Principe du Maximum de Pontryagin et exemple

Cette feuille a pour but de donner un bref résumé du principe du maximum de Pontryagin dans un cadre simplifié. Ce principe (développé initialement dans [3]) est couramment utilisé dans de nombreux domaines pour calculer effectivement une solution d'un problème de contrôle optimal. Il permet d'écrire une condition d'optimalité pour un minimum du problème comme un système différentiel avec conditions aux limites. Ce dernier est souvent difficile à résoudre (c'est ce qu'on appelle faire la synthèse), mais il conduit également à des outils numériques pour le résoudre (méthode de tir). On conseille [4] pour une présentation synthétique, pédagogique du principe avec de nombreux exemples. Pour une preuve de ce principe on se réfère à [1] ou [2].

On considère une dynamique $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact non-vide et soit $T > 0$. Soit ℓ et ϕ deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On effectue les hypothèses suivantes (voir par exemple [1] pour ces hypothèses ou bien [2]):

- $\exists c_1 > 0\ \forall u \in U\ \forall (y,z) \in \mathbb{R}^n\ |f(y,u) - f(z,u)| \leq c_1 |y - z|$
- $\forall y \in \mathbb{R}^n\ \exists \alpha(y) \geq 0\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^m\ |f(y,u) - f(y,v)| \leq \alpha(y)|u - v|$ où $r \longmapsto \alpha(r)$ est croissante.
- f_y est continue et : $\exists c_2 > 0\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^m\ |f(y,u) - f(y,v)| \leq c_2 |u - v|$.
- ℓ et ϕ sont de classe C^1.

On considère le problème de contrôle optimal suivant (appelé problème de Bolza):

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(x_u(t), u(t))dt + \phi(x_u(T))$$

où $x_u(\cdot)$ est l'unique solution du problème de Cauchy sur $[0,T]$:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{0.1}$$

et $\mathcal{U} := \{u : [0, T_u] \to U\ ;\ u \text{ mes.}\}$ est l'ensemble des contrôles admissibles. On suppose l'existence d'un contrôle optimal $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (voir le théorème de Filippov pour cela [2]). Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ le Hamiltonien associé au problème et défini par:

$$H(x,p,u) = p \cdot f(x,u) + \ell(x,u).$$

Le principe du minimum de Pontryagin (PMP) s'exprime ainsi (on parle de minimum si la condition de minimisation (0.3) est exprimée à l'aide d'un minimum, sinon parle de maximum).

Théorème 0.1. *Soit $u(\cdot)$ un contrôle optimal et x la trajectoire associée sur $[0,T]$ partant de x_0. Alors:*

- *Il existe une application $p : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue vérifiant l'équation adjointe.*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \tag{0.2}$$

- *On a la condition terminale $p(T) = \nabla \phi(x(T))$.*
- *Le contrôle $u(\cdot)$ vérifie la condition de minimisation:*

$$u(t) \in \arg\min_{\omega \in U} H(x(t), p(t), \omega) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \tag{0.3}$$

Voici quelques remarques :

- On appelle extrémale un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ vérifiant l'équation état-adjoint (0.1)-(0.2) ainsi que la condition de minimisation du Hamiltonien (0.3).
- Une extrémale du problème ne correspond pas nécessairement à une trajectoire optimale du problème initial (le PMP est seulement une condition nécessaire du premier ordre). On parle d'extrémale optimale lorsque celle-ci fournit un contrôle optimal.

- Le système est autonome, donc le Hamiltonien est conservé le long d'une extrémale:

$$\forall t \in [0,T], \quad H(x(t),p(t),u(t)) = Cst.$$

De plus si le temps final est libre et que le système est autonome alors $H(x(t),p(t),u(t)) = 0 \ \forall t \in [0,T]$.

Etudions un exemple. On considère le problème de temps minimal suivant. Etant donné une condition initiale (x_1^0, x_2^0) on cherche un contrôle $t \longmapsto u(t) \in [-1,1]$ telle que l'unique solution de

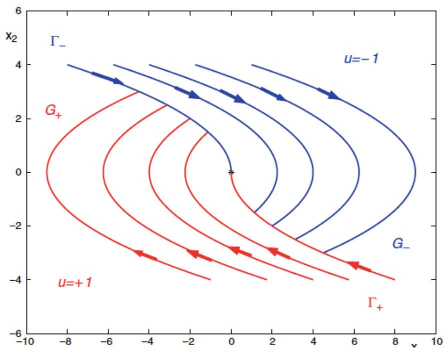
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

relie (x_1^0, x_2^0) à l'origine $(0,0)$ en temps minimal T_u. Ecrivons le PMP. On a $H(x_1,x_2,p_1,p_2,u) = p_1x_2+p_2u+1$. D'où les équations adjointes $\dot{p}_1 = 0$ et $\dot{p}_2 = -p_1$. Ainsi, $p_2(t) = -p_1t + p_2^0$. Si p_2 est identiquement égale à zéro, alors $p_1 = p_2^0 = 0$ donc on a une contradiction avec $H = 0$ (on rappelle que le système est autonome et que le temps final est libre donc $H = 0$ le long d'une extrémale). Ainsi, p_2 n'est pas identiquement égale à zéro. On a deux cas : comme p_2 est affine, soit p_2 s'annule une seule fois, soit p_2 ne s'annule jamais.
- cas où $p_2(t) > 0 \ \forall t \in [0,T_u]$. Alors la condition de minimisation donne $u = -1$. Ainsi, l'unique solution possibilité pour (x_1^0, x_2^0) est d'être sur la demi-parabole Γ_- définie par $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ avec $x_2 > 0$ (car x_2 décroît).
- cas où $p_2(t) < 0 \ \forall t \in [0,T_u]$. Alors la condition de minimisation donne $u = +1$. Ainsi, l'unique solution possibilité pour (x_1^0, x_2^0) est d'être sur la demi-parabole Γ_+ définie par $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ avec $x_2 < 0$ (car x_2 décroît).
- cas où $p_2(t)$ **a un seul et unique zéro sur** $[0,T_u]$. Dans ce cas la trajectoire commute une seule et unique fois, soit de $u = -1$ à $u = +1$ soit de $u = +1$ à $u = -1$. Il est à noter que comme la trajectoire arrive à l'origine, alors dans le plan de phase, la commutation se trouve soit sur Γ_- soit sur Γ_+. Si la condition initiale se trouve au-dessus de $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ alors on a $u = -1$ jusqu'à la commutation sur Γ_+. Si la condition initiale se trouve en-dessous de $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ alors on a $u = +1$ jusqu'à la commutation sur Γ_-.

La figure ci-dessous résume ce que l'on appelle une synthèse optimale. Pour une condition initiale fixée, le contrôle optimal est $u(t) = \pm 1$ puis $u(t) = \mp 1$ selon la position de la condition initiale par rapport aux deux courbes. Si la condition initiale est sur Γ_- on a $u(t) = -1 \ \forall t \in [0,T_u]$ et si elle est sur Γ_+ alors on a $u(t) = +1$ $\forall t \in [0,T_u]$. On a ainsi un contrôle optimal en **boucle ouverte** i.e. $u = u(t)$. Néanmoins on voit que la figure ci-dessous fournit ce que l'on appelle un **feedback optimal** (i.e. un contrôle optimal en boucle fermé) :

$$\mathbf{u}[x_1^0, x_2^0] = \begin{cases} -1 & x_2^0 > \gamma(x_1^0) \quad \text{ou} \quad x_1^0 = -\frac{1}{2}(x_2^0)^2 \text{ et } x_2^0 > 0 \\ +1 & x_2^0 < \gamma(x_1^0) \quad \text{ou} \quad x_1^0 = +\frac{1}{2}(x_2^0)^2 \text{ et } x_2^0 < 0, \end{cases}$$

où $x_1^0 \longmapsto \gamma(x_1^0)$ est une équation du graphe de $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ dans le plan de phase (x_1, x_2). Le feedback dépend de l'état x du système, d'où la notation $u[\cdot]$ pour distinguer les contrôles en boucles fermées et les contrôles en boucles ouvertes $u(\cdot)$.



References

[1] J. F. Bonnans, *Lecture Notes in Optimal Control*
`http://www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes/oc/ocbook.pdf`

[2] A. Bressan, B. Piccoli, *Introduction to Mathematical Control Theory*, AIMS Ser. Appl. Math., vol. 2 (2007).

[3] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *Mathematical theory of optimal processes*, The Macmillan Company, 1964.

[4] E. Trélat, *Contrôle optimal et applications*, Vuibert, 2005,
`https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/`