

HLMA301, Algèbre linéaire 2
TD feuille n°2 : Algèbre de polynômes

Multiplicité des racines

1. Trouver multiplicité de z_0 comme racine du polynôme $f(z)$:

- a** $f(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8, z_0 = 2$;
- b** $f(z) = z^5 + 7z^4 + 16z^3 + 8z^2 - 16z - 16, z_0 = -2$;
- c** $f(z) = 3z^5 + 2z^4 + z^3 - 10z - 8, z_0 = -1$;
- d** $f(z) = z^5 - 6z^4 + 2z^3 + 36z^2 - 27z - 54, z_0 = 3$;

2. Trouver a tel que le polynôme $z^5 - az^2 - az + 1$ admet $z_0 = -1$ comme racine de multiplicité ≥ 2 .

3. Trouver a et b tels que le polynôme $az^{n+1} + bz^n + 1$ est divisible par $(z - 1)^2$.

4. Trouver a et b tels que le polynôme $z^5 + az^3 + b$ possède une racine double non nulle.

5. Montrer que le polynôme

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

n'a pas des racines doubles.

Facteurs irréductibles

6. Décomposer les polynômes suivants en facteurs linéaires sur \mathbb{C} :

- a** $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$;
- b** $z^4 + 4$;
- c** $z^6 + 27$;
- d** $z^{2n} + z^n + 1$;
- e** $\cos(n \arccos(x))$;
- f** $\sin((2n + 1) \arcsin(x))$.

7. Décomposer les polynômes suivants en facteurs linéaires et facteurs carrés irréductibles sur \mathbb{R} :

- a** $z^6 + 27$;
- b** $z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 1$;
- c** $z^4 - az^2 + 1, (|a| < 2)$;
- d** $z^{2n} + z^n + 1$;
- e** $z^6 - z^3 + 1$;
- f** $z^{12} + z^8 + z^4 + 1$.

8. Trouver $P(z)$ unitaire à coefficients complexes de degré minimal possédant des racines suivantes :

- a** 1 est une racine double et 2, 3 et $1 + i$ sont des racines simples ;
- b** i est une racine double et $-1 - i$ est une racine simple.

9. Trouver $P(z)$ unitaire à coefficients réels de degré minimal possédant des racines suivantes :

a 1 est une racine double et 2, 3 et $1 + i$ sont des racines simples ;

b i est une racine double et $-1 - i$ est une racine simple.

10. Montrer que le polynôme $z^{3m} + z^{3n+1} + z^{3k+2}$ ($m > n > k$) est divisible par le $z^2 + z + 1$.

11. Trouver m tel que $(z + 1)^m - z^m - 1$ soit divisible par $(z^2 + z + 1)^2$.

12. Trouver m, n et k tels que $z^{3m} - z^{3n+1} + z^{3k+2}$ ($m > n > k$) soit divisible par $z^2 - z + 1$.

13. Trouver PGCD de deux polynômes suivants :

a $(z - 1)^3(z + 2)^2(z - 3)(z + 4)$ et $(z - 1)^2(z + 2)(z + 5)$;

b $(z - 1)(z^2 - 1)(z^3 - 1)(z^4 - 1)$ et $(z + 1)(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z^4 + 1)$;

c $z^m - 1$ et $z^n - 1$;

d $z^m + 1$ et $z^n + 1$.