat suivant pour une cible ponctuelle (cf [1]).

Proposition 23. *Soit une cible $\mathcal{C} = \{x_c\}$, où $x_c \in \text{int } X$. Sous les hypothèses 1, 2, et la condition de Petrov*

$$\bar{H}(x, \xi) < 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

la fonction valeur du problème de temps minimum dans X est continue sur \mathcal{R} , et Lipschitz dans un voisinage de la cible.

Références

- [1] BARDI, M. AND CAPUZZO-DOLCETTA, I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. *Birkhäuser*, 1997.
- [2] BRESSAN, A. AND PICCOLI, B. Introduction to the Mathematical Theory of Control. *American Institute of Mathematical Sciences*, 2007.
- [3] CLARKE, F. H. ; LEDYAEV, YU. S. ; STERN, R. J. AND WOLENSKI, P. R. Nonsmooth analysis and control theory. *Springer-Verlag*, Graduate Texts in Mathematics, 1998.
- [4] WOLENSKI, P. R. AND ZHUANG, Y. Proximal analysis and the minimal time function. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 36 (3), pp. 1048–1072, 1998.