

**HLMA301, Algèbre linéaire 2**  
TD feuille n°2 : Algèbre de polynômes

**Multiplicité des racines**

1. Trouver multiplicité de  $z_0$  comme racine du polynôme  $f(z)$  :

- a**  $f(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8, z_0 = 2$  ;
- b**  $f(z) = z^5 + 7z^4 + 16z^3 + 8z^2 - 16z - 16, z_0 = -2$  ;
- c**  $f(z) = 3z^5 + 2z^4 + z^3 - 10z - 8, z_0 = -1$  ;
- d**  $f(z) = z^5 - 6z^4 + 2z^3 + 36z^2 - 27z - 54, z_0 = 3$  ;

2. Trouver  $a$  tel que le polynôme  $z^5 - az^2 - az + 1$  admet  $z_0 = -1$  comme racine de multiplicité  $\geq 2$ .

3. Trouver  $a$  et  $b$  tels que le polynôme  $az^{n+1} + bz^n + 1$  est divisible par  $(z - 1)^2$ .

4. Trouver  $a$  et  $b$  tels que le polynôme  $z^5 + az^3 + b$  possède une racine double non nulle.

5. Montrer que le polynôme

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

n'a pas des racines doubles.

**Facteurs irréductibles**

6. Décomposer les polynômes suivants en facteurs linéaires sur  $\mathbb{C}$  :

- a**  $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$  ;
- b**  $z^4 + 4$  ;
- c**  $z^6 + 27$  ;
- d**  $z^{2n} + z^n + 1$  ;
- e**  $\cos(n \arccos(x))$  ;
- f**  $\sin((2n + 1) \arcsin(x))$ .

7. Décomposer les polynômes suivants en facteurs linéaires et facteurs carrés irréductibles sur  $\mathbb{R}$  :

- a**  $z^6 + 27$  ;
- b**  $z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 1$  ;
- c**  $z^4 - az^2 + 1, (|a| < 2)$  ;
- d**  $z^{2n} + z^n + 1$  ;
- e**  $z^6 - z^3 + 1$  ;
- f**  $z^{12} + z^8 + z^4 + 1$ .

8. Trouver  $P(z)$  unitaire à coefficients complexes de degré minimal possédant des racines suivantes :

- a** 1 est une racine double et 2, 3 et  $1 + i$  sont des racines simples ;
- b**  $i$  est une racine double et  $-1 - i$  est une racine simple.

**9.** Trouver  $P(z)$  unitaire à coefficients réels de degré minimal possédant des racines suivantes :

**a** 1 est une racine double et 2, 3 et  $1 + i$  sont des racines simples ;

**b**  $i$  est une racine double et  $-1 - i$  est une racine simple.

**10.** Montrer que le polynôme  $z^{3m} + z^{3n+1} + z^{3k+2}$  ( $m > n > k$ ) est divisible par le  $z^2 + z + 1$ .

**11.** Trouver  $m$  tel que  $(z + 1)^m - z^m - 1$  soit divisible par  $(z^2 + z + 1)^2$ .

**12.** Trouver  $m, n$  et  $k$  tels que  $z^{3m} - z^{3n+1} + z^{3k+2}$  ( $m > n > k$ ) soit divisible par  $z^2 - z + 1$ .

**13.** Trouver PGCD de deux polynômes suivants :

**a**  $(z - 1)^3(z + 2)^2(z - 3)(z + 4)$  et  $(z - 1)^2(z + 2)(z + 5)$  ;

**b**  $(z - 1)(z^2 - 1)(z^3 - 1)(z^4 - 1)$  et  $(z + 1)(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z^4 + 1)$  ;

**c**  $z^m - 1$  et  $z^n - 1$  ;

**d**  $z^m + 1$  et  $z^n + 1$ .