Université de Montpellier, Année 2015/16

HLMA301, Algèbre lineaire 2

TD feuille $n°1$: *Algèbre de polynômes*

Espace linéaire $\mathbb{K}_n[z]$

1.

a Soit $a \in \mathbb{K}$ et on considère la suite suivante des polynômes

$$\{p_k(z) = (z-a)^k;\ k = 0, 1, ..., n\}.$$

Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[z]$.

b On prend $f(z) \in \mathbb{K}_n[z]$ un plynôme unitaire de degré n et on pose

$$\{p_k(z) = f^{(k)}(z);\ k = 0, 1, ..., n\}.$$

Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[z]$.

c On considère la fonction $f(z) = \mathbf{e}^z$ et on note

$$T_k(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{z^i}{i!}$$

son k-em polynôme de Taylor en 0, $k = 0, 1, ..., n$. Montrer que $\{T_0(z), T_1(z), ..., T_n(z)\}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[z]$.

d Est-ce qu'on peut remplacer $\mathbf{e}^z$ dans **c** par $\sin(z)$; par $\cos(z)$; par $(1-z)^{\frac{1}{n}}$; par $\ln(1-z)$? Justifier la réponce.

f A tout $p(z) \in \mathbb{K}_n[z]$ on associe le vecteur

$$v_p = (p(0), p'(0), ..., p^n(0)) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Montrer que les polynômes $\{p_1(z), p_2(z), ..., p_{n+1}(z)\}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[z]$ si et seulement si les vecteurs associés $\{v_{p_1}, v_{p_2}, ..., v_{p_{n+1}}\}$ forment une base de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Division Euclidienne

2.

Diviser le polynôme $P(z)$ par $M(z)$, trouver le reste :

a $P(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 6z + 8$ et $M(z) = z - 1$. Trouver $P(1)$.
b $P(z) = 2z^5 - 5z^3 - 8z$ et $M(z) = z + 3$. Trouver $P(-3)$.
c $P(z) = 3z^5 + z^4 - 19z^2 - 13z - 10$ et $M(z) = z - 2$. Trouver $P(2)$.
d $P(z) = 4z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6$ et $M(z) = z^2 - 3z + 1$.
f $P(z) = z^3 - 3z^2 - z - 1$ et $M(z) = 3z^2 - 2z + 1$.

3.

Trouver $P(z_0)$:

a $P(z) = z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 10z + 16,\quad z_0 = 4.$
b $P(z) = z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 4z + 1,\quad z_0 = -1.$
c $P(z) = 5z^5 - 19z^3 - 7z^2 + 9z + 3,\quad z_0 = 2.$

4.

Développer $P(z)$ en puissances de $z - 2$, trouver les dérivées de $P(z)$ en 2.

a $P(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 50z + 90.$
b $P(z) = z^5 - 4z^3 + 6z^2 - 8z + 10.$

5.
Trouver tous les $P(z) \in \mathbb{K}[z]$ divisibles par $P'(z)$.

PGCD de deux polynômes

6.
Trouver le PGCD de deux polynômes suivants :

a $z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 1 \quad \text{et} \quad z^3 + z^2 - z - 1.$
b $z^6 + 2z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 8z - 5 \quad \text{et} \quad z^5 + z^2 - z + 1.$
c $z^5 + 3z^2 - 2z + 2 \quad \text{et} \quad z^6 + z^5 + z^4 - 3z^2 + 2z - 6.$
d $z^4 + z^3 - 4z + 5 \quad \text{et} \quad 2z^3 - z^2 - 2z + 2.$

7.
Trouver le PGCD de deux polynômes $M(z)$ et $N(z)$ et son expression linéaire en $M(z)$ et $N(z)$:

a $M(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 - 4z - 2 \quad \text{et} \quad N(z) = z^4 + z^3 - z^2 - 2z - 2.$
b $M(z) = 3z^3 - 2z^2 + z + 2 \quad \text{et} \quad N(z) = z^2 - z + 1.$

8.
Ecrire $P(z)$ comme une expression linéaire de $M(z)$ et $N(z)$: $P(z) = A(z)M(z) + B(z)N(z)$

a $P(z) = 2z - 1, \quad M(z) = z^3 \quad \text{et} \quad N(z) = (z-1)^2.$
b $P(z) = 1, \quad M(z) = (z-1)(z-2) \quad \text{et} \quad N(z) = z(z+1)(z+2).$