

# Commande optimale: approches analytiques et géométriques

Intervenants : Térence Bayen (I3M), Alain Rapaport (INRA-Supagro)  
([tbayen@math.univ-montp2.fr](mailto:tbayen@math.univ-montp2.fr), [rapaport@supagro.inra.fr](mailto:rapaport@supagro.inra.fr))

## Résumé

Ce cours a pour objectif de présenter certains aspects de la théorie du contrôle en lien notamment avec les thèmes suivants : optimisation non-lisse, géométrie différentielle, équations aux dérivées partielles, analyse numérique. Il prépare les étudiants à des sujets potentiels de stages sur les aspects théoriques de la commande optimale ou bien sur des applications mettant en oeuvre la théorie du contrôle.

Le premier aspect fondamental que le cours se propose d'étudier concerne les questions d'existence d'un contrôle optimal et le lien entre un problème de contrôle et une inclusion différentielle (Théorème de Filipov), voir par exemple les références [4, 5, 7]. Le cours se propose également d'aborder quelques résultats concernant la contrôlabilité d'un système à l'aide des crochets de Lie (Théorème de Chow) et de voir les liens avec les problèmes sous-Riemannien, voir par exemple [9, 8].

On développera ensuite le *Principe du Maximum de Pontryagin* [11], qui est central en théorie du contrôle optimal. Il fournit les "politiques" optimales permettant de conduire un système dynamique contrôlé optimalement vers sa cible. On pourra se baser sur [2, 4, 11] pour effectuer une preuve de ce principe. La présentation de ce principe sera également l'occasion de faire le lien avec la théorie du calcul des variations ( quation d'Euler-Lagrange, condition d'Erdmann-Weierstrass et condition de Legendre).

Plusieurs exemples de synthèse optimale seront développés en lien avec des problèmes de mécaniques ou de dynamique des populations [9, 12, 11, 4, 7]. On évoquera la notion d'arc singulier (voir [12]) qui est fondamentale pour les systèmes affines en la commande (situation usuelle en mécanique par exemple).

La seconde classe de méthode que l'on se propose de développer pour l'étude d'un problème de contrôle optimal est l'* quation d'Hamilton-Jacobi*. On s'intéressera aux questions d'existence et d'unicité de solution de cette équation aux dérivées partielles (EDP) au sens des viscosités, ainsi qu'à des propriétés de ces solutions [2, 1]. On examinera également le lien entre cette EDP et le principe du maximum de Pontryagin à l'aide de la fonction valeur.

Enfin, on évoquera également certains problèmes d'analyse numérique couramment rencontrés en contrôle optimal. En effet, l'application du principe du maximum de Pontryagin conduit à un problème aux deux bouts que l'on peut étudier numériquement à l'aide de *méthodes de tir*. Par ailleurs, certaines méthodes de régularisation ont fait l'objet de contributions récentes, et permettent un calcul approché d'un contrôle optimal.

Ce module se veut "dynamique" au sens où d'autres aspects pourraient être traités certaines années (problèmes d'observabilité [10], étude des problèmes de jeux différentiels à somme nulle, problèmes de commande robuste, résolution numérique de l'équation d'Hamilton-Jacobi).

## Références

- [1] M. BARDI, I. CAPUZZO-DOLCETTA, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Modern Birkhäuser Classics, 1997.
- [2] G. BARLES, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer, 1994.
- [3] J. F. BONNANS, *Lectures Notes in Optimal Control*, <http://www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans>
- [4] J.F. BONNANS, P. ROUCHON, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*. Editions de l' cole Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- [5] A. BRESSAN, B. PICCOLI, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, Amer. Inst. of Mathematical Sciences, 2007.

- [6] L. CESARI, *Optimization-Theory and Applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer, 1983.
- [7] F. CLARKE, Y. S. LEDYAEV, R. J. STERN, P. R. WOLENSKI *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, 1997.
- [8] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Les mathématiques du mieux faire, vol. 2, la commande optimale pour les débutants*, ellipses, 2010.
- [9] V. JURDJEVIC *Geometric Control Theory*, vol. 51 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [10] E.B. LEE, L. MARKUS, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
- [11] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKIY, R.V. GAMKRELIDZE, E.F. MISHCHENKO, *Mathematical theory of optimal processes*, The Macmillan Company, 1964.
- [12] H. SCHATTLER, U. LEDZEWICZ, *Geometric Optimal Control*, Springer 2012.
- [13] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1998.
- [14] E. TRELAT, *Contrôle Optimal, Théorie et Applications*, Vuibert, Collection “Mathématiques Concrètes”, 2005.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la théorie du contrôle optimal</b>	<b>4</b>
1.1	Quelques généralités . . . . .	4
1.2	Lien avec le calcul des variations . . . . .	4
1.3	Exemples . . . . .	5
1.4	Solution au sens de Carathéodory . . . . .	6
1.5	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	7
1.6	Systèmes linéaires et condition de Kalman . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Existence d'un contrôle optimal</b>	<b>9</b>
2.1	Multi-fonctions . . . . .	9
2.2	Inclusions différentielles . . . . .	9
2.3	Propriétés des ensembles accessibles . . . . .	11
2.4	Théorème de Fillipov . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Principe du maximum de Pontryagin</b>	<b>12</b>
3.1	Hypothèses sur le système . . . . .	12
3.2	Estimation $L^\infty$ de l'état . . . . .	13
3.3	Définition de l'état adjoint . . . . .	13
3.4	Preuve du PMP . . . . .	14
3.5	PMP avec contraintes sur l'état initial et final . . . . .	16
3.6	Principe du maximum de Pontryagin avec temps libre . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Exemples d'application du PMP</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Appendice (autres exemples d'application du principe de Pontryagin)</b>	<b>20</b>
5.1	Etude du problème de Zermelo . . . . .	20
5.2	Principe bang-bang pour les systèmes linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ . . . . .	22

# 1 Introduction à la théorie du contrôle optimal

## 1.1 Quelques généralités

Un système contrôlé est un système d'équations différentielles dépendant d'un paramètre  $u$  (i.e. une fonction  $u(\cdot)$ ) :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I$$

où  $I$  est un intervalle,  $u$  est une fonction mesurable prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la dynamique. Ici  $t \in \mathbb{R}$  désigne le temps,  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système,  $u$  désigne le contrôle.

Lorsque  $f$  ne dépend pas de  $t$ , on dit que le système est autonome. On parle en général de système contrôlé, système dynamique contrôlé (lorsque  $f$  ne dépend pas de  $t$ ). En général on cherche un contrôle  $u$  en *boucle ouverte* i.e.  $u = u(t)$  dépend du temps ou bien en *boucle fermée* i.e.  $u = u(t, x)$ . Dans ce dernier cas, on dit que le contrôle  $u$  est un *feedback* ou bien un *contrôle par retour d'état*. En général, un feedback est plus robuste en présence de perturbations.

Typiquement, le contrôle  $u$  est assujéti à prendre ses valeurs dans un ensemble de contrôle admissible noté  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ mesurable}\},$$

où  $T > 0$  est donné (on considère le système contrôlé sur  $[0, T]$ ). Il est naturel d'introduire cette classe de contrôles pour diverses raisons (cas de contrôles discontinus, preuves d'existence d'un contrôle optimal dans cette classe...). On se donne deux sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{R}^n$ ,  $M_0$  et  $M_1$ , une application  $\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , et enfin une application  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Un problème de contrôle optimal peut se formuler de la manière suivante :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(t, x_u(t), u(t)) dt + \phi(x_u(T)),$$

où  $x_u$  est une solution du système contrôlé associée au contrôle  $u$  telle que  $x_u(0) \in M_0$  et  $x_u(T) \in M_1$ . En général,  $\ell$  s'appelle le *lagrangien* et  $\phi$  le coût terminal (payoff terminal). Un tel problème s'appelle problème de Bolza. Lorsque  $\phi = 0$  uniquement, on parle de problème de Lagrange, lorsque  $\ell = 0$  uniquement, on parle de problème de Mayer. Au vu du problème ci-dessus se posent plusieurs questions naturelles :

1. Existence d'une solution  $x_u$  qui relie  $M_0$  à  $M_1$
2. Existence d'un contrôle optimal  $u^*$  i.e. le problème de minimisation admet une solution  $u^*$  dans  $\mathcal{U}$ .
3. Caractérisation d'un contrôle optimal.

Le point 1 nécessite de définir tout d'abord une solution du système différentiel contrôlé pour des fonctions dépendant du temps de façon mesurable (le contrôle  $u$  est en général continue par morceaux) et de rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par ailleurs, une fois une solution  $x_u$  définie, se pose la question de relier  $M_0$  à  $M_1$  (problème de *contrôlabilité*). Nous n'aborderons pas ce point dans le cours. Le point 2 nécessite de donner des hypothèses standards sur le système pour qu'il existe une solution du problème de contrôle optimal. Enfin, le principe du maximum de Pontryagin permettra de donner des conditions nécessaires d'optimalité (non suffisantes en général) sur un contrôle optimal. Nous n'aborderons pas l'équation d'Hamilton-Jacobi fournissant un certificat de validité d'un contrôle optimal.

## 1.2 Lien avec le calcul des variations

On peut voir le contrôle optimal comme une extension du calcul des variations où un problème type est le suivant :

$$\inf_{x \in W^{1,1}([a,b], \mathbb{R}^n)} \int_a^b \ell(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

où  $x$  satisfait deux conditions au bord  $x(a) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $x(b) = x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Un tel problème se réécrit sous la forme

$$\inf_{u(\cdot)} \int_a^b \ell(t, x(t), u(t)) dt,$$

où  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $x(a) = x_0$ ,  $x(b) = x_1$ , et  $u(\cdot)$  est un contrôle. Ainsi, dans le cas du contrôle optimal on suppose donc que la vitesse  $\dot{x}(t)$  est assujéti à prendre ses valeurs dans l'ensemble des vitesses augmentées  $\{f(t, x(t), \omega) ; \omega \in U\}$  alors que pour le problème de calcul des variations ci-dessus, aucune contrainte n'est imposée sur la vitesse.

En calcul des variations, on dérive l'équation d'Euler-Lagrange qui fournit une condition nécessaire d'ordre 1 sur un minimum local. Soit  $x(\cdot) \in W^{1,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$  un minimum local pour le problème ci-dessus. Alors on a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

On dérive également des conditions nécessaires et suffisantes d'ordre 1 et 2 pour des *minimum faibles* (au sens de la topologie des applications de classe  $C^1$ ) et *minimum forts* (au sens de la topologie uniforme). Le principe du maximum de Pontryagin fournit une extension de ces conditions d'optimalité au cas d'un problème de contrôle optimal. Ainsi on ne rappellera pas les résultats en calcul des variations, mais on étudiera le cas plus général du contrôle optimal.

### 1.3 Exemples

Voici quelques exemples de problèmes de contrôle optimal que l'on ne développera pas ici.

**Exemple (i).** Problème du temps minimal pour rejoindre une cible donnée (ici  $M_1$ ) depuis un ensemble de départ (ici  $M_0$ ) :

$$\inf_u t(u) \text{ t.q. } x_u(0) \in M_0, x_u(t(u)) \in M_1$$

**Exemple (ii).** Double intégrateur : temps minimal pour rejoindre l'origine (chauffard homicide) :

$$\inf_u t(u) \text{ t.q. } x_u(0) = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2, x_u(t(u)) = (0, 0), \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}, |u| \leq 1.$$

**Exemple (iii).** Problème de Zermelo (problème de contrôlabilité) : le nageur peut-il rejoindre l'île. Soit  $T > 0$ ,  $v > 0$  fixé et  $U := \{v \in \mathbb{R}^2 ; v_1^2 + v_2^2 \leq v^2\}$ . L'ensemble des contrôles admissibles est  $\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U\}$ . Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda(1 - x_2^2) + \varepsilon u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

Etant donné un point initial  $I := (\alpha, -1)$  sur une des deux rives ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), le nageur peut-il rejoindre une île située en  $(0, 0)$ , et si oui comment ? Ici le paramètre  $\lambda$  mesure la vitesse du courant et  $\varepsilon > 0$  est un paramètre pour moduler la vitesse du nageur.

**Exemple (iv).** On considère le système proie-prédateur contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - m_1 - \alpha_1 u), \\ \dot{x}_2 = x_2(-x_1 + n_2 - u), \end{cases}$$

où les coefficients  $m_1$ ,  $\alpha_1$ , et  $n_2$  sont strictement positifs. Ici  $x_1$ , resp.  $x_2$  représente le nombre de prédateurs, resp. le nombre de proies. La variable de contrôle  $u \geq 0$  représente la proportion de proies que l'on peut tuer (on peut agir sur le système pour diminuer les proies). On se donne un horizon  $T > 0$ , et on cherche un contrôle  $u$  qui minimise la fonctionnelle de coût suivante :

$$\inf_u \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt,$$

où  $x_u = (x_1, x_2)$  est la solution du système associé au contrôle  $u$  et  $K := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* ; x_2 \geq \rho\}$  avec  $\rho > 0$  fixé, et  $\mathbb{1}_{K^c}$  désigne l'indicatrice probabiliste de  $K^c$  i.e.  $\mathbb{1}_{K^c}(x) = 1$  si  $x \notin K$  et  $\mathbb{1}_{K^c}(x) = 0$  si  $x \in K$ .

On souhaite donc synthétiser une loi de commande  $u$  de telle manière à maintenir le nombre de moutons au-dessus d'un certain seuil donné.

**Exemple (v).** Modèle de la voiture (Dubin ou Reed and Shep, voir par exemple [1, 10]). On considère le système différentiel contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases}$$

où  $(x, y)$  représente le centre de gravité d'un mobile,  $\theta$  l'angle du vecteur vitesse par rapport à l'axe des abscisses, le contrôle  $u_1(\cdot) \in [v_{min}, v_{max}]$  la vitesse linéaire, et le contrôle  $u_2(\cdot) \in [-\omega, \omega]$  la vitesse angulaire (volant). Typiquement, on cherche à minimiser une combinaison entre le temps  $t(u_1, u_2)$  pour relier un point initial à un point cible, et la consommation d'énergie :

$$\inf_{u=(u_1, u_2)} \int_0^{t(u_1, u_2)} u_1^2 + u_2^2,$$

**Exemple (vi).** On considère le système :

$$\dot{x} = x(f + ug), |u| \leq 1,$$

où  $x \in SO(3)$  et les champs de vecteurs  $f, g \in so(3)$  sont fixés. Le but est de trouver un contrôle  $u$  reliant une matrice  $x_1 \in SO(3)$  donnée à une autre matrice  $x_2 \in SO(3)$  donnée en temps minimal, voir par exemple [3].

**Exemple (vii).** Contrôle d'un satellite, voir [9]. Un satellite en orbite autour de la terre peut être décrit par le système suivant :

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}, \quad \dot{m} = -\beta |F|$$

où  $q \in \mathbb{R}^3$  est la position,  $r = |q|$ , et  $F = (u_1, u_2, u_3)$  est la poussée poussée,  $|F| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  et  $m$  la masse du satellite au cours du temps. La poussée prend ses valeurs dans l'ensemble suivant :  $\mathcal{U} := \{u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 ; |F| \leq F_{max}\}$ . Les paramètres  $\mu, \beta$  et  $F_{max}$  sont strictement positifs. On s'intéresse à déterminer un contrôle  $u$  et un temps  $t(u)$  pour lequel le critère

$$E(u) := \int_0^{t(u)} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt$$

est minimal.

## 1.4 Solution au sens de Carathéodory

Etant donnée un système dynamique contrôlé  $\dot{x} = g(t, x, u)$ , et un contrôle  $t \mapsto u(t)$  mesurable par rapport à  $t$ , définissons une fonction  $f$  par  $f(t, x) := g(t, x, u(t))$ . La dépendance de  $f$  par rapport au temps est mesurable. On a donc recours à la définition d'une équation différentielle ordinaire au sens de Carathéodory.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.
- pour tout  $x \in U$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue.

**Définition 1.1.** On appelle solution de

$$\dot{x} = f(t, x)$$

tout couple  $(J, x(\cdot))$  où  $J = [t_0, t_1]$  est un intervalle  $I$ , et  $x$  est une fonction absolument continue sur  $J$  telle que :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Autrement dit, l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  est vérifiée pour presque tout  $t$  sur  $J$ . Voir par exemple [6] pour quelques rappels de théorie de la mesure.

**Exemple.** On considère l'application  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(t, x) := \begin{cases} +1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  sont du type  $x(t) = |t| + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $\dot{x}$  n'existe pas à l'instant  $t = 0$ .

## 1.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . On définit :

$$\Omega_t := \{x ; (t, x) \in \Omega\} \quad \Omega_x := \{t ; (t, x) \in \Omega\}.$$

On considère une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant les hypothèses

- A. pour tout  $x$  la fonction  $t \mapsto g(t, x)$  est mesurable sur  $\Omega_x$ , et pour tout  $t$ , la fonction  $x \mapsto g(t, x)$  est continue sur  $\Omega_t$ .
- B. pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $c_K > 0$  et  $L_K > 0$  telles que :

$$|g(t, x)| \leq c_K, \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq L_K |x - y|, \quad (t, x) \in K, (t, y) \in K.$$

Soit  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . On considère le problème de Cauchy :

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

**Théorème 1.1.** (i) Il existe  $\varepsilon > 0$  telle que l'équation le problème de Cauchy précédent ait une unique solution locale  $x$  définie sur  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

(ii) Si en outre  $g$  vérifie :

$$|g(t, x)| \leq c, \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t, x, y,$$

alors pour tout  $T > t_0$ , le problème précédent admet une unique solution  $x$  définie sur  $[t_0, T]$ . Deplus, la solution dépend continûment de  $x_0$ .

Le lemme suivant dit lemme de Gronwall est fondamental notamment pour démontrer l'unicité du problème de Cauchy.

**Lemme 1.1.** Soit  $z$  une fonction absolument continue, positive telle que

$$z(t_0) \leq \gamma, \quad \dot{z} \leq \alpha(t)z + \beta(t).$$

où  $\gamma \geq 0$ , et  $\alpha, \beta$  sont deux fonctions intégrables sur  $[t_0, T]$ . Alors on a :

$$z(t) \leq \gamma e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} + \int_{t_0}^t \beta(s) e^{\int_t^s \alpha(\tau) d\tau} ds$$

On obtient l'unicité pour le problème de Cauchy par le théorème suivant.

**Théorème 1.2.** Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions du problème de Cauchy (1.1) définies sur  $[t_0, t_1]$  et  $[t_0, t_2]$ . Si  $T := \min(t_1, t_2)$ , alors on a  $x_1(t) = x_2(t)$  pour tout  $t \in [t_0, T]$ .

En général, soit les solutions sont définies pour tout temps  $T > 0$  ou bien elles explosent au bord du domaine. Voir par exemple [4] pour plus de détails.

*Preuve du théorème 1.1.* On montre d'abord (ii). On munit  $X := C^0([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  de la norme

$$\|x(\cdot)\|_{\dagger} := \max_{t_0 \leq t \leq T} e^{-2Lt} |x(t)|,$$

qui est équivalente à  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Soit  $\phi : \mathbb{R}^n \times X \rightarrow X$  l'application définie par

$$\phi(x_0, w) := x_0 + \int_{t_0}^T g(s, w(s)) ds$$

Montrons que  $\phi$  est bien définie. Montrons donc que  $s \mapsto g(s, w(s))$  est intégrable sur  $[t_0, T]$ . Soit  $(w_\lambda)_\lambda$  la suite de fonctions en escalier définie par  $w_\lambda(t) := w(t_0 + j/\lambda(T - t_0))$  pour  $t \in [t_0 + j/\lambda, t_0 + (j+1)/\lambda]$ . De plus, l'hypothèse Lipschitz entraîne :

$$|g(t, w(t)) - g(t, w_\lambda(t))| \leq |w(t) - w_\lambda(t)|.$$

On déduit de cette inégalité que  $t \mapsto g(t, w(t))$  est mesurable comme limite de fonctions mesurables. De plus, on a pour tout  $t \in [t_0, T]$   $g(t, w(t)) \leq C$  donc  $s \mapsto g(s, w(s))$  est intégrable sur  $[t_0, T]$  et  $\phi$  est bien définie.

Soit  $w, w' \in X$  deux applications telles que  $\|w - w'\|_{\dagger} = \delta$ . En utilisant la définition de  $\|\cdot\|_{\dagger}$ , on a pour tout  $t \in [t_0, T]$  :

$$e^{-2Lt} |\phi(w)(t) - \phi(w')(t)| \leq e^{-2Lt} L \int_{t_0}^T |w(s) - w'(s)| ds \leq \frac{\delta}{2}.$$

Ainsi  $\|\phi(w) - \phi(w')\|_{\dagger} \leq \frac{1}{2} \|w - w'\|_{\dagger}$ . On conclut par le théorème du point fixe qu'il existe  $\bar{w} \in X$  telle que  $\phi(\bar{w}) = \bar{w}$ .

Montrons maintenant (i). Soit  $\varepsilon > 0$  et soit

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; |t - t_0| \leq \varepsilon \text{ et } |x - x_0| \leq \varepsilon\}.$$

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, on aura  $K \subset \Omega$ . Soit  $\phi$  un cut-off i.e.  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi = 1$  sur  $K$  et  $\phi = 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus K'$  où  $K'$  est un ensemble tel que  $K \subset K' \subset \Omega$ . Soit  $\tilde{g}(t, x) := g(t, x)\phi(t, x)$ . On considère le problème de Cauchy :

$$\dot{x} = \tilde{g}(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

La fonction  $\tilde{g}$  vérifie (ii) avec  $L = L_{K'}$  et  $C = C_{K'}$ . Donc il existe une solution du problème de Cauchy précédent définie sur  $[t_0, T]$ . Prenons maintenant  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit de telle sorte que  $x(t) \in K$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ . Alors la trajectoire vérifie bien  $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$  pour presque tout  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  car  $g(t, x) = \tilde{g}(t, x)$  si  $(t, x) \in K$ . On a donc bien obtenue une solution locale sur  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

## 1.6 Systèmes linéaires et condition de Kalman

On mentionne deux résultats de contrôlabilité de façon très succincte (voir par exemple [4]). Considérons un système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  sont deux matrices, et  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $C(A, B) \in M_{n, mn}(\mathbb{R})$  définie par :

$$C(A, B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B).$$

On rappelle le résultat suivant.

**Théorème 1.3.** *Si le rang de  $C(A, B)$  est  $n$ , alors pour tout  $t > 0$ , l'ensemble accessible  $R(t)$  depuis 0 satisfait  $R(t) = \mathbb{R}^n$ .*

On s'intéresse maintenant à voir comment on peut donner un résultat local de contrôlabilité pour un système non-linéaire dont le "linéarisé" vérifie la condition de Kalman.

On rappelle qu'un système  $\dot{x} = f(x, u)$  (avec  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ) est localement contrôlable autour d'un point  $\bar{x}$  si pour tout  $t > 0$ , l'ensemble des états accessibles au temps depuis  $\bar{x}$ ,  $R(t, \bar{x})$ , contient un voisinage de l'origine.

On a le résultat suivant.

**Corollaire 1.1.** *Soit le système  $\dot{x} = f(x, u)$  avec  $f$  de classe  $C^1$ . On suppose que l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U \text{ mes.}\}$  est tel  $U$  contient un voisinage de  $0_{\mathbb{R}^m}$ . Soit  $A = f_x(\bar{x}, 0)$ ,  $B = f_u(\bar{x}, 0)$ . Supposons que  $C(A, B)$  est de rang  $n$ . Alors, le système est localement contrôlable au point  $\bar{x}$ .*

*Démonstration.* On reprend la preuve de [4]. Soit  $\tau > 0$ . Soit  $y_1, \dots, y_n$   $n$  vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^n$ . Grâce à la condition de Kalman il existe  $n$  commandes  $u_i : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que pour  $1 \leq i \leq n$  l'unique solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \text{ p.p. } t \in [0, \tau] \quad \text{et} \quad x_i(0) = \bar{x}, \quad 1 \leq i \leq n$$

vérifie  $x_i(\tau) = y_i$ . On peut supposer que chaque  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}(\cdot)$  est uniformément borné sur  $[0, \tau]$  (en effet, on a obtenu en exercice une expression explicite d'un tel contrôle :  $u_i(t) := (e^{(T-t)A}B)^T G^{-1} y_i$ , ce qui implique la propriété).

On considère le contrôle  $u_{\theta}(t) := \sum_{1 \leq i \leq n} \theta_i u_i(t)$  qui pour  $\theta$  suffisamment est bien admissible i.e. on a pour presque tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $u_{\theta}(t) \in U$ .



Soit  $u_0 = 0$  le contrôle nul sur  $[0, \tau]$  (obtenu pour  $\theta = 0$ ); Notons maintenant que l'unique solution du problème de Cauchy  $\dot{x} = f(x, u_0)$ ,  $x(0) = \bar{x}$  est d'après les hypothèses la solution constante  $x(t) = \bar{x}$ .

Appelons  $t \mapsto x(t, \theta)$  l'unique solution du problème de Cauchy  $\dot{x} = f(x, u_\theta)$ ,  $x(0) = \bar{x}$ . Par les propriétés usuelles de dépendance des solutions d'une équation différentielle par rapport au paramètre<sup>1</sup> la dérivée de  $t \mapsto x(t, \theta)$  par rapport à  $\theta$  à l'instant  $\tau$  est donné par :

$$\left. \frac{\partial x(\tau, \theta_i)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=0} = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} D_u f(\bar{x}, 0) u_i(s) ds = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u_i(s) ds = y_i.$$

Ci-dessus, dans la première intégrale  $D_u f(\bar{x}, 0)$  est évalué le long de la paire trajectoire-contrôle  $(\bar{x}, 0)$  (voir problème de Cauchy ci-dessus).

On conclut par le théorème des fonctions implicites. En effet, la différentielle de l'application  $\theta \mapsto x(\tau, \theta)$  est inversible (car les  $n$  vecteurs  $y_i$  sont linéairement indépendants). Donc il existe un voisinage  $V_1$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et un voisinage  $\bar{V}$  de  $\bar{x}$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que l'application

$$\tau \mapsto x(\tau, \theta)$$

soit un homéomorphisme de  $V_1$  sur  $\bar{V}$ . D'où le résultat. □

## 2 Existence d'un contrôle optimal

### 2.1 Multi-fonctions

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Une multi-fonction  $F$  de  $X$  dans  $Y$  est une application qui à chaque point  $x \in X$  associe un ensemble  $F(x) \subset Y$ . On note en général une telle application  $F : X \rightrightarrows Y$ . On dit que  $F$  est à valeurs compactes si pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $F(x)$  est compact dans  $Y$ , et on dit que  $F$  est bornée si toutes ses valeurs sont contenues dans une boule  $B$  fixée de  $Y$ .

On définit la distance de Hausdorff entre deux ensembles compacts  $A, A' \subset X$  par :

$$d_H(A, A') := \max(\sup_{x \in A} d(x, A'), \sup_{x' \in A'} d(x', A)).$$

On dit qu'une multi-application  $F$  à valeurs compactes est continue si

$$\lim_{y \rightarrow x} d_H(F(y), F(x)) = 0, \forall x \in X.$$

On dit que  $F$  possède un graphe fermé si son graphe :

$$\text{Graph}(F) := \{(x, y) ; y \in F(x)\}$$

est fermé dans  $X \times Y$ . Autrement dit, si  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$  avec  $y_n \in F(x_n)$  pour tout  $n$ , alors on a aussi  $y \in F(x)$ .

### 2.2 Inclusions différentielles

Il peut être commode d'utiliser le concept d'inclusions différentielles pour étudier certaines propriétés des systèmes dynamiques contrôlés. On considère un système

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in \mathcal{U} \tag{2.1}$$

où  $\mathcal{U} := \{u(\cdot), \text{mesurable}, u(t) \in U \forall t\}$ . On suppose (dans cette section) que :

- L'ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$  est compact. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert
- La fonction  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et continûment différentiable par rapport à  $x$ .

---

1. On admettra cette propriété de dépendance. C'est une propriété usuelle des équations différentielles ordinaires (dépendances continues et de classe  $C^1$  de la solution en les conditions initiales et les paramètres).

On a vu qu'une solution de (2.1) sur un intervalle  $[a, b]$  est la donnée d'un contrôle mesurable  $u$  prenant ses valeurs dans  $U$ , et d'une application  $x$  telle que son graphe soit contenu dans  $\Omega$  et telle que (2.1) soit vérifiée presque partout.

On considère une multiplication :

$$F(t, x) := \{f(t, x, \omega) ; \omega \in U\},$$

et on considère l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \text{ p.p. } t. \quad (2.2)$$

L'ensemble  $F(t, x)$  s'appelle ensemble des vitesses augmentées. On a l'équivalence suivante (résultat de Filipov).

**Théorème 2.1.** *Une fonction absolument continue  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution de (2.1) si et seulement si elle satisfait (2.2) presque partout.*

*Démonstration.* On montre seulement que si  $\dot{x} \in F(t, x)$ , alors on peut trouver une sélection mesurable  $u(t)$  telle que  $\dot{x} = f(t, x, u)$ . Soit  $\bar{w} \in U$  et  $W$  la multi-application définie par :

$$W(t) = \begin{cases} \{w \in U \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), w) \text{ si } x(t) \in F(t, x(t)), \\ \bar{w} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'inclusion différentielle, on a alors pour presque tout  $t : W(t) = \{w \in U \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), w)\}$ . Donc  $W(t) = \bar{w}$  sur un ensemble de mesure nulle. On définit ensuite  $u(t)$  comme le premier élément de  $W(t)$  dans l'ordre lexicographique ( $U$  compact). Pour montrer que  $u$  est mesurable, il suffit de montrer qu'il existe une suite de compacts  $J_k \subset [a, b]$  tels que

$$\text{mes}([a, b] \setminus \cup_{k \geq 0} J_k) = 0,$$

et telle que sur chaque  $J_k$ ,  $u$  est continue. On prend pour  $J_k$  une suite qui vérifie la propriété ci-dessus et telle que sur chaque  $J_k$ ,  $\dot{x}(\cdot)$  soit continue (possible par définition de l'inclusion). On sait que  $W$  a son graphe fermé sur  $J_k$ . On applique ensuite un résultat de sélection mesurable (voir [4], théorème 2.4).  $\square$

On donne maintenant des propriétés de fermeture de l'ensemble des trajectoires du système contrôlé.

**Théorème 2.2.** *On suppose que la multi-application  $F$  est Hausdorff continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et à valeurs compactes. Alors, l'ensemble des solution de (2.2) est fermé dans  $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_n$  une suite de trajectoires qui converge uniformément vers  $x$  sur  $[0, T]$ . Comme  $F(t, x)$  est uniformément bornée pour tout  $(t, x)$  dans un compact, la suite  $x_n$  est uniformément Lipschitz continue. Donc,  $x$  est Lipschitz continue et différentiable p.p. (Théorème de Rademacher). Pour montrer le résultat, il faut montrer que

$$\dot{x}(\tau) \in F(\tau, x(\tau))$$

pour tout point  $\tau$  où  $\dot{x}(\tau)$  est bien définie.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'en un point  $\tau$ ,  $\dot{x}(\tau)$  n'appartient pas à l'ensemble  $F(\tau, x(\tau))$ . Ainsi, il existe  $\varepsilon > 0$  et  $p \in \mathbb{R}^n$  un vecteur **unitaire** tel que

$$p \cdot y \leq p \cdot \dot{x}(\tau) - 3\varepsilon, \forall y \in F(\tau, x(\tau)).$$

Ceci provient de la caractérisation d'un convexe fermé dans  $\mathbb{R}^n$  par le théorème de projection. Par continuité, il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t$  tel que  $|t - \tau| < \delta$  et tout  $x'$  tel que  $|x' - x(\tau)| \leq \delta$ , on ait :

$$p \cdot y \leq p \cdot \dot{x}(\tau) - 2\varepsilon, \forall y \in F(t, x'). \quad (2.3)$$

Comme  $x(\tau)$  est différentiable, il existe  $\tau' \in (\tau, \tau + \delta]$  tel que :

$$\left| \frac{x(\tau) - x(\tau')}{\tau - \tau'} - \dot{x}(\tau) \right| < \varepsilon, |x(t) - x(\tau)| < \delta, \forall t \in [\tau, \tau'].$$

Par convergence uniforme, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \frac{x_n(\tau') - x_n(\tau)}{\tau' - \tau} = p \frac{x(\tau') - x(\tau)}{\tau' - \tau} \geq p \cdot \dot{x}(\tau) - \varepsilon.$$

Or, par (2.3), on obtient pour  $n$  assez grand :

$$p \cdot \frac{x_n(\tau') - x_n(\tau)}{\tau' - \tau} = \frac{1}{\tau' - \tau} \int_{\tau}^{\tau'} p \cdot \dot{x}_n(t) dt \leq p \cdot \dot{x}(\tau) - 2\varepsilon,$$

d'où une contradiction.  $\square$

**Corollaire 2.1.** *Soit  $x_n$  une suite de trajectoires solution de (2.1) qui converge uniformément vers une fonction  $x$  sur  $[0, T]$ . Si le graphe  $\{(t, x(t)) ; t \in [0, T]\}$  est contenu dans  $\Omega$ , et l'ensemble des vitesses  $F(t, x) = \{f(t, x, u) ; u \in U\}$  est convexe, alors  $x$  est aussi une trajectoire du système i.e. une solution de (2.1).*

### 2.3 Propriétés des ensembles accessibles

On considère le problème de Cauchy :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{U} := \{u(\cdot), \text{mesurable}, u(t) \in U \forall t\}$ ,  $x_0$  est fixé dans  $\Omega$ , et on rappelle les hypothèses suivantes :

- L'ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$  est compact,
- La fonction  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et continûment différentiable par rapport à  $x$ .

**Définition 2.1.** (i) *L'ensemble accessible  $R(\tau, x_0)$  à l'instant  $\tau$  depuis  $x_0$  est par définition :*

$$R(\tau, x_0) := \{x(\tau) ; x \text{ satisfait (2.4) et } x(0) = x_0\}.$$

(ii) *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non-vide. L'ensemble accessible à l'instant  $\tau$  depuis l'ensemble  $K$  est par définition :*

$$R(\tau, K) := \{x(\tau) ; x \text{ satisfait (2.4) et } x(0) \in K\}.$$

L'ensemble  $R(\tau, K)$  vérifie la propriété suivante dite de fermeture de l'ensemble atteignable.

**Théorème 2.3.** *On suppose les hypothèses précédentes vérifiées. On suppose de plus que le graphe des solutions de (2.4) est contenu dans un ensemble compact  $K' \subset \Omega$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Si l'ensemble  $F(x) := \{f(x, \omega) ; \omega \in U\}$  est convexe, alors pour tout  $\tau \in [0, T]$ , l'ensemble  $R(\tau, K)$  est compact.*

*Démonstration.* Soit  $\xi_n$  une suite de points de  $R(\tau, K)$  convergeant vers un point  $\bar{\xi}$ . On a donc  $\xi_n := x_n(\tau)$  où  $x_n$  est solution de (2.4) et  $x_n(0) \in K$ . Par définition, le graphe de  $x_n$  est contenu dans le compact  $K'$ . On déduit que  $\dot{x}_n$  est uniformément bornée et donc que  $x_n$  est uniformément Lipschitz continue. Par le théorème d'Ascoli, on peut donc extraire une sous-suite qui converge vers  $x$  uniformément sur  $[0, \tau]$ . On a de plus  $x(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(0) \in K$  car  $K$  est fermé. Par convexité de  $F(x)$  et par le corollaire 2.1, il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  tel que  $\dot{x} = f(x, u)$  p.p. sur  $[0, \tau]$ . On déduit que :

$$\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\tau) = x(\tau) \in R(\tau, K).$$

Donc  $R(\tau, K)$  est fermé.  $\square$

### 2.4 Théorème de Phillipov

Le but de cette section est de donner quelques conditions suffisantes sur un système contrôlé qui garantissent l'existence d'un contrôle optimal. On considère un système contrôlé du type :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in \mathcal{U}, \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{U} := \{u(\cdot) ; \text{mesurable sur } [0, T]\}$ . Etant donné  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , un sous-ensemble (cible)  $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , et une fonction coût  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on considère le problème d'optimisation (problème de type Mayer) :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}, T \geq 0} \phi(T, x(T, u)), \quad (2.6)$$

où la solution  $x$  de (2.5) vérifie  $x(0) = x_0$  et  $(T, x(T)) \in S$ . On a tout d'abord le résultat suivant.

**Proposition 2.1.** *On suppose que  $T > 0$  est fixé et que le problème de minimisation s'écrit :*

$$\inf_{u \in \mathcal{U}, T \geq 0} \phi(x(T, u)), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in S, \quad (2.7)$$

où  $\phi$  est continue, et  $S$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe une trajectoire qui relie  $x_0$  à  $S$ , et que les hypothèses du théorème 2.3 sont vérifiées. Alors il existe un contrôle optimal pour le problème (2.7)

*Démonstration.* Par le théorème 2.3, l'ensemble accessible  $R(x_0, T)$  depuis  $x_0$  à l'instant  $T$  est compact. On déduit qu'il existe un point  $x_m$  appartenant au compact  $R(x_0, T) \cap S$  où  $\phi$  est minimale ( $\phi$  est continue). Ainsi, tout contrôle  $u^*$  reliant  $x_0$  à  $x_m$  est optimal (il en existe par définition de  $R(x_0, T)$ ).  $\square$

On a le résultat suivant sur le problème (2.7) qui fournit des conditions suffisantes pour garantir l'existence d'un contrôle optimal (théorème d'existence d'un contrôle optimal dit théorème de Filippov).

**Théorème 2.4.** *On effectue les hypothèses suivantes sur les données.*

(i) *L'ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$  est compact.*

(ii) *La dynamique  $f$  est continue par rapport au triplet  $(t, x, u)$ , continûment différentiable par rapport à  $x$  et vérifie l'inégalité*

$$|f(t, x, u)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall (t, x, u). \quad (2.8)$$

(iii) *L'ensemble des vitesses augmentées  $F(t, x)$  est convexe.*

(iv) *Le coût  $\phi$  est continue, et la cible  $S$  est fermée et incluse dans la bande  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ .*

*Alors, s'il existe une trajectoire qui relie  $x_0$  à  $S$ , alors il existe une solution optimale du problème (2.6).*

*Démonstration.* On peut considérer une suite minimisante  $(T_n, x_n(T_n))$  pour le problème (2.7). La suite  $x_n$  peut être prolongée à l'intervalle  $[0, T]$  en posant  $x_n(t) = x_n(T_n)$  pour  $t \in [T_n, T]$ . Par le lemme de Gronwall, on peut montrer que la suite  $x_n$  est uniformément Lipschitz continue. On peut supposer que la suite  $T_n$  converge vers  $T^*$  (à extraction près), de plus par le théorème d'Ascoli, on peut également supposer qu'il existe une application continue  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $x_n$  converge vers  $x^*$  uniformément sur  $[0, T]$ . De plus, on sait que  $x^*$  correspond à une trajectoire admissible du système associée à un contrôle  $u^*$  définie sur  $[0, T^*]$  (lemme de fermeture des trajectoires). Comme  $S$  est fermée, on a clairement  $(T^*, x^*(T^*)) \in S$ . Enfin, on a par continuité de  $\phi$  :

$$\phi(T^*, x(T^*)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(T_n, x_n(T_n)) = \inf_{u \in \mathcal{U}, \tau} \phi(\tau, x(\tau, u)).$$

Ainsi,  $u^*$  est un contrôle optimal.  $\square$

### 3 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section on démontre un principe du maximum de Pontryagin pour le cas des équations différentielles autonomes avec un critère intégral et coût final (problème de Bolza, voir [4]). De plus on suppose que l'état initial est fixé et que l'état final est libre. La preuve du principe du maximum de Pontryagin avec contraintes sur l'état initial et final est plus technique et peut s'effectuer grâce au principe variationnel d'Ekeland, voir [2]. On présente ce principe sous forme autonome pour simplifier les notations en suivant [2] (la preuve dans le cas non-autonome étant similaire).

#### 3.1 Hypothèses sur le système

Soit  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $T > 0$  donnés. On notera  $f_y$  et  $\ell_y$  les dérivées partielles par rapport à la variable  $y$  de  $f$  et  $\ell$ . Soit  $U \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble compact donné et

$$\mathcal{U} = \{u : [0, T] \rightarrow U \mid u \text{ mes}\},$$

l'ensemble des contrôles admissibles. On considère le problème :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(y_u(t), u(t)) dt + \phi(y_u(T)), \quad (3.1)$$

où la fonction  $y_u$  est solution sur  $[0, T]$  du problème de Cauchy :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U}. \quad (3.2)$$

On effectue les hypothèses suivantes sur la dynamique, le lagrangien, et le coût final :

– La fonction  $f$  vérifie :

$$\exists c_1 > 0 \quad |f(y, u) - f(z, u)| \leq c_1 |y - z|, \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in U, \quad (3.3)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists \alpha(y) \geq 0, \quad |f(y, u) - f(y, v)| \leq \alpha(|y|) |u - v|, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad (3.4)$$

où  $r \mapsto \alpha(r)$  est une fonction croissante de  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . De plus, on suppose que  $f_y(y, u)$  existe pour tout  $(y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et que :

$$\exists c_2 > 0 \quad |f_y(y, u)| \leq c_2(1 + |u|), \quad \forall (y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (3.5)$$

et que  $f_y(y, u)$  est localement Lipschitz.

- La fonction  $\ell$  est de classe  $C^1$  et  $\ell_y$  est localement Lipschitz.
- La fonction  $\phi$  est de classe  $C^1$ .

**Remarque 3.1.** *Les hypothèses sur  $f$  impliquent existence et unicité du problème de Cauchy (3.2), (voir par exemple [8, 9]), et les solutions de (3.2) se définissent au sens de Carathéodory, c'est à dire presque partout (voir par exemple [4]). Pour simplifier, on omet ce point dans le document.*

Dans la suite, on supposera qu'il existe un contrôle optimal  $\bar{u}$  solution du problème de minimisation (3.1)-(3.2). L'existence d'un contrôle optimal peut se prouver à l'aide du théorème de Filipov, voir [5].

### 3.2 Estimation $L^\infty$ de l'état

L'estimation suivante est une conséquence du lemme de Gronwall.

**Lemme 3.1.** *Soient  $u$  et  $\bar{u}$  deux contrôles fixés dans  $\mathcal{U}$  et  $y, \bar{y}$  les deux états associés à  $u$  et  $\bar{u}$  tels que  $y(0) = \bar{y}(0) = y_0$ . Alors il existe une constante  $C := \alpha(\|\bar{y}\|_\infty) e^{c_1 T}$  telle que :*

$$\|y - \bar{y}\|_\infty \leq C \|u - \bar{u}\|_1. \quad (3.6)$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi := y - \bar{y}$  et  $\psi = |\varphi|$ . La fonction  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle

$$\dot{\varphi} = f(y, u) - f(\bar{y}, u) + f(\bar{y}, u) - f(\bar{y}, \bar{u}).$$

En utilisant les hypothèses sur la dynamique  $f$ , on obtient :

$$\dot{\psi} \leq |\dot{\varphi}| \leq |f(y, u) - f(\bar{y}, u)| + |f(\bar{y}, u) - f(\bar{y}, \bar{u})| \leq c_1 |y - \bar{y}| + \alpha(\|\bar{y}\|_\infty) |u - \bar{u}|,$$

ou encore

$$\dot{\psi} \leq c_1 \psi + a |u - \bar{u}|,$$

où on a noté  $a = \alpha(\|\bar{y}\|_\infty)$ . Si on pose  $z(t) = \psi(t) e^{-c_1 t}$ , alors  $\dot{z}(t) = (\dot{\psi}(t) - c_1 \psi(t)) e^{-c_1 t} \leq a |u(t) - \bar{u}(t)| e^{-c_1 t}$ , et donc  $z(t) \leq z(0) + a \int_0^t |u(s) - \bar{u}(s)| e^{-c_1 s} ds$ . Comme  $z(0) = |\varphi(0)| = 0$ , on obtient :

$$|\varphi(t)| \leq a \int_0^t |u(s) - \bar{u}(s)| e^{c_1(t-s)} ds \leq a e^{c_1 T} \|u - \bar{u}\|_1.$$

d'où le résultat en posant  $C = a e^{c_1 T}$ . □

### 3.3 Définition de l'état adjoint

Soit  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  le Hamiltonien du système défini par :

$$H(y, p, u) = p \cdot f(y, u) + \ell(y, u). \quad (3.7)$$

Soit  $\bar{u}$  une solution de (3.1)-(3.2), et  $\bar{y}$  la solution de (3.2) associée au contrôle  $\bar{u}$ . On notera  $H_y$  la dérivée partielle de  $H$  par rapport à  $y$ . On définit l'état adjoint associé à  $\bar{y}$  comme l'unique solution sur  $[0, T]$  de :

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}} = -H_y(\bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) = -\bar{p}(t) \cdot f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) - \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)), \\ \bar{p}(T) = \nabla \phi(\bar{y}(T)) \end{cases} \quad (3.8)$$

On notera que l'état est un vecteur colonne et que l'état adjoint est un vecteur ligne. Le principe du maximum de Pontryagin s'énonce dans ce cadre de la manière suivante :

**Théorème 3.1.** *Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , on a :*

$$H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) = \min_{v \in U} H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), v). \quad (3.9)$$

**Définition 3.1.** *Soit  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  un triplet solution de (3.2)-(3.8)-(3.9). On dit que  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  est une extrémale de Pontryagin.*

**Remarque 3.2.** *Dans le cas présent, le système est autonome et le Hamiltonien est conservé le long d'une extrémale (voir [7], utiliser le théorème de Lusin pour régler la continuité de  $\bar{u}$ ). Cette propriété est délicate à montrer mais elle est relativement intuitive lorsque  $u$  est constant par morceaux ou bien que le Hamiltonien est strictement convexe par rapport au contrôle.*

**Remarque 3.3.** *A l'aide de (3.9), on peut théoriquement calculer un contrôle extrémal, et ramener le problème initial à la résolution d'un système différentiel état-adjoint aux deux bouts (condition initiale fixée pour l'état, condition finale fixée pour l'adjoint) de dimension  $2n$ .*

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes.

$$\delta H(t) := H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), u(t)) - H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)), \quad \delta \ell(t) := \ell(\bar{y}(t), u(t)) - \ell(\bar{y}(t), \bar{u}(t))$$

Par ailleurs, on notera  $f(t), f_y(t), \ell(t), \ell_y(t)$  les valeurs de  $f, f_y, \ell, \ell_y$  évaluées au point  $(\bar{y}(t), \bar{u}(t))$ .

### 3.4 Preuve du PMP

On définit d'abord la linéarisation de Pontryagin au premier ordre.

**Définition 3.2.** *Soit  $z$  l'unique solution sur  $[0, T]$  de*

$$\dot{z} = f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{y}(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), \bar{u}(t)), \quad z(0) = 0. \quad (3.10)$$

*On dit que  $z$  est la linéarisation de Pontryagin au premier ordre.*

Soit  $u \in U$ , et  $y$  l'état associé. Notons  $\delta u = u - \bar{u}$ ,  $\delta y := y - \bar{y}$ . On montre d'abord l'estimation suivante.

**Lemme 3.2.** *La fonction  $z$  vérifie :*

$$\|z - \delta y\|_\infty = O(\|\delta u\|_1^2). \quad (3.11)$$

*Démonstration.* La fonction  $\zeta := z - \delta y$  vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{y}(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) - (f(y(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), \bar{u}(t))), \\ &= f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))\zeta + f(\bar{y}(t), u(t)) - f(y(t), u(t)) + f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))\delta y(t), \\ &= f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))\zeta - (f(y(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), u(t)) - f_y(\bar{y}(t), u(t))\delta y(t)) - (f_y(\bar{y}(t), u(t)) - f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)))\delta y(t). \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, on a  $f(y(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), u(t)) = f_y(\hat{y}(t), u(t))\delta y(t)$  pour un certain  $\hat{y}(t) \in [y(t), \bar{y}(t)]$ . Comme  $U$  est compact et que  $f_y$  est localement Lipschitz, il existe  $c_3$  tel que :

$$|f(y(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), u(t)) - f_y(\bar{y}(t), u(t))\delta y(t)| \leq c_3 |\delta y(t)|^2 \leq O(\|\delta u\|_1^2).$$

On a également :

$$|(f_y(\bar{y}(t), u(t)) - f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)))\delta y(t)| \leq |\delta u(t)|O(\|\delta y\|_\infty) \leq |\delta u(t)|O(\|\delta u\|_1).$$

Ainsi on peut réécrire l'équation vérifiée par  $\zeta$  :

$$\dot{\zeta} = f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))\zeta + A|\delta u(t)| + B$$

où  $A = O(\|\delta u\|_1)$  et  $B = O(\|\delta u\|_1^2)$ . On conclut ensuite par le lemme de Gronwall comme dans la preuve du lemme 3.1.  $\square$

On montre maintenant l'estimation suivante qui constitue un développement du coût au premier ordre.

**Lemme 3.3.** *On a l'estimation suivante :*

$$J(u) - J(\bar{u}) = \int_0^T \delta H(t) dt + o(\|\delta u\|_1) \quad (3.12)$$

*Démonstration.* Comme  $\phi$  est  $C^1$  et que  $U$  est compact, on a :

$$|\phi(y(T)) - \phi(\bar{y}(T)) - \nabla\phi(\bar{y}(T))\delta y(T)| \leq \eta(\delta y(T))|\delta y(T)|,$$

où  $w \mapsto \eta(w)$  est une fonction qui converge uniformément vers 0 quand  $w$  tend vers 0. On en déduit :

$$\phi(y(T)) - \phi(\bar{y}(T)) - \nabla\phi(\bar{y}(T))\delta y(T) = o(\|\delta u\|_1).$$

Comme  $\ell$  est de classe  $C^1$  et que  $U$  est compact, on a également pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$|\ell(y(t), u(t)) - \ell(\bar{y}(t), u(t)) - \ell_y(\bar{y}(t), u(t))\delta y(t)| \leq \varepsilon(\delta y(t))|\delta y(t)|,$$

où  $w \mapsto \varepsilon(w)$  est une fonction qui converge uniformément vers 0 lorsque  $w$  tend vers 0. On déduit que :

$$\begin{aligned} J(u) - J(\bar{u}) &= \int_0^T [\ell(y(t), u(t)) - \ell(\bar{y}(t), u(t)) + \delta\ell(t)] dt + \phi(y(T)) - \phi(\bar{y}(T)), \\ &= \int_0^T [\delta\ell(t) + \ell_y(\bar{y}(t), u(t))\delta y(t)] dt + \nabla\phi(\bar{y}(T))\delta y(T) + o(\|\delta u\|_1). \end{aligned}$$

En utilisant que  $\ell_y$  est localement Lipschitz, on a :

$$|\ell_y(\bar{y}(t), u(t)) - \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))| = O(|\delta u(t)|),$$

et on obtient :

$$J(u) - J(\bar{u}) = \int_0^T [\delta\ell(t) + \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))\delta y(t)] dt + \nabla\phi(\bar{y}(T))\delta y(T) + o(\|\delta u\|_1).$$

On introduit maintenant la linéarisation de Pontryagin. On a donc en utilisant  $z(0) = 0$  et le lemme 3.2 :

$$J(u) - J(\bar{u}) = \int_0^T [\delta\ell(t) + \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))z(t)] dt + \bar{p}(T)z(T) - \bar{p}(0)z(0) + o(\|\delta u\|_1).$$

On peut écrire  $\bar{p}(T)z(T) - \bar{p}(0)z(0) = \int_0^T [\dot{\bar{p}}(t)z(t) + \bar{p}(t)\dot{z}(t)] dt$ . On a donc :

$$\begin{aligned} J(u) - J(\bar{u}) &= \int_0^T [\delta\ell(t) + \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))z(t) + \bar{p}(t)(f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t))z + f(\bar{y}(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), \bar{u}(t))) \\ &\quad - (\bar{p}(t) \cdot f_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) + \ell_y(\bar{y}(t), \bar{u}(t)))z(t)] dt + o(\|\delta u\|_1) \\ &= \int_0^T [\delta\ell(t) + \bar{p}(t)(f(\bar{y}(t), u(t)) - f(\bar{y}(t), \bar{u}(t)))] dt + o(\|\delta u\|_1), \end{aligned}$$

ce qui montre (3.12). □

**Remarque 3.4.** *Si on suppose que  $\ell$  et  $\phi$  sont de classe  $C^2$ , alors on peut montrer que*

$$J(u) - J(\bar{u}) = \int_0^T \delta H(t) dt + O(\|\delta u\|_1^2).$$

Montrons maintenant le théorème 3.1. Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $v \in U$  et  $u_\varepsilon$  le contrôle défini par :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(s) = \bar{u}(t), s \in [0, T] \setminus [t, t + \varepsilon], \\ u_\varepsilon(s) = v. \end{cases}$$

On dit que  $u_\varepsilon$  est une perturbation en aiguille du contrôle  $\bar{u}$ . Notons que  $\|u_\varepsilon - \bar{u}\|_1 = \int_t^{t+\varepsilon} |v - \bar{u}(s)| ds = O(\varepsilon)$ . Appliquons le lemme 3.3 avec  $u_\varepsilon$ . On a donc :

$$J(u_\varepsilon) - J(\bar{u}) = \int_t^{t+\varepsilon} \delta H(s) ds + o(\varepsilon) \geq 0.$$

On obtient en divisant par  $\varepsilon > 0$  :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \delta H(s) ds + o(1) \geq 0,$$

où  $o(1)$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Maintenant,  $t \mapsto H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), u(t)) - H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t))$  est Lebesgue intégrable, et donc pour presque tout  $t \in [0, T]$ , on a lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \delta H(s) ds \rightarrow H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), u(t)) - H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)),$$

par définition des points de Lebesgue d'une fonction mesurable. On obtient donc (3.9).

### 3.5 PMP avec contraintes sur l'état initial et final

La version suivante du principe du maximum de Pontryagin suit les notations de [2] et prend en compte des contraintes sur l'état initial et l'état final. On considère cette fois le problème :

$$\begin{cases} \min \int_0^T \ell(y_u(t), u(t)) dt + \phi(y_u(0), y_u(T)), \text{ sous la contrainte} \\ (i) \dot{y}_u(t) = f(y_u(t), u(t)), \text{ (ii) } u(t) \in U, \text{ a.e. } t \in [0, T], \text{ (iii) } \Phi(y(0), y(T)) \in K. \end{cases} \quad (3.13)$$

où :

- L'ensemble  $K \subset \mathbb{R}^N$  est un convexe non-vide.
- Les fonctions  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  sont de class  $C^1$ .
- Les fonctions  $\ell, f$  et l'ensemble  $U$  sont définis dans la section 1.1.

De même que précédemment, on suppose qu'il existe un contrôle optimal solution de (3.13). On définit le Hamiltonien du système  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$H(y, p, u, \alpha) = p \cdot f(y, u) + \alpha \ell(y, u).$$

Définissons l'adjoint associée à une solution (3.2).

**Définition 3.3.** Soit  $\alpha \geq 0$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^N$  et  $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\Psi(y_0, y_1) = \alpha \phi(y_0, y_1) + \psi \cdot \Phi(y_0, y_1). \quad (3.14)$$

Etant donné  $u \in \mathcal{U}$ , et  $y_u$  la solution associée à  $u$ , on définit l'état adjoint associé à  $y_u$  comme la solution sur  $[0, T]$  de :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -H_y(y_u(t), p(t), u(t), \alpha), \\ (i) p(0) = -D_1 \Psi(y_u(0), y_u(T)), \text{ (ii) } p(T) = D_2 \Psi(y(0), y(T)), \text{ (iii) } \psi \in N_K(\Phi(y_u(0), y_u(T))). \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans la définition ci-dessus  $D_i \Psi$  désigne la différentielle partielle de  $\Psi$  par rapport à la variable  $y_i$ ,  $i = 0, 1$ . Le principe du maximum de Pontryagin s'énonce dans ce cadre de la façon suivante.

**Théorème 3.2.** Soit  $\bar{u}$  une solution de (3.13) et  $\bar{y}$  la solution de (3.2) associée à  $\bar{u}$ . Alors il existe  $(\alpha, \psi) \neq (0, 0)$  avec  $\alpha \geq 0$ , et il existe  $\bar{p}$  solution de (3.15) avec  $(\bar{y}_u, \bar{u})$  tels que :

$$\text{p.p. } t \in [0, T], \bar{u}(t) \in \operatorname{argmin}_{v \in U} H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), v, \alpha). \quad (3.16)$$

Les conditions (i) et (ii) de (3.15) s'appellent les *conditions de transversalité* sur le vecteur adjoint.

**Définition 3.4.** On appelle extrémale de pontryagin un quintuplet  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}, \alpha, \psi)$  tel que  $\alpha \geq 0$ ,  $(\alpha, \psi) \neq (0, 0)$  et tel que  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  soit solution de (3.2)-(3.15)-(3.16).

Une extrémale est *normale* lorsque  $\alpha > 0$  et *anormale* lorsque  $\alpha = 0$ . En général, le problème initial admet des extrémales normales comme solution. Il est plus rare que des extrémales anormales (dont la définition ne dépend pas du critère  $\ell$ ) soient optimales.



### 3.6 Principe du maximum de Pontryagin avec temps libre

La version suivante du principe de Pontryagin intègre des contraintes sur l'état final, le temps final libre ( $T$  est libre), et un état initial fixé. On se rapporte à [7] pour les notations. On considère le problème :

$$\begin{cases} \min \int_0^T \ell(y_u(t), u(t)) dt + \phi(T, y_u(T)), \text{ sous la contrainte} \\ (i) \dot{y}_u(t) = f(y_u(t), u(t)), \text{ (ii) } u(t) \in U, \text{ p.p. } t \in [0, T], \text{ (iii) } y_u(T) \in C \subset \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ . Soit  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  le Hamiltonien du système défini par :

$$H(y, p, u) = p \cdot f(y, u) + \ell(y, u). \quad (3.18)$$

Soit  $u \in \mathcal{U}$  et  $y_u$  la solution de (3.2). On appelle adjoint associé à  $y_u$  une solution sur  $[0, T]$  de :

$$\dot{p}(t) = -H_y(y_u(t), p(t), u(t)), \quad p(T) - \phi_y(T, y_u(T)) \in N_C(y_u(T)), \quad (3.19)$$

où  $N_C(y_u(T))$  désigne le cône normal à  $C \subset \mathbb{R}^p$  au point  $y_u(T)$ .

**Théorème 3.3.** *Soit  $\bar{u}$  une solution normale de (3.17),  $\bar{y}$  la solution associée. Alors, il existe  $\bar{p}$  solution de (3.19) tel que :*

$$\text{p.p. } t \in [0, T], \quad \bar{u}(t) \in \operatorname{argmin}_{v \in U} H(\bar{y}(t), \bar{p}(t), v), \quad (3.20)$$

et on a la condition finale sur le Hamiltonien :

$$H(\bar{y}(T), \bar{p}(T), \bar{u}(T)) - \phi_t(T, \bar{y}(T)) = 0. \quad (3.21)$$

**Remarque 3.5.** *Par exemple, si on suppose que*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1(x) = \dots = c_p(x) = 0\},$$

où les  $c_i$  sont de classe  $C^1$ , alors, le vecteur adjoint s'écrira en temps  $T$  :

$$p(T) = p(T) - \phi_y(T, y_u(T)) + \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \nabla c_i(y_u(T))$$

## 4 Exemples d'application du PMP

Cette section donne quelques exemples d'application du PMP sans toutefois détailler toutes les preuves.

On notera les deux points suivants. Lorsque le système est autonome, le Hamiltonien est conservé le long d'une trajectoire extrémale (en particulier le long d'une trajectoire optimale). Pour un problème de temps minimal (autonome), on a en outre la propriété que le Hamiltonien est nul le long d'une trajectoire extrémale. On rappelle que si le point final est  $x(T)$  est fixé, alors  $p(T)$  est inconnu et que si  $x(T)$  est libre au temps  $T$ , alors  $p(T) = 0$  (il s'agit de l'expression des conditions de transversalité dans ce cas [9]).

**Exemple 1.** On considère le système (appelé double intégrateur) décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

où  $u$  est un contrôle mesurable prenant ses valeurs dans  $[-1, 1]$ . Le problème de contrôle optimal est le suivant. Etant donné une condition initiale  $(x_1^0, x_2^0)$ , on cherche une commande  $u$  qui conduise le système en temps minimal du point initial au point cible  $(0, 0)$ . A l'aide du PMP, montrer qu'une trajectoire admet au plus 1 commutation (cad un basculement du contrôle de  $u = \pm 1$  à  $u = \mp 1$ ). Chercher les trajectoires optimales partant de n'importe quelle condition initiale (distinguer les trajectoires avec 0 et 1 commutation). Raisonner dans le plan de phase  $(x_1, x_2)$ .

**Exemple 2 : Zermelo (voir aussi appendice).** Appliquer la même technique pour résoudre le problème de Zermelo lorsque  $\lambda = 1$  et  $\varepsilon = 0$ . On notera qu'il existe trois types d'arc : des arcs  $u = \pm 1$  et des arcs  $u = 0$  et

$x_1 = 0$  (ces derniers sont appelés *arcs singuliers* et correspondent à l'annulation de la fonction  $p_2$ ). Raisonner dans le plan de phase  $(x_1, x_2)$ .

**Exemple 3 (principe de l'autoroute).** On considère le problème de contrôle suivant en dimension 1, et en temps fixé (voir [7]) :

$$\min_u \int_0^2 x^2(t) dt, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x} = u, \quad |u(t)| \leq 1.$$

Le Hamiltonien et l'équation adjointe s'écrivent :

$$H(y, p, u) = pu + x^2, \quad \dot{p} = -2x,$$

d'où :  $\ddot{p} = -2u$ . Notons qu'on a toujours  $\dot{p}(0) = -2$ . On note  $\bar{p}(0) = p_0$  dans la suite. Il n'y a pas de conditions de transversalité car  $x(0)$  et  $x(2)$  sont fixés. La condition de minimisation du Hamiltonien donne la loi de commande :

$$\begin{cases} u(t) = -1, & \text{si } p(t) > 0, \\ u(t) = +1, & \text{si } p(t) < 0, \\ u(t) \in [-1, 1] & \text{si } p(t) = 0. \end{cases}$$

Premier cas.  $p_0 \leq 0$ . Alors :  $u = +1$  sur un voisinage de 0,  $\ddot{p} = -2$ , donc  $\dot{p}(t) = -2t - 2$ , et  $p(t) = -t^2 - 2t + p_0$  sur un voisinage de 0. Or  $p(t)$  est négatif strictement pour tout  $t > 0$ , donc la trajectoire vérifie  $u(t) = 1$  pour tout  $t$ , donc  $x(t) = \frac{1}{2}\dot{p}(t) = t + 1$ , et on ne peut avoir  $x(2) = \frac{1}{2}$ . Ce cas n'est pas possible

Second cas.  $p_0 > 0$ . Alors  $u = -1$  sur un voisinage de 0. On obtient :  $\ddot{p} = 2$ ,  $\dot{p}(t) = 2t - 2$ ,  $x(t) = -t + 1$ ,  $p(t) = t^2 - 2t + p_0$ .

*Sous-cas (i).* Supposons  $p_0 < 1$ . Alors  $p(t)$  s'annule en  $t_0 = 1 - \sqrt{1 - p_0}$ , et en ce point  $x(t_0) = \sqrt{1 - p_0} > 0$ , donc pour tout  $t > t_0$  dans un voisinage de  $t_0$  on a  $x(t) > 0$ , et  $\dot{p}(t) < 0$ . Ainsi, le contrôle bascule à la valeur  $+1$  en  $t_0^+$ . On a donc sur un voisinage à droite de  $t_0$  :  $\ddot{p} = -2$ ,  $\dot{p} = -2(t - t_0) + \dot{p}(t_0) = -2(t - t_0) - 2x(t_0)$ . Donc,  $p(t) = -(t - t_0)^2 - 2x(t_0)(t - t_0)$  pour  $t > t_0$  dans un voisinage de  $t_0$ . Or cette quantité est strictement négative pour  $t > t_0$ , donc on conserve  $u = +1$  tout le temps. Ainsi :  $x(t) = t - t_0 + x(t_0)$ , et la trajectoire n'atteint pas la cible (on trouve en effet après calcul  $x(2) = 1 + 2\sqrt{1 - p_0} > 1/2$ ).

*Sous-cas (ii).*  $p(0) > 1$ . Alors  $p(t) > 0$  pour tout  $t$ , et  $u(t) = -1$  est constant pour tout  $t$ , et  $x(t) = -t + 1$ . Ce cas là n'est pas possible car la trajectoire n'atteint jamais la cible.

*Sous cas (iii).*  $p(0) = 1$ . Alors on a  $u = -1$ ,  $x(t) = -t + 1$  et en  $t = 1$ , on a  $p(1) = \dot{p}(1) = x(1) = 0$ . Il est optimal pour la trajectoire de rester sur  $x = 0$  à partir de  $t = 1$  (on peut montrer que si en  $t = 1$ , le contrôle bascule prend la valeur  $+1$  ou reste constant égal à  $-1$ , alors la trajectoire n'atteint jamais la cible). Il existe un  $t_0 > 1$  tel que  $u(t_0) = 1$  (si  $x(t) = 0$  pour tout  $t$ , alors on n'atteint pas la cible, et si  $u$  bascule à  $-1$  en un point, alors on a  $p(t) = (t - t_0)^2$ ,  $t \geq t_0$ , et la trajectoire n'atteindra pas la cible). Donc  $\ddot{p} = -2$ ,  $\dot{p} = -2t + \dot{p}(t_0)$ , donc  $x(t) = t - \frac{1}{2}\dot{p}(t_0)$ , et on doit avoir  $x(2) = \frac{1}{2}$ , donc  $x(t) = t - \frac{3}{2}$ , et  $t_0 = \frac{1}{2}$ .

**Conclusion.** Le contrôle optimal est  $u = -1$  sur  $[0, 1]$ ,  $u = 0$  sur  $[1, \frac{3}{2}]$  (arc singulier),  $u = 1$  sur  $[\frac{3}{2}, 2]$ . Autrement dit, on cherche à rejoindre la droite  $x = 0$  (arc singulier) le plus rapidement possible.

On peut également résoudre le problème par l'équation d'Hamilton-Jacobi en calculant le coût associée à la stratégie précédente en remplaçant  $t = 0$  par  $t_0$  et en considérant un point initial  $x_0$  quelconque. Il faut prendre comme stratégie de rejoindre au plus vite l'axe  $x = 0$  que l'on doit suivre (autoroute) avant de le quitter avec  $u = 1$  jusqu'à la cible.

**Exemple 4.** Problème de la voiture (Reed and Shep, voir par exemple [7]). On n'effectuera pas une synthèse globale du problème, on se contente ici de donner des conditions nécessaires sur la forme des trajectoires. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta, \\ \dot{y} = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $t \mapsto u(t)$  est une fonction mesurable du temps telle que  $|u(t)| \leq 1$ . Le système (4.1) représente une voiture qui avance à vitesse constante 1 au cours du temps, et on contrôle la courbure  $\dot{\theta}(t)$  de la trajectoire.

Etant donnés  $M_0 = (x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  et  $M_1 = (x_1, y_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ , on cherche la commande  $u(t)$  qui relie  $M_0$  à  $M_1$  en temps minimal. On sait que ce problème admet une solution optimale (application du théorème de Filipov, et application de résultats de contrôlabilité pour les systèmes quasi-affines). On cherche maintenant des conditions nécessaires sur une commande optimale qui relie  $M_0$  à  $M_1$ . On écrit le Hamiltonien avec convention de maximisation (pour une trajectoire normale) :

$$H(x, y, \theta, p_1, p_2, p_3, u) = p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta + p_3 u - 1$$

Les équations adjointes sont :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = p_1 \sin \theta - p_2 \cos \theta. \end{cases}$$

Par ailleurs, on trouve la loi de commande :

$$\begin{aligned} u(t) = +1 &\iff p_3(t) > 0, \\ u(t) = -1 &\iff p_3(t) < 0, \\ u(t) \in [-1, 1] &\iff p_3(t) = 0. \end{aligned}$$

Si  $p_3(t) = 0$  sur un intervalle, on obtient :

$$\begin{cases} p_1 \sin \theta(t) - p_2 \cos \theta(t) = 0, \\ p_1 \cos \theta(t) + p_2 \sin \theta(t) = 1, \end{cases}$$

ce qui montre que les arcs singuliers sont des segments de droite avec  $\theta(t)$  constant. A ce stade, on a montré qu'une trajectoire optimale est une concaténation de cercles ( $u = \pm 1$ ) ou de segments de droite ( $u(t) = 0$ ).

**Exemple 5.** Inégalité isopérimétrique. On cherche à montrer que parmi les courbes fermées dans le plan de longueur donnée, celle qui englobe la surface maximale est le disque. On admet que ce problème se reformule de la manière suivante (il suffit paramétrer une courbe fermée en polaire ou à l'aide de la fonction d'appui et d'exprimer l'aire et le périmètre par les fonctionnelles usuelles) :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{2\pi} (u^2(t) - h^2(t)) dt$$

où

$$\begin{cases} \dot{x} = h, & h(0) = h(2\pi), \\ \dot{h} = u, & x(0) = 0 \quad x(2\pi) = \pi. \end{cases}$$

et  $\mathcal{U} := \{u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable}\}$ . Noter qu'ici  $u(t) \in \mathbb{R}$  pour presque tout  $t$  (et donc  $u(t)$  ne prend pas ses valeurs dans un ensemble compact). En déduire que le long d'une trajectoire optimale on a  $\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), h(t), p_x(t), p_h(t), u(t)) = 0$  où  $p = (p_x, p_h)$  est le vecteur adjoint. En déduire que le contrôle vérifie  $\ddot{u} + u = 0$  puis le résultat.

**Exemple 6.** On considère le système dans  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1^2, \end{cases}$$

avec comme condition initiale  $(0, 0, 0)$  à l'instant 0. Le contrôle  $t \mapsto u(t)$  prend ses valeurs dans  $[-1, 1]$ . Soit  $T > 0$ . On s'intéresse dans cet exercice au problème de Mayer :

$$\max x_3(T)$$

L'existence d'un contrôle optimal découle du théorème de Phillipov (on vérifiera avec soin les différentes hypothèses). On transforme le problème en  $\min(-x_3(T))$ . En appliquant le PMP (condition de minimisation sur

$H$ ) on trouve que  $p_1$  est la fonction de commutation du problème. De plus,  $p_3 = -1$  et  $p_2(t) = t - T$ . De plus  $u(t) = -\text{sign}(p_1(t))$  avec la convention que  $\text{sign}(0) = [-1, 1]$ .

Supposons  $p_1(0) < 0$ . Alors, sur un voisinage de 0, on a  $u = 1$  et  $x_1(t) = t$ . D'où  $\dot{p}_1(t) = -t - T$ . Ainsi,  $p_1(t) = p_1(0) - \frac{1}{2}(t + T)^2 < 0$ , or  $p_1$  doit s'annuler au moins une fois sur  $[0, T]$  (car  $p_1(T) = 0$ ), d'où une contradiction.

Supposons  $p_1(0) > 0$ . Alors sur un voisinage de 0, on a  $u = -1$  d'où par intégration  $p_1(t) = 3(t - T/3)^2 + p_1(0) > 0$ , or  $p_1$  doit s'annuler au moins une fois sur  $[0, T]$  (car  $p_1(T) = 0$ ), d'où une contradiction.

On a donc nécessairement  $p_1(0) = 0$  et donc  $p_1(t) = (t - T/3)^2$  pour tout  $t \in [0, T/3]$ . La trajectoire vérifie ensuite  $p_1(t) = 0$  pour tout  $t \in [T/3, T]$  et donc  $p_2 + 2p_3x_1 = 0$  entraîne  $x_1(t) = (t - T)/2$  puis  $u(t) = 1/2$ . Il faut montrer que  $p_1$  doit nécessairement être nulle sur  $[T/3, T]$ . Si  $p_1$  devient strictement positive (ou négative) à un instant  $t_c \in ]T/3, T[$  alors on obtiendrait une contradiction en répétant les deux arguments précédents à l'instant  $t_c$  au lieu de l'instant 0 (cad on obtiendrait une contradiction avec  $p_1(T) = 0$ ).

Pour conclure, la trajectoire présente un arc bang  $u = -1$  sur  $[0, T/3]$  puis un arc singulier  $u = 1/2$  sur  $[T/3, T]$ . En particulier la valeur  $1/2$  n'est pas déterminée en maximisant le Hamiltonien associé au système.

## Références

- [1] J.D. BOISSONAT, The Shortest Path Synthesis for Non-holonomic Robots Moving Forwards [hal.inria.fr/inria-00074519/PS/RR-2153](http://hal.inria.fr/inria-00074519/PS/RR-2153), 1993.
- [2] F. BONNANS, *Lectures Notes in Optimal Control*, <http://www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans>
- [3] U. BOSCAIN, Y. CHITOUR, *Time Optimal Synthesis for Left-Invariant Control Systems on  $SO(3)$* , SIAM SICON, Journal on Control and Optimization, Vol. 44, No. 1 pp. 111-139, 2005.
- [4] A. BRESSAN, B. PICCOLI, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, Amer. Inst. of Mathematical Sciences, 2007.
- [5] L. CESARI, *Optimization-Theory and Applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer, 1983.
- [6] L. C. EVANS, R. F. GARIÉPY. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [7] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Les mathématiques du mieux faire, vol. 2, la commande optimale pour les débutants*, ellipses, 2010.
- [8] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1998.
- [9] E. TRELAT, *Contrôle Optimal, Théorie et Applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [10] Y. SACHKOV, *Maxwell strata in Euler's elastic problem*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), 169-234.

## 5 Appendice (autres exemples d'application du principe de Pontryagin)

### 5.1 Etude du problème de Zermelo

Cet exemple montre comment à l'aide du principe du maximum de Pontryagin on peut obtenir une synthèse optimale cad une loi de commande optimale par retour d'état (qui dépend de l'état). Les calculs sont relativement simples, néanmoins les arguments utilisés s'avèrent utiles dans de nombreux problèmes plan ou dans l'espace.

Soit  $\mathcal{U} := \{u : [0, +\infty) \rightarrow [-1, 1] ; \text{mes.}\}$ . Etant donnée une condition initiale  $(x_0, \pm 1)$ , on s'intéresse au problème suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{t(u)} dt,$$

le long des trajectoires du système

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y^2, \\ \dot{y} = u. \end{cases} \quad (5.1)$$

On applique le PMP au problème du temps minimal pour rejoindre la cible  $(0, 0)$ . On considèrera des trajectoires dans  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi, on n'impose pas aux trajectoires de ne pas franchir les rives  $y = \pm 1$  ! On écrit le Hamiltonien associé au système :

$$H(x, y, p_x, p_y, u) = p_x(1 - y^2) + p_y u + 1$$

Soit  $u$  un contrôle optimal,  $(x, y)$  la trajectoire associée et  $t(u)$  le temps mis par celle-ci pour rejoindre la cible. Il existe un vecteur adjoint  $p = (p_x, p_y)$  définie sur  $[0, t(u)]$  vérifiant

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = 2p_x y. \end{cases}$$

De plus, la condition de minimisation du Hamiltonien implique  $u(t) = -\text{sign}(p_y(t))$  presque partout si  $p_y(t) \neq 0$ , et  $u(t) \in [-1, 1]$  si  $p_y(t) = 0$ . Il n'y a pas de condition de transversalité sur le Hamiltonien car la cible est ponctuelle. Enfin, le long d'une extrémale, le Hamiltonien  $H$  vaut 0 ce qui donne l'égalité suivante sur  $[0, t(u)]$  :

$$p_x(1 - y^2) - |p_y| + 1 = 0. \quad (5.2)$$

Etudions le cas possible où  $p_y$  s'annule sur un intervalle de temps (ce que l'on appelle *arc singulier*).

**Lemme 5.1.** *Si  $p_y = 0$  sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  on a un arc singulier et la trajectoire vérifie  $y = 0$  et  $u = 0$  sur  $[t_1, t_2]$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $p_y = 0$  sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ . Alors compte tenu de la non-trivialité du vecteur adjoint (i.e. on a  $(p_x, p_y(\cdot)) \neq 0$ ) par (5.2), on a nécessairement  $y = 0$  et  $u = 0$  dans  $[t_1, t_2]$ .  $\square$

On s'intéresse aux trajectoires arrivant sur la cible sans commuter. On définit trois ensembles :

$$P_0 := \{(x, 0) ; x \leq 0\}, P_+ := \left\{ \left( y - \frac{y^3}{3}, y \right) ; y \geq 0 \right\}, P_- := \left\{ \left( -y + \frac{y^3}{3}, y \right) ; y \geq 0 \right\}.$$

**Lemme 5.2.** *Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Si une trajectoire optimale relie  $(x_0, y_0)$  à  $(0, 0)$  sans commuter, alors  $(x_0, y_0) \in P_0 \cup P_+ \cup P_-$ .*

*Démonstration.* Par le principe de Pontryagin, une trajectoire arrivant sans commuter sur la cible vérifie le long de la trajectoire soit  $u = 0$ , soit  $u = 1$ , soit  $u = -1$ . L'ensemble  $P_0$  correspond à l'arc singulier négatif. Soit  $x_+(\cdot)$  l'unique solution du système (5.1) rétrograde en temps avec  $u = 1$  partant de  $(0, 0)$ . Alors on vérifie aisément que  $P_- = \cup_{t \geq 0} x_+(t)$ . On procède de même avec  $P_+$ .  $\square$

Effectuons la synthèse du problème. En éliminant  $p_x$  par (5.2) on a pour  $y \neq \pm 1$  :

$$\dot{p}_y = \frac{2y}{1 - y^2} |p_y| - \frac{2y}{1 - y^2} \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) donne une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction de commutation. Cette équation est **fondamentale** pour résoudre le problème (et plus généralement pour les problèmes affines en la commande dans le plan ou dans  $\mathbb{R}^3$ ). Elle permet en effet d'éliminer les extrémales qui ont "trop" de commutation.

**Lemme 5.3.** (i) *Une trajectoire optimale ne peut switcher pour une valeur de  $y$  telle que  $|y| = 1$ .*  
(ii) *Une trajectoire optimale ne peut switcher de  $u = -1$  à  $u = 1$  pour une valeur de  $y$  telle que  $y > 1$ .*  
(iii) *Une trajectoire optimale ne peut switcher de  $u = -1$  à  $u = 1$  pour une valeur de  $y$  telle que  $y < -1$ .*

*Démonstration.* Montrons (i). Si on a  $p_y(t_0) = 0$  et  $|y| = 1$ , on obtient directement une contradiction avec (5.2). Montrons (ii). Soit  $t_0$  un point de commutation de  $u = -1$  à  $u = +1$ . On a donc  $p(t) \geq 0$  dans un voisinage à gauche de  $t_0$  et  $p(t_0) = 0$ . Par conséquent, on a nécessairement  $\dot{p}(t_0^-) \leq 0$ . Or par (5.3) on a  $\dot{p}(t_0) = -\frac{2y(t_0)}{1-y(t_0)^2}$  avec  $y(t_0) > 1$  ce qui implique  $\dot{p}(t_0) > 0$  et une contradiction. La preuve de (iii) est analogue.  $\square$

**Lemme 5.4.** (i) Soit  $x_0 < -\frac{2}{3}$ . Alors, depuis la condition initiale  $(x_0, -1)$  le contrôle optimal vérifie  $u = 1$  jusqu'à rejoindre l'arc singulier  $y = 0$ .

(ii) Soit  $x_0 > -\frac{2}{3}$ . Alors, depuis la condition initiale  $(x_0, 1)$  le contrôle optimal vérifie  $u = -1$  jusqu'à rejoindre l'arc singulier  $y = 0$ .

*Démonstration.* On procède comme dans la preuve du lemme 5.3. Pour (i) Si la trajectoire commute à  $u = -1$  avant d'atteindre l'arc singulier  $y = 0$ , alors elle doit nécessairement retraverser la droite  $y = -1$  (utiliser (5.3)). Cette extrémale n'est pas optimale. En effet, on peut construire une extrémale qui rejoint la cible en un temps inférieur (switcher à  $u = -1$  avant d'atteindre la droite  $y = -1$  par exemple).  $\square$

**Théorème 5.1.** (i) Etant donnée une condition initiale  $(x_0, 1)$  avec  $x_0 > -\frac{2}{3}$ , alors le contrôle optimal vérifie  $u = 1$  jusqu'à  $P_-$ , puis  $u = -1$  jusqu'à la cible.

(ii) Etant donnée une condition initiale  $(x_0, -1)$  avec  $x_0 > -\frac{2}{3}$ , alors le contrôle optimal vérifie  $u = -1$  jusqu'à  $P_+$ , puis  $u = +1$  jusqu'à la cible.

(iii) Etant donnée une condition initiale  $(x_0, \pm 1)$  avec  $x_0 \leq \frac{2}{3}$ , alors le contrôle optimal vérifie  $u = \mp 1$  jusqu'à atteindre l'arc singulier, puis  $u = 0$  jusqu'à la cible.

*Démonstration.* Le point (i) est une conséquence du lemme 5.3 (i). Si la trajectoire franchit  $P_-$  sans switcher, alors nécessairement son temps pour aller à la cible sera strictement plus grand que le temps de la trajectoire restant sur  $P_-$ . En effet, la trajectoire franchira nécessairement la droite  $y = 1$  avant de rejoindre la cible. Or, le temps d'une trajectoire reliant la droite  $y = 1$  à la droite  $y = 0$  en restant dans la bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  est toujours supérieure à 1. On procède de même pour (ii).  $\square$

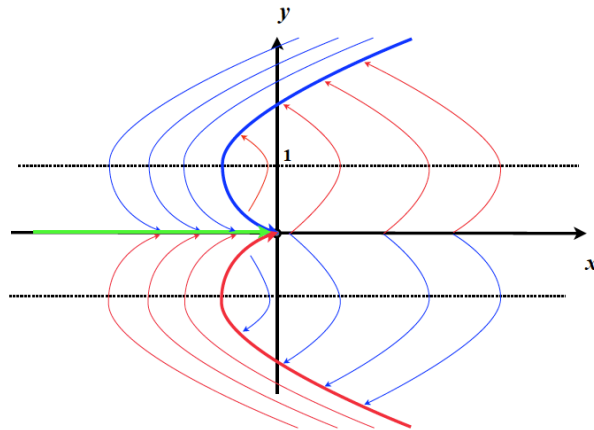


FIGURE 1 – Synthèse optimale pour le problème de Zermelo (source C. Lobry)

### A faire en exercice.

- 1) Compléter la preuve du lemme 5.4.
- 2) Etudier le cas  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda = 1$ .

## 5.2 Principe bang-bang pour les systèmes linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$

Le but de cet exemple est de montrer comment à l'aide du principe de Pontryagin on peut ramener un problème de temps minimal pour un système linéaire en l'état et le contrôle à la résolution d'un problème aux deux bouts. Cet exemple utilise fortement la linéarité du système.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ ,  $U := [-1, 1]^m$ ,  $\mathcal{U} := \{u : [0, \infty) \rightarrow U ; \text{mes.}\}$ , et soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe fermé non vide. On considère le problème de temps minimal pour rejoindre la cible  $S$ . Etant donnée une condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on cherche un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  qui minimise le temps  $t(u)$  parmi les trajectoires solutions du système

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

qui relie  $x_0$  à la cible  $S$ . Autrement dit, le problème est le suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} t(u), \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t(u)) \in S.$$

On suppose que pour tout  $1 \leq i \leq m$ , la famille  $\{b_i, \dots, A^{n-1}b_i\}$  engendre  $\mathbb{R}^n$  (hypothèse usuelle, condition de Kalman...).

**Théorème 5.2.** Soit  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$  un contrôle optimal et  $x$  la trajectoire associée définie sur  $[0, t(u)]$ . Alors on a :

$$u_i(t) = -\text{sign} \langle p(t), b_i \rangle, \quad \text{p.p. } t \in [0, t(u)], \quad (5.4)$$

où  $t \mapsto p(t)$  désigne l'état adjoint associé à la trajectoire  $x$ .

*Démonstration.* On note  $A^T$  la transposée de  $A$  (on rappelle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on a  $\langle A^T x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ) et soit  $N_S(x)$  le cône normal à  $C$  au point  $x$ . Soit  $H = \langle p, Ax + Bu \rangle + 1 = \langle A^T p, x \rangle + \langle p, Bu \rangle + 1$  le Hamiltonien associé au système. Si  $(x, u)$  est optimale, alors il existe une application  $p : [0, t(u)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue telle que

$$\dot{p} = -A^T p, \quad (5.5)$$

et de plus on a la condition de transversalité  $p(t(u)) \in N_C(x(t(u)))$ . De plus, on a la condition de maximisation :

$$\langle p(t), Bu(t) \rangle = \min_{v \in U} \langle p(t), Bv \rangle$$

ou encore :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \langle p(t), b_i \rangle u_i(t) = \min_{v \in U} \sum_{1 \leq i \leq m} \langle p(t), b_i \rangle v_i = \sum_{1 \leq i \leq m} \min_{v_i \in [-1, 1]} \langle p(t), b_i \rangle v_i$$

en utilisant que les  $m$  contrôles sont indépendants dans la dernière égalité. Ainsi, pour montrer (5.4), il suffit de montrer que pour tout  $1 \leq i \leq m$ , alors  $t \mapsto \langle p(t), b_i \rangle$  est presque partout non nul. Supposons donc qu'il existe  $1 \leq i \leq m$  et  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t(u)$  tel que pour tout  $t \in [t_1, t_2]$  on ait  $\langle p(t), b_i \rangle = 0$ . En intégrant (5.5) on obtient

$$p(t) = e^{-(t-t_2)A^T} p(t_2).$$

La condition  $\langle p(t), b_i \rangle = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  s'écrit alors  $\langle p(t_2), e^{(t-t_2)A} b_i \rangle = 0$  pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ . Ainsi en dérivant  $n - 1$  fois cette expression par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\left\langle p(t_2), e^{(t-t_2)A} A^k b_i \right\rangle = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Ainsi, pour  $t = t_2$ , on obtient donc

$$\langle p(t_2), A^k b_i \rangle = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Ceci contredit l'hypothèse faite sur les vecteurs  $b_i$ . D'où le résultat.  $\square$

On est donc ramené à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ \dot{p}(t) &= -A^T p(t), & p(T) \in N_S(x(T)), \\ u_i(t) &= -\text{sign} \langle p(t), b_i \rangle \end{cases}$$

On peut utiliser des méthodes de tir afin de résoudre numériquement ce problème.