



MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques

École doctorale Matisse

présenté par

Michele L. Bolognesi

soutenue le 29 Novembre 2013

**Fibrés vectoriels, espaces de
modules et catégories dérivées.**

Composition du jury :

Laurent Manivel	Université de Grenoble 1
Alexander Kuznetsov	Steklov Mathematical Institute Moscow
Christophe Mourougane	Université de Rennes 1
Julien Sebag	Université de Rennes 1
Paolo Stellari	Università di Milano
Claire Voisin	École Polytechnique

Rapporteurs :

Igor Dolgachev	University of Michigan
Alexander Kuznetsov	Steklov Mathematical Institute Moscow
Laurent Manivel	Université de Grenoble 1

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Espaces de modules et GIT	5
1.2	Catégories dérivées et rationalité des variétés projectives	8
2	Espaces de modules et quotients GIT	17
2.1	Fibrés de rang 2 et $\mathcal{M}_{0,n}$	17
2.2	Systèmes cohérents et $(\mathbb{P}^n)^d // SL(n+1)$	21
2.3	Compactifications de $\mathcal{M}_{0,n}$ et GIT	23
2.4	Formules de factorisation	26
3	Catégories dérivées et rationalité	33
3.1	Décompositions semi-orthogonales de $\mathbf{D}^b(X)$	33
3.2	Le cas des fibrés en coniques	35
3.3	Représentabilité catégorique	39
3.4	Fibrations en intersections de quadriques	44
3.5	Hypersurfaces Cubiques contenant un plan et une Del Pezzo	48
4	Appendices	53
4.1	Appendice A	53
4.2	Appendice B	54
4.3	Appendice C	57

Remerciements/Acknowledgments.

Here's a little international *interludio* because of the many different nationalities involved in these acknowledgements. First of all I want to thank the referees of this thesis : Igor Dolgachev, Alexander Kuznetsov and Laurent Manivel, for their invaluable work and the professionalism of their reports. Then I would like to send a warm acknowledgement to Christophe Mourougane, Julien Sebag, Paolo Stellari and Claire Voisin for accepting to be part of my Jury : I am very honoured that they took the time to come to Rennes to attend my defense.

All my thanks go to my invaluable coauthors and collaborators : Pietro, Angelo, Alberto, Sonia, Marcello, Asher, Tony, Noah, Daniele, Michael and Alex. I have spent wonderful times working and discussing with them. Most of what I know, I learnt from them. A special mention for Marcello and Asher : our discussion on Skype are among the most vivid mathematical memories of the last few years and both of them have had, in different ways, a deep influence on my mathematical growth.

A special thanks goes out to the two people without whom I would not be a mathematician : Bert Van Geemen and Christian Pauly. A warm acknowledgment to Christoph Sorger, Alessandro Verra, Angelo Vistoli, Igor Dolgachev and Gabi Farkas, who have always followed and encouraged me in the distance. A lot of friends have been important in my career up to now, and their support, guidance, friendship and consultancy cannot be underestimated. I think about Farrell and Gisella, Olivier, Arvid, Samuel, Alessandra, Damiano, Dajano, Dimitri, Alessandro, Jan, Angela, Francesco, Ernesto, Max, Giorgio, Cinzia, Qing, Gianluca, Carlo, Paolo, Emanuele, Martí and many many more that I am sure I am forgetting at the moment of writing this note, in a bit of a hurry. A very special mention for the two *equipes* I consider myself belonging to : *géométrie algébrique* and *géométrie analytique* . They have built a warm and pleasant work environment around me that has made our department a very nice place to be, not very much what you would expect from your office. Special mention for Matthieu and Christophe, who are now used to my disturbing incursions in their offices at any time of the day.

Under the editorial point of view : big thanks to Marcello Bernardara and Roland Abuaf, for inspiring chunks of this writing, I am grateful to Laurent Moret-Bailly, Frank Loray, Olivier Serman, Robin Tournemenne, and again Roland for some editing.

I want to thank heartily my family, for encouragement, support and love, in the good as in the bad times. Last but definitely not least, my biggest thank is for the person who made this year very special and to whom this manuscript is dedicated :

a Carolina.

Chapitre 1

Introduction

Ce texte est une présentation de mes travaux en vue de mon habilitation à diriger des recherches en sciences. Depuis le début de ma thèse, mes axes de recherche tournent autour de la géométrie algébrique. Mon doctorat s'est notamment déroulé dans le domaine des espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes [25], des variétés abéliennes et des fonctions thêta [24]. Ensuite, tout en continuant à travailler sur les fibrés vectoriels [5] et sur les systèmes cohérents [27], je me suis intéressé aux espaces de modules de courbes, à leur théorie d'intersection [31], à leur topologie [30] et à leurs compactifications modulaires [26], [28]. D'autre part, j'ai aussi appris certains aspects de la théorie des catégories dérivées, notamment en connexion avec les problèmes de rationalité des variétés projectives et des espaces de modules de faisceaux [17], [18], [7], [8].

Ce mémoire ne traitera pas de tous mes articles et j'ai dû douloureusement mettre de côté certains auxquels je suis très attaché afin de rendre le sujet le plus cohérent et lisible possible, même si le résultat final est encore sûrement très perfectible. J'ai développé deux thèmes principaux : d'un côté les espaces de modules, leurs compactifications et les constructions GIT corrélées, de l'autre, les catégories dérivées des variétés projectives, leurs décompositions semi-orthogonales et le lien avec la géométrie birationnelle et les problèmes de rationalité. Je vais introduire ces sujets exactement dans cet ordre, qui, par ailleurs, suit aussi l'ordre historique de parution de ces mêmes techniques dans la géométrie algébrique moderne.

J'ai dû aussi faire un certain nombre de choix quant aux preuves présentées. J'ai décidé de ne pas creuser les détails, mais plutôt d'esquisser quelques preuves qui me semblent plus significatives pour l'originalité, la complexité ou l'importance. Bien entendu, le lecteur pourra n'y trouver aucune des trois caractéristiques citées. Sauf indication contraire, l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 1 d'un espace vectoriel V .

1.1 Espaces de modules et GIT

Le problème de la construction des espaces qui paramètrent toutes les classes d'isomorphie de certains objets géométriques est un problème classique en géométrie algébrique. Déjà les travaux de Riemann au XIX^{ème} siècle considéraient des problèmes de base concernant ces espaces, comme par exemple leur dimension. Ensuite, les outils d'étude de la géométrie de ces objets se sont développés de façon extraordinaire et l'exigence même de construire des *espaces de modules* de plus en plus efficaces a eu un impact très important sur la production

de nouvelles techniques. Une idée très générale, qui est très souvent utilisée, est de traduire la donnée d'un objet géométrique en un ensemble de données plus simples qui le définissent, en perdant l'univocité de la construction. Par exemple, un ensemble de six points sur \mathbb{P}^1 définit une courbe de genre 2 de manière naturelle, mais si de tels ensembles sont projectivement équivalents, les courbes correspondantes sont isomorphes. Un espace de modules paraît donc souvent comme un quotient, dans un sens à définir, d'une variété par rapport à l'action d'un groupe algébrique. Dans l'exemple des courbes de genre deux il s'agit du quotient du produit symétrique de 6 copies de \mathbb{P}^1 par rapport à l'action diagonale de $PGL(2)$ sur \mathbb{P}^1 . La nécessité de donner du sens à l'opération de quotient dans la catégorie des variétés algébriques a motivé les développements de la théorie des invariants. Presque tous les espaces de modules présentés dans le deuxième chapitre de ce mémoire sont réalisés par le biais de la *théorie géométrique des invariants* (GIT). Un moyen encore plus avancé est fourni par les champs algébriques. J'ai aussi utilisé cet outil dans les articles [31] et [30], mais il ne seront pas présentés dans ce mémoire. Tout au long du chapitre 2 nous travaillerons sur le corps des complexes \mathbb{C} .

Un problème qui avait beaucoup attiré mon attention pendant ma thèse est la rationalité des espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe algébrique lisse. C'est pourquoi, pendant mes années de post-doctorat, j'ai partiellement continué à étudier la géométrie de ces espaces. Mon intention était de généraliser les résultats de [25], où j'avais construit une famille de coniques avec des propriétés remarquables au-dessus de $SU_C(2)$ (l'espace de modules de fibrés de rang deux semi-stables à déterminant trivial) pour une courbe lisse de genre 2. J'ai construit une telle généralisation pour les courbes de genre supérieur à 2 dans [5]. Le rôle des coniques dans cet article est joué par des courbes rationnelles avec des points marqués. Cela permet de définir, via la propriété universelle des espaces de modules, des applications birationnelles entre l'espace de modules des courbes marquées $\mathcal{M}_{0,2g}$ et certaines sous-variétés de $SU_C(2)$. Un résumé synthétique du résultat principal de [5] est le suivant :

Théorème 1.1.1. (cf. [5], *Thm. 1.1*) *L'espace de modules $SU_C(2)$ est birationnellement équivalent à une fibration en espaces de modules $\mathcal{M}_{0,2g}$ au-dessus de \mathbb{P}^g .*

Le lecteur pourra trouver plus de résultats dans la section 2.1.

L'article [5] a donné suite à deux articles connexes qui sont les [26] et [27]. Dans le premier article, j'ai développé une observation que j'avais faite dans [5]. Notamment, j'avais remarqué qu'il existe certains systèmes linéaires polynomiaux sur \mathbb{P}^{2n-2} qui contractent toutes les courbes rationnelles normales qui passent par $2n$ points en position générale, ce qui leur donne une interprétation modulaire. Il s'agit du système linéaire $|\Omega_{2n}|$ des formes de degré n qui s'annulent avec multiplicité $n-1$ sur les $2n$ points généraux. Un calcul facile montre que les courbes rationnelles normales décrites ci-dessus sont contractées par ce système linéaire. Cela produit une sorte de famille universelle (mais non plate) au-dessus de l'image de l'application $\varphi_{\Omega_{2n}}$ définie par ce système linéaire. En effet, le résultat principal de [26] précise mieux cette interprétation, et la GIT entre en jeu encore une fois.

Théorème 1.1.2. (cf. [26], *Thm. 1.1*) *Il existe un isomorphisme*

$$|\Omega_{2n}| \cong \mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{2n}, L)^{SL(2)},$$

et la adhérence de l'image de

$$\varphi_{\Omega_{2n}} : \mathbb{P}^{2n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{2n}, L)^{SL(2)}$$

est la compactification GIT $(\mathbb{P}^1)^{2n}/SL(2)$. La adhérence de la fibre de $\varphi_{\Omega_{2n}}$ au-dessus de chaque point $p \in \mathcal{M}_{0,2n} \subset (\mathbb{P}^1)^{2n}/SL(2)$ est une courbe rationnelle normale (éventuellement réductible) passant par les $2n$ points fixés dans \mathbb{P}^{2n-2} .

D'autres résultats à ce propos ainsi que beaucoup plus de détails sont développés dans la section 2.3.

La suite des développements de [5] parue dans [27], décrivant une fibration analogue à celle de [5] lorsque le rang des fibrés est plus grand que 2. Plus précisément, la construction dans [27] est développée dans le contexte plus général des systèmes cohérents (voir la section 2.2 pour une définition précise de tels objets et de leurs espaces de modules $G_\alpha(r, rg, r)$, qui dépendent d'un paramètre réel α) : le cas des fibrés vectoriels résulte d'un corollaire simple issu de la construction générale.

Théorème 1.1.3. (cf [27], Thm. 1.1) Soit C une courbe complexe lisse de genre $g > 1$, non hyperelliptique si $g > 2$, et soit $\alpha > g(r-1)$. Alors $G_\alpha(r, rg, r)$ est birationnellement équivalent à une fibration au-dessus du produit symétrique $C^{(rg)}$ dont les fibres sont des quotients GIT $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg}/SL(r)$.

Théorème 1.1.4. L'espace de modules $SU_C(r)$ est birationnellement équivalent à une fibration au-dessus de $\mathbb{P}^{(r-1)g}$ dont les fibres sont des quotients GIT $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg}/SL(r)$.

Les méthodes utilisées dans [27] sont différentes de celles développées dans [5]. Très grossièrement, tous les systèmes cohérents de type désiré peuvent se décrire par une suite exacte courte de faisceaux. Ainsi, nous cherchons à paramétrer les objets qui apparaissent dans cette suite. Les détails ainsi que d'autres résultats corrélés sont présents dans la section 2.2.

Ensuite je me suis intéressé aux compactifications de $\mathcal{M}_{0,n}$ obtenues par les invariants. Notamment, pour tout $1 \leq d \leq n-3$ et $\underline{c} \in \Delta(d+1, n) := \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n \mid 0 \leq c_i \leq 1, \sum c_i = d+1\}$, il existe un morphisme birationnel $\varphi : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow (\mathbb{P}^d)^n /_{\underline{c}} SL(d+1)$ qui envoie une configuration de points distincts de \mathbb{P}^1 sur la configuration correspondante dans \mathbb{P}^d via le $d^{\text{ème}}$ morphisme de Veronese. Ce morphisme est injectif sur l'intérieur de l'espace de modules et il est défini par un fibré en droites big (*i.e.* contenu dans l'intérieur de l'adhérence du cône des diviseurs effectifs) sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. Dans l'article [28] avec N. Giansiracusa, j'ai comparé les classes de fibrés en droites qui définissent ce type de morphismes birationnels (qui dépendent des paramètres discrets d, n et des poids rationnels $c_i \in \underline{c}$ qu'on attribue aux points marqués, voir section 2.4 pour plus de détails) et deux autres classes de fibrés en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ avec des interprétations géométriques bien connues. Il s'agit des fibrés en droites associés à certains revêtements cycliques de \mathbb{P}^1 et des fibrés de blocs \mathfrak{sl}_r -conformes de niveau 1 avec poids fondamentaux $(\omega_{c_1}, \dots, \omega_{c_n})$.

Les fibrés vectoriels de blocs conformes fournissent l'un des plus célèbres exemples de théorie conforme des champs, et ils sont devenus très célèbres dans les années 90 à cause de leur relation avec la physique mathématique, la géométrie algébrique et la théorie des représentations (voir la section 2.4 ainsi que l'appendice A et les références pour des définitions plus détaillées). Les fibrés en droites associés aux revêtements que nous considérons sont construits comme suit : à partir d'une configuration de points pondérés p_i sur \mathbb{P}^1 , nous

construisons un revêtement cyclique de degré r ramifié le long des p_i avec multiplicité c_i , en obtenant une courbe de genre g (on obtient g via la formule de Hurwitz). Cela définit un morphisme $f_{\underline{c},r} : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$. Ensuite nous considérons la restriction du fibré de Hodge $\mathbb{E}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ à l'image de $f_{\underline{c},r}$ et nous prenons le sous-fibré propre de \mathbb{E}_g par rapport à l'action naturelle du groupe fini μ_r sur \mathbb{E}_g correspondant au caractère trivial. Le pull-back du déterminant de ce fibré par $f_{\underline{c},r}$ est le fibré en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ que nous voulons. Pour des définitions plus précises et détaillées, voir la section 2.4. Grâce à la structure *inductive* des diviseurs de bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ (voir section 2.4), nous arrivons à caractériser de manière efficace ces trois classes de fibrés et à prouver le théorème suivant :

Théorème 1.1.5. (cf. [28], Thm. 1.7) *Fixons $n \geq 4, r \geq 2$, et $\underline{c} \in \mathbb{Z}^n$ avec $0 \leq c_i < r$ et $r \mid \sum_{i=1}^n c_i$. Les fibrés en droites suivants sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ sont isomorphes :*

- (i) *le fibré vectoriel de blocs \mathfrak{sl}_r -conformes de niveau 1 avec poids fondamentaux $(\omega_{c_1}, \dots, \omega_{c_n})$;*
- (ii) *le pullback de $\mathcal{O}(1)$ le long de l'application $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow (\mathbb{P}^{\frac{|c|}{r}-1})^n //_{\underline{c}} \mathrm{SL}(|c|/r)$ qui envoie une configuration de points de la droite sur la configuration correspondante d'une courbe rationnelle normale dans $\mathbb{P}^{\frac{|c|}{r}-1}$;*
- (iii) *le $r^{\text{ème}}$ produit tensoriel du déterminant du μ_r -fibré propre du fibré de Hodge correspondant au caractère unité, restreint au lieu des revêtements cycliques ramifiés avec lieu de ramification pondéré par \underline{c} .*

Comme résultats partiels, nous obtenons des *formules de factorisation* intéressantes pour ces trois classes de fibrés en droites, dont les détails sont développés dans la section 2.4.

1.2 Catégories dérivées et rationalité des variétés projectives

Plus récemment, j'ai commencé à m'intéresser aux faisceaux cohérents, et notamment à la description des faisceaux cohérents sur une variété projective par le biais des catégories dérivées de complexes bornés de faisceaux cohérents.

La définition de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, donnée par Verdier [137], apparaît dans les années 60. Il était question de pouvoir étudier des foncteurs naturels, comme l'image directe par un morphisme, entre catégories de faisceaux. Le problème principal étant que la plupart de ces foncteurs ne sont pas exacts. En effet, la catégorie des faisceaux cohérents sur une variété est abélienne et nous pouvons donc définir des suites exactes courtes. Un foncteur entre deux catégories abéliennes est exact lorsqu'il préserve de telles suites. Lorsqu'un foncteur n'est pas exact, nous obtenons, à partir d'une suite exacte courte, un complexe dont la cohomologie décrit les propriétés des faisceaux et du foncteur considérés. L'idée fondamentale est donc d'étudier des complexes à quasi-équivalence près (très brièvement, nous identifions les complexes ayant la même cohomologie). La catégorie dérivée permet donc de bien définir de tels foncteurs. La structure abélienne est remplacée par la structure triangulée, où les triangles distingués jouent un rôle comparable à celui des suites exactes courtes.

Les propriétés géométriques des catégories dérivées se manifestent quelques années plus tard dans les travaux de Mukai [111], où une équivalence entre les catégories dérivées d'une variété abélienne et de sa duale est décrite. Ceci montre que, tandis que la catégorie des faisceaux cohérents détermine la variété à isomorphie près, sa catégorie dérivée est un objet contenant beaucoup d'informations géométriques dont l'invariance n'est pas aussi prévisible.

En effet, trente ans après les premiers résultats de Mukai, les catégories dérivées sont aujourd'hui des protagonistes majeurs dans plusieurs branches des mathématiques, notamment en liaison avec des théories physiques (comme la symétrie miroir, dont Kontsevich a proposé une version homologique [88]), ou avec les espaces de modules.

Le lien entre propriétés géométriques et catégorie dérivée d'une variété a été largement étudié à partir des années 90, notamment par Bondal et Orlov. Un résultat d'Orlov très connu dit que tout foncteur exact admettant un adjoint entre les catégories dérivées de deux variétés X et Y lisses projectives est de type Fourier–Mukai [119], c'est à dire qu'il existe un objet \mathcal{E} (dit noyau du foncteur) dans la catégorie dérivée de $X \times Y$ qui décrit le foncteur de façon semblable à une transformation de Fourier. Lorsque deux variétés ont des catégories dérivées équivalentes, nous parlons donc de partenaires de Fourier–Mukai. L'existence d'un noyau permet de déduire d'importants liens entre partenaires de Fourier–Mukai, par exemple entre leurs anneaux de cohomologie. Cependant, un théorème très célèbre de Bondal et Orlov [33] montre que si X est une variété lisse projective dont le fibré canonique est ample ou antiample et Y est un de ses partenaires de Fourier–Mukai, alors Y est isomorphe à X . Tout de même des exemples de partenaires de Fourier–Mukai non isomorphes, par exemple des surfaces K3 ou des variétés abéliennes, sont connus.

La catégorie dérivée possède une structure de catégorie triangulée linéaire, ce qui permet de définir une notion d'orthogonalité entre sous-catégories. Ceci mène à la définition de la décomposition semi-orthogonale (voir Déf. 3.1.2). Une telle décomposition est souvent témoin de propriétés birationnelles. Par exemple, si $\tilde{Y} \rightarrow Y$ est l'éclatement d'une sous-variété lisse Z de codimension d , la catégorie dérivée de \tilde{Y} admet une décomposition par la catégorie dérivée de Y et $d - 1$ copies de la catégorie dérivée de Z .

L'étude des décompositions semi-orthogonales, entreprise par l'école russe dans les années 90 a désormais un fondement très solide grâce à de nombreux exemples montrant leurs interactions avec la géométrie birationnelle d'une variété X , notamment lorsque X est de dimension 3 et de dimension de Kodaira négative. L'existence d'objets exceptionnels (voir Déf. 3.1.3) dans $\mathbf{D}^b(X)$ mène à considérer leurs compléments orthogonaux, qui contiendraient toute l'information sur la géométrie birationnelle de X . Ceci est le cas, par exemple, de l'intersection complète de deux quadriques dans \mathbb{P}^5 [32], de nombreuses classes de variétés de Fano [102], de la hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^4 [20], des fibrés en coniques [17], de certaines fibrations en surfaces de del Pezzo [7]. Conjecturellement, un tel phénomène devrait apparaître aussi dans le cas où X est une hypersurface cubique dans \mathbb{P}^5 : la rationalité d'une telle variété devrait être équivalente à la représentabilité d'une sous-catégorie [95].

Un enrichissement de cette recherche vient de la relation entre motifs et décompositions semi-orthogonales, proposée par Orlov [120]. Ceci a permis par exemple d'obtenir des résultats pour les fibrés en coniques [17] et représente une étape fondamentale dans la compréhension de la relation entre décompositions semi-orthogonales et propriétés birationnelles.

Les espaces de modules sont aussi naturellement liés aux catégories dérivées, par exemple par la notion de foncteur de Fourier–Mukai : si X est une surface K3 et Y un de ses partenaires de Fourier–Mukai, alors Y est aussi une surface K3, qui est isomorphe soit à X , soit à un espace de modules de fibrés stables sur X . Dans le chapitre 3, nous allons travailler sur les complexes dans les sections 3.2, 3.3 et 3.5, tandis que dans la section 3.4 (sauf mention contraire) nous travaillons sur un corps arbitraire k .

Le premier exemple, dans ce mémoire, de l'utilisation des décompositions semi-orthogonales

afin de déterminer la rationalité d'une classe de variétés algébriques provient de l'article [17]. En effet, dans [17] nous donnons un critère complètement catégorique pour la rationalité d'un fibré en coniques $\pi : X \rightarrow S$ sur une surface rationnelle minimale S .

Théorème 1.2.1. (cf. [17], Thm 1.2) *Soit S une surface rationnelle minimale. Alors, X est rationnel (ce qui est équivalent à une décomposition $J(X) = \bigoplus_{i=1}^k J(\Gamma_i)$) si et seulement si il existe des foncteurs pleins et fidèles $\Psi_i : \mathbf{D}^b(\Gamma_i) \rightarrow \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ et une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0) = \langle \Psi_1 \mathbf{D}^b(\Gamma_1), \dots, \Psi_k \mathbf{D}^b(\Gamma_k), E_1, \dots, E_l \rangle,$$

où les E_i sont des objets exceptionnels et $l \geq 0$.

La preuve se base d'un côté sur l'étude des morphismes dans l'anneau de Chow de X induits par les foncteurs Ψ_i et de l'autre sur la réalisation explicite de X comme suite d'éclatements d'une variété rationnelle le long de certaines courbes lisses. En particulier, la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ des faisceaux cohérents tordus par la partie paire de l'algèbre de Clifford sur S associée à la fibration en coniques π joue un rôle très important. Plus de détails sont inclus dans la section 3.2.

Suite à l'article [17], mes thèmes de recherche se sont élargis dans plusieurs directions. D'un côté dans [7] nous avons considéré le cas des fibrations où les fibres sont des intersections de quadriques de dimension supérieure, de l'autre côté dans [18] nous avons étudié des classes de variétés (de dimension 3 et, dans quelques cas, de dimension plus grande) où certains arguments développés dans [17] pouvaient s'appliquer. Notamment, nous avons cherché des 3-variétés Y de dimension de Kodaira négative pour lesquelles une décomposition semi-orthogonale de $\mathbf{D}^b(Y)$ permet de donner des informations importantes sur la *jacobiennne intermédiaire* de Y . Cela nous a amené à introduire deux nouvelles définitions.

Définition 1.2.2. (cf. [18], Def. 2.3) *Une catégorie triangulée \mathbb{T} est représentable en dimension m si elle admet une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbb{T} = \langle \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l \rangle$$

et si pour tout $i = 1, \dots, l$, il existe une variété lisse projective connexe Y_i avec $\dim(Y_i) \leq m$ telle que \mathbf{A}_i soit équivalente à une sous-catégorie admissible de $\mathbf{D}^b(Y_i)$.

Définition 1.2.3. (cf. [18], Def. 2.4) *Soit X une variété projective lisse de dimension n . Nous disons que X est catégoriquement représentable en dimension m (ou en codimension $n - m$) si $\mathbf{D}^b(X)$ est représentable en dimension m .*

Nous avons donc d'abord étudié les relations entre la *représentabilité catégorique* et d'autres représentabilités plus classiques, telles que la représentabilité algébrique, la représentabilité faible ou l'existence d'une polarisation d'incidence sur la jacobiennne intermédiaire. Ensuite, nous avons cherché à identifier les classes de variétés projectives X (et les éventuelles hypothèses supplémentaires nécessaires) pour lesquelles la connaissance d'une décomposition semi-orthogonale de $\mathbf{D}^b(X)$ permet de reconstruire la jacobiennne intermédiaire à isomorphie près ou, plus faiblement, à isogénie près. Les variétés de Fano et, plus généralement, les variétés à dimension de Kodaira négative fournissent beaucoup d'exemples. En outre, nous relierons la représentabilité catégorique en codimension 2 à la rationalité d'une variété projective, en

conjecturant que la première est nécessaire pour la seconde, et nous montrons certaines indices en faveur de cette conjecture.

Une liste complète de ces variétés et exemples est présentée dans la section 3.3.

Comme je l'ai anticipé ci-dessus, l'autre sujet développé à partir de [17] est l'étude de la rationalité des variétés projectives X qui admettent une fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ en intersections de quadriques [7]. En adaptant et en développant les méthodes de [17], nous obtenons des résultats pour les fibrations elliptiques (en donnant une nouvelle preuve assez simple de certains résultats de Caldararu), pour les fibrations en surfaces de Del Pezzo et pour des fibrations en intersections de quadriques de dimension 4.

Dans le cas des surfaces de Del Pezzo, le résultat est très compact et dans le même esprit que [17].

Théorème 1.2.4. *(cf. [7], Thm. 1) Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration complexe générique en surfaces de Del Pezzo de degré 4. Alors X est rationnelle si et seulement si elle est représentable catégoriquement en codimension 2. En outre, il existe une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(\Gamma_1), \dots, \mathbf{D}^b(\Gamma_k), E_1, \dots, E_l \rangle,$$

où les Γ_i sont des courbes projectives lisses et les E_i des objets exceptionnels, si et seulement si $J(X) = \bigoplus J(\Gamma_i)$ en tant que variétés abéliennes principalement polarisées.

Pour décrire les résultats en dimension supérieure nous remarquons tout d'abord qu'à partir d'une fibration en intersections de quadriques $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, nous pouvons construire naturellement une fibration en quadriques au-dessus d'une surface réglée $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ en prenant simplement les pinceaux engendrés par les quadriques. Comme dans le cas des fibrés en coniques cela définit une algèbre de Clifford paire \mathcal{C}_0 sur S . De plus, si les quadriques sont de dimension 4 et sous des hypothèses de généricité standard, le lieu discriminant est une 6-section Y de S . Si nous appelons T le revêtement double de S ramifié le long de Y , alors l'algèbre de Clifford \mathcal{C}_0 définit univoquement une classe de Brauer $\beta \in Br(T)$ (pour les détails voir la section 3.4).

Théorème 1.2.5. *(cf. [7], Thm.2) Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration générique dont les fibres sont des intersections de deux quadriques de dimension 4 sur un corps k . Si $\beta = 0$, alors X est rationnelle et représentable catégoriquement en codimension 2. Notamment, cela est le cas si X contient une surface génériquement réglée au-dessus de \mathbb{P}^1 .*

Afin de prouver ces théorèmes, nous obtenons aussi des résultats intermédiaires assez intéressants. Notamment, nous prouvons que deux algèbres de Clifford paires sur une surface projective lisse sont Morita-équivalentes lorsqu'elles proviennent de deux fibrations en quadriques obtenues par réduction quadrique l'une de l'autre ([7], Thm.3). De plus, nous prouvons une version relative, sur une base lisse quelconque, de la dualité projective homologique (voir l'appendice B pour la définition de cette dualité) pour l'intersection d'un ensemble fini de quadriques ([7], Thm. 2.19), en généralisant un résultat de Kuznetsov [93]. Pour plus de détails et de définitions précises, voir la section 3.4.

Dans la dernière section du chapitre 3 je résume la petite contribution qu'avec mes co-auteurs j'ai fournie dans [8] à l'ancien problème de la rationalité des hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}^5 (les 4-variétés cubiques). En effet, il existe une conjecture célèbre de Kuznetsov ([95], Conj. 1.1) à ce propos.

Conjecture 1.2.6 (Kuznetsov). *Soit $X \subset \mathbb{P}^5$ une 4-variété cubique lisse. Alors X est rationnel si et seulement s'il existe une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(S), \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle,$$

pour S une surface K3.

Dans [8], nous avons étudié des 4fold cubiques qui sont contenus dans l'intersection de deux diviseurs $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ dans l'espace de modules de 4folds cubiques (selon la description de Hassett, [63], voir la section 3.5 pour plus de détails sur ces diviseurs). Notamment, nous considérons des hypersurfaces cubiques contenant un 2-plan P et un scroll quartique T . Lorsqu'une cubique contient un plan, nous pouvons considérer la fibration en surfaces quadriques sur \mathbb{P}^2 obtenue en projetant depuis P et cela, comme précédemment dans [7], définit une classe de Brauer β sur un revêtement double de \mathbb{P}^2 (une surface K3 S de degré 2) à partir de l'algèbre de Clifford de la fibration en quadriques. Or, la conjecture de Kuznetsov est vraie pour les 4folds cubiques avec invariant de Clifford trivial (voir [109]), mais l'existence d'une classe de hypersurfaces cubiques avec invariant non trivial pour laquelle la conjecture était valable n'était pas claire.

Soit $A(X)$ le réseau des 2-cycles algébriques de X à équivalence rationnelle près et d_X le discriminant de la forme d'intersection sur $A(X)$.

Théorème 1.2.7. *(cf. [8], Thm. A) L'intersection $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ a cinq composantes irréductibles, qui sont indexées par le discriminant $d_X \in \{21, 29, 32, 36, 37\}$ d'un élément général de chaque composante. L'invariant de Clifford d'un 4fold général X dans $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ est trivial si et seulement si d_X est impair. La hypersurface cubique générique dans la composante avec $d_X = 32$ est pfaffienne.*

En particulier, étant pfaffien, le 4fold cubique général contenu dans la composante de $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ avec discriminant 32 est rationnel (grâce à [13]). Il a aussi un invariant de Clifford non trivial. Cela répond à une question de Hassett [63, Rem. 4.3] sur l'existence de telles hypersurfaces cubiques. De plus, dans la décomposition semi-orthogonale de la catégorie dérivée de ces hypersurfaces cubiques, il apparaît la catégorie dérivée d'une surface K3 de degré 14 S' qui est le dual projectif homologique de la hypersurface cubique, via la dualité entre pfaffiens et grassmanniennes.

Un corollaire intéressant de notre résultat est une nouvelle équivalence dérivée $\mathbf{D}^b(S, \beta) \cong \mathbf{D}^b(S')$, entre la catégorie des faisceaux tordus par β sur la surface K3 de degré 2 et la catégorie dérivée de la surface K3 de degré 14. Il est probable que cette équivalence a une interprétation en termes d'espaces de modules de faisceaux tordus, mais nous n'avons pas encore prouvé cela. Nos méthodes se basent sur de la théorie de Hodge standard et les profonds résultats de [108] et [106].

Dans l'appendice C, je présente les résultats principaux d'un travail en cours, en collaboration avec M. Bernardara et D. Faenzi [19], dont le but est d'étudier la dualité projective homologique (voir l'appendice B) pour les variétés de Segre. Soient U et V deux espaces vectoriels complexes, de dimension $n+1$ et $m+1$ respectivement. Soit $X := \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$ la variété produit de Segre des deux espaces projectifs et soit $Z_{n,m}$ la variété déterminantielle qui paramètre les matrices dans $\mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ de rang non maximal. Le fibré projectivisé

$$Y := \mathbb{P}(V^* \otimes T_{\mathbb{P}(U)}(-1))$$

vient avec un morphisme tautologique naturel $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ dont l'image est $Z_{n,m}$ et Y est une résolution de singularités (dite *de Springer*) de $Z_{n,m}$. La variété de Segre a une structure de fibré projectif au-dessus de $\mathbb{P}(U)$, donc nous pouvons utiliser la dualité projective homologique pour les fibrés projectifs [92, Sect. 8] et prouver :

Théorème 1.2.8. *La variété projective lisse $Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ est la duale projective homologique de la variété de Segre $X \rightarrow \mathbb{P}(U \otimes V)$, relativement au-dessus de $\mathbb{P}(U)$.*

En outre, nous prouvons aussi qu'il existe une résolution catégorique non commutative des singularités (voir l'appendice B pour la définition précise) de $\mathbf{D}^b(Z_{n,m})$ qui est équivalente à $\mathbf{D}^b(Y)$.

L'une des motivations qui nous a poussé à étudier cette dualité homologique est une question posée par Bondal lors de la conférence *Derived Categories in Algebraic Geometry* à Tokyo en 2011. Bondal demandait si, pour une variété projective lisse X , il existe toujours une variété de Fano lisse F et un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}^b(F)$. Grâce à la dualité projective homologique, en prenant des sections linéaires des variétés de Segre et déterminantielles, nous trouvons des larges classes de variétés pour lesquelles la réponse à la question de Bondal est positive, par exemple toutes les courbes planes de type général. Les détails sont décrits dans la proposition 4.3.3.

Finalement, dans la dernière partie de l'appendice C, nous nous occupons des 4folds cubiques déterminantielles. Ils sont toujours rationnels, comme ils sont singuliers. Nous en donnons une construction projective, qui consiste à éclater \mathbb{P}^4 le long d'une surface K3 sextique réductible : il s'agit de l'union de deux scrolls cubiques qui s'intersectent le long d'une courbe elliptique quintique.

Articles ¹**Catégories dérivées et questions de rationalité.**

[1] M. Bolognesi, B. Hassett, M. Lahoz, M. Lieblich, E. Macrì, and P. Stellari. *Derived equivalence and places of good reduction for $k3$ surfaces*. (En preparation), 2013.

[2]* M. Bernardara, M. Bolognesi and D. Faenzi. *Homological projective duality for Segre varieties*. 1–20 (preprint, en preparation), 2013.

[3]* A. Auel, M. Bernardara, M. Bolognesi, and A. Varilly-Alvarado. *Cubic fourfolds containing a plane and a quintic Del Pezzo surface*. (preprint arxiv.org/abs/1205.0237, à paraître au Algebraic Geometry), pages 1-14, (2013).

[4]* A. Auel, M. Bernardara, and M. Bolognesi. *Fibrations in complete intersections of quadrics, clifford algebras, derived categories, and rationality problems*. (à paraître au Journ. Math. Pures et Appl., arXiv :1109.6938), pages 1-41, 2011.

[5]* M. Bernardara and M. Bolognesi. *Categorical representability and intermediate jacobians of fano threefolds*. Derived Categories in Algebraic Geometry–Tokyo 2011 ; EMS Ser. Congr. Rep. 1-25, 2012.

[6]* M. Bernardara and M. Bolognesi. *Derived categories and rationality of conic bundles*. (à paraître au Compositio Math.), pages 1-29, 2010.

Courbes algébriques, leurs espaces de modules (leur théorie d’intersection, topologie, etc) et liens avec la GIT.

[7]* M. Bolognesi and N. Giansiracusa. *Factorization of point configurations, cyclic covers and conformal blocks*. (à paraître au JEMS), pages 1–17, (2012).

[8] M. Bolognesi, N. Giansiracusa, D. Jensen, and A. Massarenti. *Cyclic covers, factorization rules and conformal blocks bundles in positive genus*. (En preparation), 2013.

[9] M. Bolognesi and M. Loenne. *The orbifold fundamental group of the trigonal locus*. (preprint, en preparation) pages 1-30, 2013.

[10]* M. Bolognesi. *Forgetful linear systems on the projective space and rational normal curves over $\overline{\mathcal{M}}_{0,2n}^{GIT}$* . Bull. of the London Math. Soc., 43(3) :583-596, 2011.

[11] M. Bolognesi and A. Vistoli. *Stacks of trigonal curves*. Trans. Amer. Math. Soc., 364(7) :3365-3393, 2012.

[12] M. Bolognesi and G. Pirola. *Osculating spaces and diophantine equations (with an Appendix by Pietro Corvaja and Umberto Zannier)*. Mathematische Nachrichten 284 (8-9) ; 960-983.

Constructions GIT et géométrie birationnelle des espaces de modules de fibrés vectoriels.

[13]* A. Alzati and M. Bolognesi. *On rational maps between moduli spaces of curves and of vector bundles*. À paraître au Journ. of Algebraic Geometry, pages 1-27, 2010.

[14]* M. Bolognesi and S. Brivio. *Coherent systems and modular subvarieties of $SU_C(r)$* . Internat. J. Math., 23(4). 1-23, 2012.

1. Les articles avec un astérisque à côté sont ceux que je vais discuter dans ce mémoire.

Thèse.

[15] M. Bolognesi. *A conic bundle degenerating on the Kummer surface*. Math. Z., 261(1) :149-168, 2009.

[16] M. Bolognesi. *On Weddle surfaces and their moduli*. Adv. in Geom., 7(1) :113- 144, 2007.

Chapitre 2

Espaces de modules de fibrés vectoriels, de courbes pointées et quotients GIT

L'une des manières les plus célèbres de construire des espaces de modules est par le biais de la théorie géométrique des invariants (GIT). Cela fait déjà quelque dizaines d'années que les espaces de modules de fibrés vectoriels ont été construits de la sorte (voir [60] pour un survol intéressant). Dans ce chapitre, on exhibera quelques liens entre les espaces de modules de fibrés vectoriels et les compactifications GIT de certains espaces de modules de courbes marquées [5, 27]. Ensuite, je présenterai brièvement une ligne de recherche plus centrée sur les applications de la GIT aux problèmes de modules de courbes [26, 28]. Dans cette section, nous travaillons sur le corps des complexes \mathbb{C} .

Soit $SU_C(r)$ l'espace de modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et déterminant trivial au-dessus d'une courbe lisse, complexe de genre g . Si $g \neq 2$, C sera aussi supposée non hyperelliptique. Des résultats spectaculaires sur la structure projective de ces espaces de modules en genre et rang bas ont été obtenus, en utilisant notamment le travail de A.B. Coble [44] sur les fonctions thêta en géométrie algébrique classique. L'exploitation systématique de ce lien avec les fonctions thêta a produit beaucoup de résultats élégants (voir [124], [12], [122], [116], ou [49] pour un survol) où la géométrie algébrique classique et la théorie des espaces de modules se mélangent.

2.1 Le cas de rang 2 et le lien avec les courbes rationnelles marquées

2.1.1 Structure projective de $SU_C(2)$ et application thêta

L'article [5] avec Alzati explore les relations entre espaces de modules de fibrés et de courbes, et il tisse un lien entre les deux théories. Nous décrivons une manière naturelle de construire de larges familles universelles de courbes rationnelles pointées au-dessus de certaines sous-variétés de $SU_C(2)$. Tout d'abord, nous considérons le morphisme

$$(2.1.1) \quad SU_C(2) \rightarrow \mathbb{P}H^0(SU_C(2), \mathcal{L})^* = |\mathcal{L}|^*$$

défini par le fibré déterminant \mathcal{L} . Le fibré \mathcal{L} est le générateur du groupe de Picard $\text{Pic}(\mathcal{SU}_C(2)) \cong \mathbb{Z}$. L'espace projectif image est canoniquement identifié au système linéaire complet $|2\Theta|$ sur la variété de Picard $\text{Pic}^{g-1}(C)$ [14]. Via cette identification, l'application (2.1.1) coïncide avec l'application thêta bien connue

$$\begin{aligned} \theta_2 : \mathcal{SU}_C(2) &\dashrightarrow |2\Theta|; \\ E &\mapsto \Theta_E := \{L \in \text{Pic}^{g-1} \mid h^0(C, E \otimes L) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Grâce à [37] et [77], nous savons que cette application θ_2 est un plongement de $\mathcal{SU}_C(2)$ dans le système $|2\Theta|$.

Dans [5] nous arrivons à isoler un sous-espace $\mathbb{P}_c \subset |2\Theta|$ qui dépend du choix d'un diviseur effectif D de degré g sur C . En composant le morphisme θ_2 avec la projection de centre \mathbb{P}_c , nous obtenons une application rationnelle

$$p_{\mathbb{P}_c} : \mathcal{SU}_C(2) \dashrightarrow |2D| \cong \mathbb{P}^g.$$

Notre résultat principal montre que cette application rationnelle a une interprétation modulaire naturelle, parce que sa fibre générique est birationnelle à $\mathcal{M}_{0,2g}$.

Théorème 2.1.1. (cf. [5], Thm. 1.1) *Soit C une courbe complexe de genre $g > 1$, non-hyperelliptique si $g > 2$, et soit D un diviseur effectif fixé de degré g sur C . Alors*

(i) *Il existe une fibration rationnelle*

$$p_{\mathbb{P}_c} : \mathcal{SU}_C(2) \dashrightarrow |2D| \cong \mathbb{P}^g$$

dont la fibre générale est birationnelle à l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,2g}$ de courbes de genre 0, avec $2g$ points marqués.

(ii) *La fibre générique $p_{\mathbb{P}_c}^{-1}(N)$, pour $N \in |2D|$ est dominée par un espace projectif \mathbb{P}^{2g-2} avec $2g$ points fixés ; les fibres de cette application sont des courbes rationnelles normales qui passent par les $2g$ points fixés. La famille de courbes rationnelles normales par les $2g$ points induit l'application birationnelle de modules du point (i) par la propriété universelle de $\mathcal{M}_{0,2g}$.*

(iii) *Il existe un inverse birationnel*

$$\mathcal{M}_{0,2g} \dashrightarrow p_{\mathbb{P}_c}^{-1}(N) \subset \mathcal{SU}_C(2).$$

Le fibré vectoriel dans $p_{\mathbb{P}_c}^{-1}(N)$ associé à une configuration de points $(p_1, \dots, p_{2g}) \in \mathcal{M}_{0,2g}$, avec $p_i \in \mathbb{P}^1$, est obtenu en tordant par $\mathcal{O}_C(D)$ le noyau d'un morphisme surjectif de faisceaux $\mathcal{O}_C^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_N$ associée à la configuration de points.

Le cas $g = 2$ de ce théorème est l'un des résultats principaux obtenus pendant ma thèse [25].

Pour $g = 2, 3$ nous avons un énoncé plus précis.

Théorème 2.1.2. (cf. [5], Thm. 1.2) *Si $g = 2, 3$ alors la fibre générale de la fibration est isomorphe à la compactification (ou quotient) GIT $(\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$ de l'espace de modules des courbes $2g$ -pointées de genre 0.*

En outre, nous arrivons aussi à montrer que si $g > 3$ alors un tel isomorphisme n'existe pas.

Je vais maintenant donner une esquisse de la preuve du théorème 2.1.1. Les outils principaux, hormis certaines descriptions standard de la géométrie de la variété Jacobienne et des systèmes linéaires thêta, sont les applications qui classifient les classes d'équivalence d'extensions de fibrés en droites, décrites en particulier dans [21] et [103]. En effet, les courbes rationnelles normales qui apparaissent dans le théorème 2.1.1 paramètrent certaines classes d'extensions et ce sont les fibres d'une application classifiante. Notamment, nous considérons les applications rationnelles d'oubli dont le domaine est $\mathbb{P}\text{Ext}^1(L, L^{-1})$, pour certains fibrés en droites L . Ces applications envoient une classe d'équivalence (e) d'extensions

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0 \quad (e)$$

sur le fibré $E \in \mathcal{SU}_C(2)$ correspondant, qui a effectivement $\det E = \mathcal{O}_C$. Ces applications sont définies par des systèmes linéaires polynomiaux qui souvent ont un lieu de base, parce que l'espace projectif $\mathbb{P}\text{Ext}^1(L, L^{-1})$ contient aussi des extensions non semi-stables. Ces extensions non semi-stables correspondent aux points de certaines variétés de sécantes du modèle projectif de la courbe C contenu dans $\mathbb{P}\text{Ext}^1(L, L^{-1}) = |K + 2L|^*$.

Fixons maintenant un diviseur effectif D générique de degré g . Soit \mathbb{P}_c l'enveloppe linéaire dans $|2\Theta|$ du lieu des $E \in \mathcal{SU}_C(2)$ qui vérifient $h^0(C, E \otimes K \otimes \mathcal{O}_C(-D)) \neq 0$ et soit $U \subset \mathcal{SU}_C(2)$ un ensemble ouvert d'une fibre générale de la projection $p_{\mathbb{P}_c}$ de centre \mathbb{P}_c . L'idée de notre preuve est de considérer l'adhérence des fibres au-dessus de U de l'application classifiante

$$(2.1.2) \quad \varphi_D : \mathbb{P}\text{Ext}^1(\mathcal{O}_C(D), \mathcal{O}_C(-D)) \dashrightarrow \mathcal{SU}_C(2),$$

et montrer qu'elles forment une famille plate de courbes rationnelles pointées au-dessus de U . L'existence de cette famille, par la propriété universelle de $\mathcal{M}_{0,2g}$, induit une application birationnelle entre la fibre générale de $p_{\mathbb{P}_c}$ et $\mathcal{M}_{0,2g}$.

2.1.2 Le lien avec $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Ce lien est fait par le biais de la construction de Kapranov [83] de la compactification de Mumford-Knudsen $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ comme éclatement de l'espace projectif \mathbb{P}^{n-3} et en considérant la relation entre $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et les courbes rationnelles dans \mathbb{P}^{n-2} qui passent par n points généraux fixés, comme décrit dans [86]. Il existe d'ailleurs un isomorphisme (que nous allons décrire plus en détail dans la section 2.3) entre $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et le schéma de Hilbert de ce type de courbes rationnelles.

En effet, considérons maintenant le modèle projectif $C \subset \mathbb{P}\text{Ext}^1(\mathcal{O}_C(D), \mathcal{O}_C(-D))$ et soit U un certain ouvert de la fibre $p_{\mathbb{P}_c}^{-1}(N)$ au-dessus d'un diviseur général $N \in |2D|$. Alors il existe un espace projectif $\mathbb{P}_N^{2g-2} \subset \mathbb{P}\text{Ext}^1(\mathcal{O}_C(D), \mathcal{O}_C(-D))$, qui coupe C exactement le long des $2g$ points de N , tel que la courbe rationnelle normale générique dans \mathbb{P}_N^{2g-2} qui passe par les $2g$ points sécants est contracté par φ_D sur un point de U . Ce point est un fibré semi-stable E à déterminant trivial, qui est projeté sur N par $p_{\mathbb{P}_c}$. Rappelons la reformulation par Hassett de la construction par éclatements décrite par Kapranov.

Théorème 2.1.3. (cf. [83] and [64] section 6.2) La compactification de Deligne-Mumford de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ peut être réalisée comme une suite d'éclatements de \mathbb{P}^{n-3} de la manière suivante. Soient q_1, \dots, q_{n-1} des points généraux dans \mathbb{P}^{n-3} :

- 1 : éclater les points q_1, \dots, q_{n-1} ;
- 2 : éclater les transformées propre des droites engendrées par des couples de points parmi les q_1, \dots, q_{n-1} ;
- 3 : éclater les transformées propres des 2-plans engendrés par des triplets de points parmi les q_i ; . . .
- $n-4$: éclater les transformées propres des $(n-5)$ -plans engendrés par des $(n-4)$ -plets de points parmi les q_i .

En éclatant de cette manière, nous arrivons à séparer les courbes rationnelles normales et elles donnent la famille de courbes au-dessus de U .

Un dessin naïf décrit la situation dans la Figure 2.1.

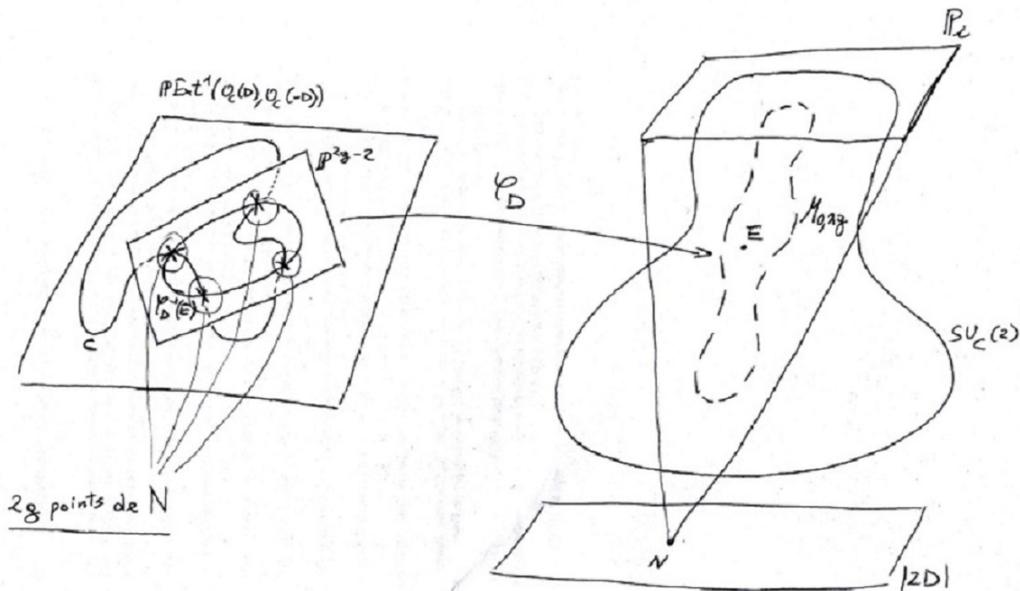


FIGURE 2.1 – Un dessin naïf.

En outre, nous arrivons aussi à décrire un inverse birationnel de $\mathcal{M}_{0,2g} \dashrightarrow p_{\mathbb{P}^c}^{-1}(N)$, qui dépend du choix d'un diviseur réduit $N \in |2D|$. Cette application associe un morphisme surjectif de faisceaux

$$(2.1.3) \quad \mathcal{O}_C^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_N$$

à une configuration de points (p_1, \dots, p_n) dans \mathbb{P}^1 . Le noyau du morphisme (2.1.3) est un fibré vectoriel de rang 2 et l'application inverse envoie la configuration de points sur ce noyau tordu par $\mathcal{O}_X(D)$.

Cette application a été ultérieurement développée et généralisée à un contexte plus large dans [27]. Nous allons donc la présenter dans une plus grande généralité ci-dessous.

Remarque 2.1.4. *Un travail en collaboration avec M. Mella vise à développer ces méthodes afin de prouver que $SU_C(2)$ est rationnel si C est de genre 3.*

2.2 Le cas de rang > 2 , les systèmes cohérents et les quotients $(\mathbb{P}^n)^d // SL(n + 1)$

Dans l'article [27], j'ai cherché à généraliser la construction de [5] aux cas de rang supérieur. Naturellement dans ces cas nous ne disposons pas des applications classifiantes qui permettent de décrire de belles géométries comme dans le cas du rang 2, pourtant certains aspects peuvent être également développés.

Soit $\mathcal{U}_C(r)$ l'espace de modules de fibrés vectoriels semi-stables de degré 0 de rang r sur une courbe lisse, complexe C de genre g . L'approche de [27] se base sur l'étude de la structure birationnelle de $\mathcal{U}_C(r)$ et $SU_C(r)$ par le biais de l'étude d'un espace de modules de fibrés vectoriels "décorés", notamment l'espace de modules de systèmes cohérents.

2.2.1 Les systèmes cohérents et la structure de leurs espaces de modules

Un couple (F, V) est un *système cohérent* de type (r, d, k) sur la courbe C si F est un fibré vectoriel de rang r et degré d sur C et $V \subseteq H^0(F)$ est un sous-espace vectoriel de dimension k .

Un sous-système cohérent propre de (F, V) est un couple (G, W) où G est un sous-fibré de F et $W \subseteq V \cap H^0(F)$, avec $(G, W) \neq (F, V)$.

Il existe aussi une notion de stabilité des systèmes cohérents, qui dépend d'un paramètre réel α . Pour tout réel α , nous définissons la α -pente d'un système cohérent (F, V) de type (r, d, k) comme suit :

$$\mu_\alpha(F, V) = \frac{d}{r} + \alpha \frac{k}{r}.$$

Définition 2.2.1. *Un système cohérent (F, V) est α -stable (resp. α -semi-stable) si pour tout sous-système cohérent propre (G, W) de (F, V) nous avons :*

$$\mu_\alpha(G, W) < \mu_\alpha(F, V) \quad (\text{resp. } \leq).$$

Il existe alors une famille finie d'espaces de modules qui dépendent de la valeur de α (voir [36], section 2). Dans la suite de ce mémoire, nous écrirons $G_\alpha(r, d, k)$ pour l'espace de modules de systèmes cohérents, où α est le paramètre réel et r, d et k les paramètres discrets définis précédemment.

Dans [27] nous avons démontré que, si $\alpha > g(r - 1)$, l'espace de modules $G_\alpha(r, rg, r)$ a une structure de fibration naturelle.

Théorème 2.2.2. *(cf. [27], Thm. 1.1) Soit C une courbe complexe lisse de genre $g > 1$, non-hyperelliptique si $g > 2$, et soit $\alpha > g(r - 1)$. Alors $G_\alpha(r, rg, r)$ est birationnel à une fibration au-dessus de $C^{(rg)}$ dont les fibres sont des quotients GIT $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg} // SL(r)$.*

Si $\alpha > g(r - 1)$, l'espace de modules $G_\alpha(r, rg, r)$ étant birationnellement équivalent à $\mathcal{U}_C(r)$, un résultat analogue au Thm. 2.2.2 est valable pour $\mathcal{U}_C(r)$. Notamment, si nous considérons le sous-espace de modules $SU_C(r) \subset \mathcal{U}_C(r)$ des fibrés vectoriels avec déterminant trivial nous obtenons l'énoncé suivant :

Théorème 2.2.3. (cf. [27], Thm. 1.2) *L'espace de modules $SU_C(r)$ est birationnel à une fibration au-dessus de $\mathbb{P}^{(r-1)g}$ dont les fibres sont des quotients GIT $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg} // SL(r)$.*

Soit V un espace vectoriel de dimension r . L'idée principale de la preuve du théorème 2.2.2 est de construire une famille plate de systèmes cohérents de type (r, rg, r) sur C au-dessus d'un ouvert de $(\mathbb{P}(V))^{rg}$, en ayant fixé un diviseur B effectif de degré rg sur C .

Soit $v = (v_1, \dots, v_{rg}) \in \mathbb{P}(V)^{rg}$, v définit un morphisme surjectif de faisceaux $V^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_B$ comme suit : c'est le morphisme nul en dehors du support de B et il est obtenu en prenant un relèvement de v_i à V^* et en l'appliquant à la fibre de $V^* \otimes \mathcal{O}_C$ au-dessus de $x_i \in B$. En effet, le morphisme dépend du choix du relèvement, mais le noyau de la suite

$$(2.2.1) \quad 0 \longrightarrow \ker(v) \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{v} \mathcal{O}_B \rightarrow 0,$$

est bien défini sur $\mathbb{P}(V)^{rg}$. Donc les fibrés $F_v := \ker(v)^*$, pour $v \in \mathbb{P}(V)^{rg}$, forment une famille de fibrés vectoriels de rang r sur C avec déterminant $\mathcal{O}_C(B)$; en tordant de manière appropriée, nous pouvons obtenir des fibrés de degré zéro. Les fibrés F_v sont génériquement engendrés par un sous-espace de $H^0(C, F_v)$ de dimension r qu'on nomme V_v . Le couple (F_v, V_v) est un système cohérent de type (r, rg, r) ; en outre la famille (F_v, V_v) est invariante sous l'action diagonale de $SL(r)$ sur $\mathbb{P}(V)^{rg}$, donc elle est bien définie sur $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg} // SL(r)$.

L'une des conséquences du Thm. 2.2.2 est que nous obtenons une bijection entre le fibré vectoriel général (ou le système cohérent) et un ensemble de rg points dans \mathbb{P}^{r-1} . Il est, donc, parfaitement justifié de comparer la stabilité GIT d'un ensemble de points dans $(\mathbb{P}^{r-1})^{rg} // SL(r)$ avec la μ -stabilité des fibrés vectoriels et la α -stabilité des systèmes cohérents. Par exemple, nous trouvons que, si $\alpha > g(r-1)$, la (semi-) stabilité d'un ensemble de points implique la α -(semi-)stabilité du système cohérent associé.

2.2.2 Applications aux variétés de Coble

Comme dans [5], le théorème 2.2.3 nous permet de donner une description explicite plus précise de la géométrie projective de la fibration de $SU_C(r)$ dans le cas $r = 3, g = 2$. En effet, pour une courbe de genre 3 $SU_C(3)$ est un revêtement double de \mathbb{P}^8 ramifié le long d'une hypersurface \mathcal{C}_6 de degré 6 appelée *sextique de Coble-Dolgachev* [104]. Notre résultat est le suivant :

Théorème 2.2.4. (cf. [27] Thm. 7.1 et Cor. 7.1) *La sextique de Coble-Dolgachev \mathcal{C}_6 est birationnelle à une fibration au-dessus de \mathbb{P}^4 dont les fibres sont des quartiques d'Igusa. Plus précisément, \mathcal{C}_6 contient une famille de dimension 4 de quartiques d'Igusa, paramétrée par un sous-ensemble ouvert de \mathbb{P}^4 .*

Nous rappelons que la quartique d'Igusa est une hypersurface quartique modulaire dans \mathbb{P}^4 qui est en relation avec certains quotients GIT classiques (voir e.g. [49]) et certains espaces de modules. Notamment, cette quartique est isomorphe à la compactification de Satake $\overline{\mathcal{A}_2(2)}$ de l'espace de modules de surfaces abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau 2. Sa variété duale est une hypersurface cubique de dimension 3 appelée *cubique de Segre*, qui est isomorphe au quotient GIT $(\mathbb{P}^1)^6 // SL(2)$.

Si $r = 2$ et $g = 3$, alors $SU_C(2)$ est plongée dans \mathbb{P}^7 comme une hypersurface quartique remarquable \mathcal{C}_4 appelée *quartique de Coble* [114]. Les méthodes développées dans [27] permettent de donner une preuve élémentaire du résultat suivant, déjà énoncé dans [5] :

Proposition 2.2.5. (cf. [27], Prop. 7.3) *La quartique de Coble \mathcal{C}_4 est birationnelle à une fibration au-dessus de \mathbb{P}^3 dont les fibres sont des cubiques de Segre. Il existe une famille de dimension 3 de cubiques de Segre contenues dans \mathcal{C}_4 .*

2.3 Compactifications de $\mathcal{M}_{0,n}$ et théorie géométrique des invariants

Lors de la rédaction de [5], je me suis rendu compte que l'application polynomiale (2.1.2) qui contracte toutes les courbes rationnelles normales qui passent par $2g$ points fixés dans \mathbb{P}^{2g-2} devait avoir une description modulaire plus précise. Le résultat des recherches effectuées dans cette direction constitue l'article [26].

2.3.1 Interprétations de deux compactifications de $\mathcal{M}_{0,n}$ en termes de courbes rationnelles normales

Il existe plusieurs manières de compactifier $\mathcal{M}_{0,n}$. Nous avons déjà introduit la compactification GIT (voir par exemple [49]). Cela consiste d'abord à considérer l'algèbre R_1^n des sections $SL(2)$ -invariantes de toutes les puissances d'une polarisation L sur $(\mathbb{P}^1)^n$. Ensuite nous définissons la compactification (ou quotient) GIT $(\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$ comme $\mathbf{Proj}(R_1^n)$. Cette variété contient tous les points semi-stables par rapport à une linéarisation de l'action de $SL(2)$. En outre, la variété $(\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$ est naturellement plongée dans l'espace projectivisé $\mathbb{P}(H^0((\mathbb{P}^1)^n, L)^{SL(2)})^*$ des sections invariantes de la polarisation. La compactification de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est toujours lisse, par contre celle GIT est singulière le long du lieu strictement semi-stable.

Les deux espaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et $(\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$ contiennent $\mathcal{M}_{0,n}$ en tant que sous-ensemble ouvert mais la compactification fourni par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est légèrement plus fine sur le bord. De plus, il existe un morphisme de *contraction* surjectif

$$c_n : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$$

qui contracte certains sous-schémas du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. Par contre, la restriction de c_n au sous-ensemble ouvert $\mathcal{M}_{0,n}$ est un isomorphisme.

Les applications qui contractent toute courbe rationnelle normale, découvertes par hasard dans [5], créent un lien intéressant entre ces deux compactifications de $\mathcal{M}_{0,n}$, les courbes rationnelles et les systèmes linéaires sur l'espace projectif.

La relation entre courbes rationnelles normales et $\mathcal{M}_{0,n}$ a été formalisé en termes modernes par Kapranov dans [83] et [82] (voir aussi [49], section III.2). Suivant l'idée de Kapranov, nous appellerons *courbe de Veronese* une courbe rationnelle normale de degré m dans \mathbb{P}^m , avec $m \geq 2$, *i.e.* une courbe projectivement équivalente à \mathbb{P}^1 dans son $m^{\text{ème}}$ plongement de Veronese. Un résultat classique est que par n'importe quel ensemble de $n + 3$ points en position générale dans \mathbb{P}^n passe une unique courbe de Veronese.

Soit \mathcal{H} le schéma de Hilbert qui paramètre tous les sous-schémas de \mathbb{P}^{n-2} . Kapranov a remarqué ([83], Thm. 0.1) qu'il existe un isomorphisme entre le sous-schéma $V_0(p_1, \dots, p_n) \subset \mathcal{H}$ des courbes de Veronese qui passent par n points fixés p_i en position générale dans \mathbb{P}^{n-2} et $\mathcal{M}_{0,n}$. Ensuite il a étendu cela à un isomorphisme

$$(2.3.1) \quad \kappa_n : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \longrightarrow V(p_1, \dots, p_n),$$

où $V(p_1, \dots, p_n)$ est la adhérence de V_0 dans \mathcal{H} . L'espace $V_0(p_1, \dots, p_n)$ est le sous-schéma de \mathcal{H} qui paramètre toutes les courbes rationnelles normales non-dégénérées de degré $n - 2$. Donc, en prenant la adhérence V , nous admettons aussi les courbes rationnelles réductibles. Nous appellerons ces courbes de bord *courbes de Veronese réductibles*.

Soit n un entier positif. Considérons un ensemble W de points généraux e_i , $i = 1, \dots, 2n$ dans \mathbb{P}^{2n-2} et le système linéaire $|\Omega_{2n}|$ des formes de degré n qui s'annulent avec multiplicité $n - 1$ en les $2n$ points de W . Appelons $\varphi_{\Omega_{2n}}$ l'application rationnelle associée au système linéaire $|\Omega_{2n}|$. Le résultat principal de [26] est le suivant :

Théorème 2.3.1. (cf. [26], Thm. 1.1) *Il existe un isomorphisme*

$$|\Omega_{2n}| \cong \mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{2n}, L)^{SL(2)}$$

et la adhérence de l'image de

$$\varphi_{\Omega_{2n}} : \mathbb{P}^{2n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{2n}, L)^{SL(2)}$$

est $(\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$. La adhérence de la fibre de $\varphi_{\Omega_{2n}}$ au-dessus de chaque point $p \in \mathcal{M}_{0,2n} \subset (\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2)$ est la courbe de Veronese (éventuellement réductible) associée au point p via l'isomorphisme κ_n .

Il existe aussi un lien étroit entre l'application rationnelle $\varphi_{\Omega_{2n}}$ et les applications d'oubli naturelles $f_i : \overline{\mathcal{M}}_{0,2n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,2n}$ qui oublient un marquage. En effet, comme il a été vu dans le théorème 2.1.3, il existe une suite d'éclatements, qui donne lieu à un morphisme birationnel $b_{2n+1} : \overline{\mathcal{M}}_{0,2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^{2n-2}$. Le fait que $\overline{\mathcal{M}}_{0,2n+1}$ et \mathbb{P}^{2n-2} sont birationnels implique qu'il existe une application rationnelle $\varphi_{\Lambda_{2n}} : \mathbb{P}^{2n-2} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{2n} // SL(2)$, génériquement de dimension relative 1, qui fait commuter le diagramme suivant :

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,2n+1} & \xrightarrow{f_{2n+1}} & \overline{\mathcal{M}}_{0,2n} \\ b_{2n+1} \downarrow & & \downarrow c_{2n} \\ \mathbb{P}^{2n-2} & \xrightarrow{\varphi_{\Lambda_{2n}}} & (\mathbb{P}^1)^{2g} // SL(2) \end{array}$$

En effet, l'application $\varphi_{\Lambda_{2n}} : \mathbb{P}^{2n-2} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{2n} // SL(2)$ est exactement la composée de l'inverse birationnelle de b_{2n+1} avec $c_{2n} \circ f_{2n+1}$. Il s'avère enfin que notre application $\varphi_{\Omega_{2n}}$ est la flèche manquante $\varphi_{\Lambda_{2n}}$. Naturellement, le diagramme 2.3.2 existe aussi pour les courbes pointées un nombre impair de fois, mais une description polynomiale semblable de la flèche $\varphi_{\Lambda_{2n}}$ n'est pas possible. Dans un premier temps, j'avais remarqué que cela était plus compliqué car la preuve de mes résultats utilise fréquemment la parité du nombre de points marqués. Ensuite N.Giansiracusa m'a fait remarquer que cela est une conséquence d'une formule assez élémentaire pour les fibrés en droites de blocs conformes, conséquence détaillée dans la section 2.4.

Une autre description explicite du même espace de modules par des systèmes linéaires sur des espaces projectifs a été donnée par C.Kumar dans ses remarquables articles [89, 90].

En poursuivant le travail de A.Coble sur la variété de Weddle [42, 43], Kumar généralise la rationalisation classique de la cubique de Segre (c'est-à-dire $(\mathbb{P}^1)^6//SL(2)$) donnée par les quadriques qui passent par cinq points généraux dans \mathbb{P}^3 et donne une interprétation de cette construction en termes de fibrés vectoriels. Comme I.Dolgachev a remarqué, notre construction et celle de Kumar sont étroitement liées. Leur relation est détaillée dans [26].

2.3.2 Géométrie birationnelle et fibrations de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Il convient maintenant d'avoir un regard légèrement différent sur ces résultats, notamment interprétés comme des fibrations de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$.

Définition 2.3.2. *Une fibration de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est un morphisme surjectif et propre $f : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow X$ avec $f_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} = \mathcal{O}_X$, où X est un schéma avec $\dim(X) < \dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$.*

Si f est une fibration alors X est irréductible, normal et projectif.

Il est maintenant clair que la géométrie de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, et notamment la description de ses cônes des diviseurs amples et semi-amples, est plus compliquée que celle de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ pour $g > 0$. Par exemple, les théorèmes importants suivants ont été prouvés seulement pour $g \geq 1$ [59] :

Théorème 2.3.3. (cf. [59], Cor. 0.10) *Soit $g \geq 1$, alors toute fibration de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ vers une variété projective se factorise via une application d'oubli $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,i}$ avec $i < n$.*

Théorème 2.3.4. (cf. [59], Cor. 0.11) *Soit $g \geq 1$ et $f : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow X$ un morphisme birationnel vers une variété projective. Alors le lieu exceptionnel de f est contenu dans le bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. En particulier X est encore une compactification de $\mathcal{M}_{g,n}$.*

Comme nous l'avons déjà souligné, de manière assez inattendue, il n'y a pas encore de théorèmes analogues très généraux en genre 0. A.Bruno et M.Mella prouvent dans [2] que si $f : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow X$ est une fibration linéaire (i.e. l'image de la fibre générique dans \mathbb{P}^{n-3} via une contraction de Kapranov est un sous-espace linéaire) alors il existe une factorisation $f = g \circ h$, où h est un morphisme d'oubli et g un morphisme birationnel. En effet, pour tout $n > 2$ pair, les fibrations définies par les applications $c_{2n} \circ f_{2n+1}$ sont des exemples de ce phénomène. Plus précisément, les courbes rationnelles normales en question sont exactement les images de certaines droites via une inversion de Cremona. D'autre part, le morphisme de contraction $c_{2n} = \tilde{\varphi}_{\Xi_{2n}}$ est un exemple en genre 0 d'un morphisme birationnel comme il est décrit dans le théorème 2.3.4. Cela arrive parce que c_{2n} se factorise par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}/\Sigma_{2n}$ et le Thm. 1.3 (2) de [86] montre que tout diviseur NEF non-trivial de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}/\Sigma_{2n}$ est big. Cela implique que toute fibration de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}/\Sigma_{2n}$ vers une variété projective est birationnelle. Comme la restriction de c_{2n} à $\mathcal{M}_{0,2n}$ est un isomorphisme, le lieu exceptionnel est nécessairement contenu dans le bord.

Remarque 2.3.5. *J'ai récemment découvert que le cas $n = 3$ de la construction de [26] avait été utilisé il y a 15 ans dans [47] afin de prouver le principe de Hasse pour les 3-variétés cubiques avec 6 points singuliers. Avec D.Coray, depuis quelques mois, nous essayons de généraliser la construction de [47] aux cas $n > 3$. Conjecturement, cela pourrait permettre de prouver le principe de Hasse pour d'autres hypersurfaces singulières : des quartiques dans \mathbb{P}^6 avec 8 points triples, des quintiques dans \mathbb{P}^8 avec 10 points de multiplicité 4, etc.*

2.4 Formules de factorisation pour les configurations de points, les revêtements cycliques de la droite et les blocs conformes

Comme il a déjà été vu dans la section précédente, un objet fondamental dans la théorie des invariants est l'anneau des invariants pour n points ordonnés dans l'espace projectif. Il est naturel de donner des poids aux points et, par conséquent, de regarder les invariants dans un anneau multi-gradué. En effet, l'anneau des sections de tous les fibrés en droites sur $(\mathbb{P}^d)^n$, appelé anneau de Cox, est gradué par le groupe \mathbb{Z}^n et l'action diagonale de $\text{Aut}(\mathbb{P}^d)$ préserve cette graduation. En prenant le Proj de l'anneau des invariants par rapport à l'action définie par $\underline{c} \in \mathbb{Z}^n$, on obtient, comme il a déjà été vu dans la section précédente, un quotient GIT $(\mathbb{P}^d)^n //_{\underline{c}} \text{SL}(d+1)$, qui est défini avec un plongement projectif dans un espace d'invariants. Des générateurs pour l'anneau d'invariants sont donnés par les fonctions tableaux (de Young), qui apparaissent dans beaucoup de disciplines mathématiques, notamment en théorie de la représentation et en calcul de Schubert [57]. En tensorisant avec \mathbb{Q} afin de permettre des degrés fractionnaires, l'espace des poids possibles prend naturellement la forme d'un hyper-symplexe :

$$\underline{c} \in \Delta(d+1, n) = \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n \mid 0 \leq c_i \leq 1, \sum c_i = d+1\}.$$

L'idéal des relations pour $d=1$ et multi-degré arbitraire \underline{c} a été déterminé récemment dans une série d'articles importants [67]. Dans l'article [28] avec N.Giansiracusa, nous avons étudié la géométrie de certains systèmes d'invariants, en la mettant en relation avec des classes de fibrés en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ obtenus via les blocs conformes (des objets qui apparaissent naturellement en physique théorique) et les revêtements cycliques de \mathbb{P}^1 .

2.4.1 Factorisation des invariants

Dans notre premier théorème principal, nous avons mis en relation les invariants pour $d > 1$ avec les invariants sur des espaces projectifs de dimension plus basse. Ce théorème montre aussi comment, même en partant avec un vecteur démocratique de poids \underline{c} (*i.e.* les poids sont tous égaux), des poids non-symétriques apparaissent lorsque les configurations de points dégèrent :

Théorème 2.4.1. (cf. [28], Thm. 1.1) *Fixons des entiers $n = n_1 + n_2$ et $d = d_1 + d_2$ avec $n_i \geq 2, d_i \geq 1$, et considérons deux sous-espaces linéaires génériques $\mathbb{P}^{d_i} \subseteq \mathbb{P}^d$. Pour tout $\underline{c} \in \Delta(d+1, n)$ tel que*

$$d_1 \leq \sum_{i=1}^{n_1} c_i \leq d_1 + 1 \quad \text{and} \quad d_2 \leq \sum_{i=n_1+1}^n c_i \leq d_2 + 1,$$

la restriction d'un invariant de multi-degré \underline{c} à $\mathbb{P}^{d_1} \cup \mathbb{P}^{d_2} \subseteq \mathbb{P}^d$ est un produit d'invariants avec multi-degré $\underline{c}' := (c_1, \dots, c_{n_1}, (\sum_{i=n_1+1}^n c_i) - d_2)$ et $\underline{c}'' := (c_{n_1+1}, \dots, c_n, (\sum_{i=1}^{n_1} c_i) - d_1)$ pour les \mathbb{P}^{d_i} .

En outre, en étudiant les plongements projectifs des quotients induits par ces invariants, nous démontrons :

Théorème 2.4.2. (cf. [28], Thm. 1.2) *En gardant la même notation, il existe un morphisme d'attachement*

$$\gamma : (\mathbb{P}^{d_1})^{n_1+1} //_{\underline{c}'} \text{SL}(d_1+1) \times (\mathbb{P}^{d_2})^{n_2+1} //_{\underline{c}''} \text{SL}(d_2+1) \longrightarrow (\mathbb{P}^d)^n //_{\underline{c}} \text{SL}(d+1).$$

Le plongement projectif du codomaine se restreint au produit de Segre des plongements projectifs des deux composantes du produit : $\gamma^* \mathcal{O}_{\underline{c}}(1) \cong \mathcal{O}_{\underline{c}'}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\underline{c}''}(1)$.

Dans [28], nous avons étudié les relations entre $(\mathbb{P}^1)^n // \mathrm{SL}(2)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ sous une perspective différente de celle de [26]. D'autres points de vue avaient été considérés dans [82, 4].

En effet, grâce à [115, Theorem 1.1], pour tout $1 \leq d \leq n-3$ et $\underline{c} \in \Delta(d+1, n)$ il existe un morphisme $\varphi : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow (\mathbb{P}^d)^n //_{\underline{c}} \mathrm{SL}(d+1)$ qui envoie une configuration de points distincts de \mathbb{P}^1 sur la configuration correspondante dans \mathbb{P}^d via le $d^{\mathrm{ème}}$ morphisme de Veronese. Le point générique d'un diviseur de bord $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+1} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est envoyé sur une configuration qui est jacente sur l'union de deux courbes rationnelles normales $C_1 \cup C_2 \subseteq \mathbb{P}^{d_1} \cup \mathbb{P}^{d_2}$ avec $\deg(C_i) = d_i$ et avec un noeud au point $\mathbb{P}^{d_1} \cap \mathbb{P}^{d_2}$. Nous avons donc défini un *fibré GIT* comme un fibré en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ de la forme $\mathcal{G}_{d,\underline{c}} := \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Une conséquence importante du théorème 2.4.2 est donc la suivante :

Corollaire 2.4.3. (cf. [28], Cor. 1.3) *La restriction d'un fibré $\mathcal{G}_{d,\underline{c}}$ à n'importe quel diviseur de bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est de la forme $\mathcal{G}_{d_1,\underline{c}'} \boxtimes \mathcal{G}_{d_2,\underline{c}''}$.*

En s'inspirant de la théorie des blocs conformes, nous avons appelé ce phénomène "factorisation".

2.4.2 Revêtements cycliques et fibrés de Hodge

On peut regarder une configuration de points sur \mathbb{P}^1 comme l'ensemble des points de ramification d'un revêtement. De cette manière nous tombons naturellement sur des espaces de modules de courbes algébriques de genre positif. Plus précisément, étant donné des entiers $n \geq 4, r \geq 2$, et $\underline{c} \in \mathbb{Z}^n$ avec $c_i \geq 0$ et $r \mid \sum_{i=1}^n c_i$, il existe une application $\mathcal{M}_{0,n} \rightarrow \mathcal{M}_g$ qui envoie une configuration $(\mathbb{P}^1, p_1, \dots, p_n)$ sur le revêtement cyclique de degré r ramifié en $\sum_{i=1}^n c_i p_i$. Si $p_i = [x_i : 1]$, c'est précisément le modèle régulier de l'extension du corps de fonctions $\mathbb{C}(x)$ donnée par $y^r = (x-x_1)^{c_1} \cdots (x-x_n)^{c_n}$. Le genre du revêtement cyclique est déterminé par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$(2.4.1) \quad g = \frac{1}{2} \left(2 - 2r + \sum_{i=1}^n (r - \gcd(c_i, r)) \right).$$

Cette application a été étudiée par Fedorchuk dans [56] : il montre qu'elle s'étend à un morphisme $f_{\underline{c},r} : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$. Nous montrons dans [28] un autre type de factorisation. Nous démontrons que la restriction à un diviseur de bord de ce morphisme est essentiellement le produit de morphismes du même type (cf. Fig. 2.2) :

Théorème 2.4.4. (cf. [28], Prop. 1.4) *Pour $n = n_1 + n_2$, avec $n_i \geq 2$, il existe un diagramme commutatif*

$$(2.4.2) \quad \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+1} & \xrightarrow{\quad \hookrightarrow \quad} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \\ \downarrow (f_{\underline{c}',r}, f_{\underline{c}'',r}) & \searrow & \downarrow f_{\underline{c},r} \\ & (\overline{\mathcal{M}}_{g_1,s} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,s}) / S_s & \\ & \uparrow & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g_1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2} & \xleftarrow{\quad \pi \quad} \overline{\mathcal{M}}_{g_1,s} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,s} \xrightarrow{\quad \rho \quad} & \overline{\mathcal{M}}_g \end{array}$$

où π est le produit de deux morphismes d'oubli, ρ est une application d'attachement (voir Fig. 2.3), $s = g - (g_1 + g_2) + 1$, et $\underline{c}' = (c_1, \dots, c_{n_1}, \sum_{i=n_1+1}^n c_i)$, $\underline{c}'' = (c_{n_1+1}, \dots, c_n, \sum_{i=1}^{n_1} c_i)$.

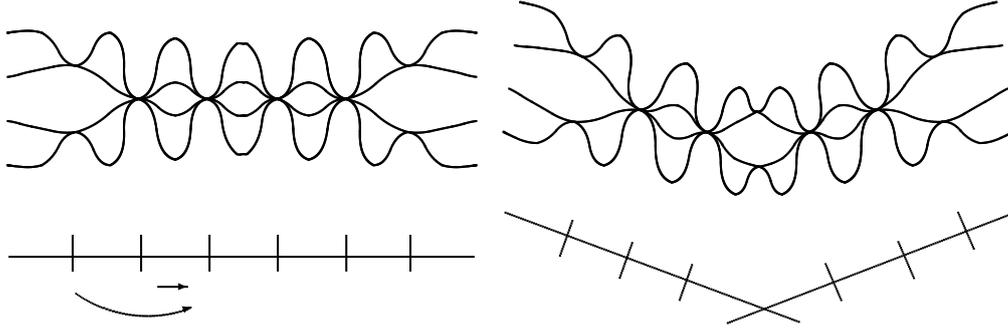


FIGURE 2.2 – La limite d’un revêtement de degré $r = 4$ avec des poids $\underline{c} = (2, 1, 3, 3, 1, 2)$ est obtenue en encollant deux revêtements avec poids $\underline{c}' = (2, 1, 3, 2)$ et $\underline{c}'' = (2, 3, 1, 2)$ en deux points situés au-dessus du noeud de ramification.

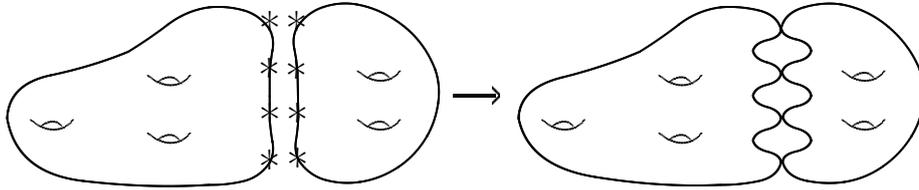


FIGURE 2.3 – L’application d’attachement $\rho : \overline{\mathcal{M}}_{3,4} \times \overline{\mathcal{M}}_{2,4} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_8$.

Les revêtements cycliques ont une grande variété d’applications. Notamment, ils ont été utilisés afin d’étudier des sous-variétés spéciales dans l’espace de modules de variétés abéliennes [110, 23], et des courbes et des diviseurs dans l’espace de modules de courbes [40, 56]. La restriction du fibré de Hodge $\mathbb{E}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ au lieu qui paramètre les revêtements cycliques joue un rôle important dans plusieurs de ces applications. En étudiant les fibrés de Hodge dans le théorème 2.4.4, nous déduisons :

Corollaire 2.4.5. (cf. [28], Cor. 1.5) *La restriction de $\det f_{\underline{c},r}^* \mathbb{E}_g$ à tout diviseur de bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est de la forme $\det f_{\underline{c}',r}^* \mathbb{E}_{g_1} \boxtimes \det f_{\underline{c}'',r}^* \mathbb{E}_{g_2}$.*

Nous remarquons effectivement une ressemblance structurale entre ces fibrés en droites déterminants et les fibrés en droites GIT qui ont été décrit précédemment. Nous avons formalisé cela dans le cadre que nous allons développer dans la section suivante.

2.4.3 Règles de factorisation

Le modèle de Wess-Zumino-Witten (WZW) produit une classe importante de théories conformes des champs 2-dimensionnelles. Notamment, pour toute algèbre de Lie simple complexe \mathfrak{g} de dimension finie, tout niveau $l \in \mathbb{N}$, et n -uplet $\underline{\lambda}$ de poids dominants entiers, le modèle WZW produit un fibré vectoriel algébrique sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, que nous notons $\mathbb{V}(\mathfrak{g}, l, \underline{\lambda})$. La fibre de ce fibré au-dessus d’une courbe marquée $[C, p_1, \dots, p_n] \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, appelée espace de *blocs conformes*, est un espace vectoriel complexe de dimension finie qui peut être réalisé comme un espace de fonctions thêta paraboliques généralisées si C est lisse, et qui, en général, est construit comme un espace de coinvariants. Une définition soignée de cet espace vectoriel est présentée dans l’appendice A.

Ces fibrés de blocs conformes ont été largement étudiés dans les années 90 à cause de leurs relations avec la physique mathématique, la géométrie algébrique, et la théorie des représentations [132, 54, 10, 133, 140, 123, 105, 52].

Un outil qui s'est révélé particulièrement important dans l'étude des fibrés de blocs conformes est la formule de Verlinde, qui calcule le rang des fibrés de blocs à partir des paramètres discrets qui entrent en jeu. La plupart des preuves de la formule ont leurs racines dans les règles de factorisation, qui décrivent par exemple l'espace vectoriel au-dessus d'une courbe irréductible C en termes des espaces vectoriels au-dessus des composantes d'une courbe réductible qui est une dégénérescence de C . L'idée est que, en construisant une fonction numérique qui reproduit les règles de factorisation et qui donne les dimensions des espaces de blocs lors de cette dégénérescence, nous pouvons construire un anneau, appelé l'anneau de fusion, dont la théorie de représentation contient des informations sur la formule de Verlinde et fournit une manière élégante de les démontrer (voir [10]).

Récemment il y a eu beaucoup d'activité sur le modèle WZW, largement due aux formules de Fakhruddin sur les classes de Chern des fibrés de blocs conformes [53]. Ces formules fournissent une méthode pour déterminer les classes d'isomorphisme des fibrés en droites déterminants associés, par le biais de la théorie d'intersection. Cela a ouvert beaucoup de perspectives sur la géométrie de ces objets, notamment dans le cas de genre 0. [53, 6, 134, 50, 56, 115, 58, 1].

Dans [28] nous introduisons une version abstraite de la factorisation de WZW qui est conceptuellement "orthogonale" aux règles de fusion. D'une part, les règles de fusion se concentrent sur le rang des fibrés de blocs conformes lors de la dégénérescence de la courbe sous-jacente, en oubliant toute autre information, d'autre part notre construction s'applique seulement aux fibrés de rang 1, mais par contre elle décrit la classe d'isomorphisme de ces fibrés en droites.

Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $2 \leq |I| \leq n - 2$, il existe une application de bord $\partial_I : \overline{\mathcal{M}}_{0,I+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,I^c+1} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, où $I^c := \{1, \dots, n\} \setminus I$ est l'ensemble complémentaire d'indices. Cela induit un morphisme de restriction $\partial_I^* : \text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,I+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,I^c+1})$.

Définition 2.4.6. (cf. [28], Def. 2.2) *Un système de factorisation divisorielle est un sous-ensemble*

$$\mathcal{L} \subseteq \bigcup_{n \geq 3} \text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$$

qui est fermé par rapport à la restriction au bord : si $L \in \mathcal{L}$ est dans $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ pour un $n \geq 4$, et $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ satisfait $2 \leq |I| \leq n - 2$, alors $\partial_I^* L = L' \boxtimes L''$ pour certains $L', L'' \in \mathcal{L}$. Si nous nous donnons un ensemble S , nous disons que le système \mathcal{L} est S -pondéré s'il existe¹

$$\Phi = (\Phi_3, \Phi_4, \dots) \in \prod_{n \geq 3} \text{Hom}_{\text{Ens}}(S^n, \text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}))$$

telles que $\mathcal{L} = \bigcup_{n \geq 3} \text{Im } \Phi_n$. Nous pouvons donc appeler Φ une S -pondération pour \mathcal{L} .

L'interprétation de cette définition est qu'une S -pondération fournit une manière de spécifier un fibré en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ en spécifiant un élément de S pour chaque point marqué. La restriction de ce fibré en droites à un diviseur de bord est donc déterminée par un élément de S pour tout point marqué comme précédemment, plus des éléments de S pour chacun des

1. *Ens* indique que nous considérons les morphismes dans la catégorie des ensembles.

deux points d'attachement. En tout cas, nous ne demandons pas que les poids qui déterminent ce fibré en droites restreint soient uniques.

Définition 2.4.7. (cf. [28], Def. 2.4) Si nous nous donnons un système S -pondéré (\mathcal{L}, Φ) , une règle de factorisation divisorielle est une collection de couples d'applications (ϕ_I, ψ_I) , $\phi_I : S^n \rightarrow S^{|I|+1}$, $\psi_I : S^n \rightarrow S^{|I^c|+1}$, pour chaque $n \geq 4$ et I comme ci-dessus, satisfaisant

$$\partial_I^* \circ \Phi_n = (\Phi_{|I|+1} \circ \phi_I) \boxtimes (\Phi_{|I^c|+1} \circ \psi_I).$$

Théorème 2.4.8. (cf. [28], Prop. 2.5) Si deux systèmes admettent la même règle de factorisation divisorielle, alors leurs fibrés en droites sont isomorphes pour tout $n \geq 4$ s'ils le sont pour $n = 4$.

Le vecteur \underline{c} fournit une notion de poids pour les points marqués dans le contexte des fibrés $\mathcal{G}_{d,\underline{c}}$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, et par le Corollaire 2.4.3 ces fibrés en droites forment un système de factorisation divisorielle. De manière semblable, le vecteur avec les multiplicités de ramification pour un revêtement cyclique donne des poids pour les points sur \mathbb{P}^1 et le Corollaire 2.4.5 implique que les restrictions des classes de Hodge à ces lieux de revêtements cycliques pondérés forment un autre système de factorisation. Ces classes de Hodge sont étroitement liées aux fibrés en droites étudiés par Fedorchuk dans [56], définis en prenant d'abord la décomposition en μ_r -fibrés propres de la restriction du fibré de Hodge et puis en prenant les déterminants de ces composantes directes. Il se trouve que même cette classe de fibrés en droites, que nous appelons *fibrés cycliques*, forme un système de factorisation divisorielle. L'objectif principal de [28] était de prouver que les règles de factorisation divisorielle des fibrés GIT, des fibrés cycliques, et d'une certaine classe de fibrés en droites de blocs conformes (CB) coïncident toutes.

Théorème 2.4.9. (cf. [28], Thm. 1.7) Fixons $n \geq 4, r \geq 2$, et $\underline{c} \in \mathbb{Z}^n$ avec $0 \leq c_i < r$ et $r \mid \sum_{i=1}^n c_i$. Les fibrés en droites suivants sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ sont isomorphes :

- (i) le fibré vectoriel $\mathbb{V}(\mathfrak{sl}_r, 1, \underline{c})$ de bloc \mathfrak{sl}_r -conformes de niveau 1 avec poids fondamentaux $(\omega_{c_1}, \dots, \omega_{c_n})$;
- (ii) le pullback de $\mathcal{O}(1)$ le long de l'application $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow (\mathbb{P}^{\frac{|\underline{c}|}{r}-1})^n //_{\underline{c}} \mathrm{SL}(|\underline{c}|/r)$ qui envoie une configuration de points sur la droite sur la configuration correspondante sur une courbe rationnelle normale ;
- (iii) le $r^{\text{ème}}$ produit tensoriel du déterminant du μ_r -fibré propre du fibré de Hodge correspondant au caractère unité, restreint au lieu des revêtements cycliques ramifiés avec lieu de ramification pondéré par \underline{c} .

En effet, pour le cas $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1$ nous appliquons des résultats standard, donc le théorème 2.4.9 devient une application du théorème 2.4.8. L'identification des fibrés CB avec les fibrés GIT a été prouvée dans [58, Theorem 3.2]. L'identification des fibrés cycliques par contre est parue dans [56, Theorem 4.5]. Pourtant, dans tous les deux cas la preuve se base sur le calcul du degré de la restriction à des courbes rationnelles contenues dans le bord, appelées F -courbes. Une fois que les formules pour ces degrés sont obtenues, le problème se réduit à un problème de nature numérique/combinatoire, notamment montrer que les trois formules du degré coïncide. Notre preuve en utilisant la factorisation montre que les isomorphismes dans le théorème ont des propriétés de functorialité similaires dans ces trois constructions.

Dans un travail en cours [29] avec N.Giansiracusa, D.Jensen et A.Massarenti, nous sommes en train de donner une interprétation géométrique semblable aux fibrés de blocs conformes sur les espaces de modules de courbes de genre positif.

Chapitre 3

Catégories Dérivées et questions de rationalité.

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats les plus importants que j'ai obtenus dans le domaine des catégories dérivées des variétés projectives et de leurs applications à la géométrie birationnelle. Avant de commencer, je voudrais souligner le caractère encore partiellement "expérimental" de la recherche dans ce domaine. En effet, il existe plusieurs *philosophies de recherche* générales, que j'ai essayé d'esquisser dans l'introduction, qui relient la géométrie birationnelle et les catégories dérivées. Souvent, l'objectif du chercheur dans ce domaine est de formuler ces idées générales de manière précise et d'établir les classes de variétés les plus larges possible pour lesquelles elles sont valables. L'une de ces philosophies de recherche veut relier la géométrie birationnelle d'une variété projective aux décompositions semi-orthogonales de sa catégorie dérivée.

Soit X une variété projective lisse ; nous allons noter $\mathbf{D}^b(X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux cohérents. Pour une introduction efficace au langage des catégories dérivées nous nous référerons à [68].

3.1 Sous-catégories admissibles, orthogonalité et décompositions semi-orthogonales dans $\mathbf{D}^b(X)$

Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions de base, sur un corps arbitraire k , qui seront utiles dans la suite. Soit X une variété projective. Toutes les sous-catégories de $\mathbf{D}^b(X)$ que l'on considère sont triangulées. Dans ce chapitre, nous allons travailler sur le corps des complexes dans les sections 3.2, 3.3 et 3.5, tandis que dans la section 3.4, sauf s'il est précisé différemment, nous travaillerons sur un corps arbitraire k .

Définition 3.1.1. Si $\sigma : A \hookrightarrow \mathbf{D}^b(X)$ est une sous-catégorie pleine, on dit que A est admissible si σ admet des adjoints à droite et à gauche (que l'on notera alors $\sigma^!$ et σ^*).

Définition 3.1.2. Soient A_1, \dots, A_n des sous-catégories pleines de $\mathbf{D}^b(X)$. On dit que l'on a une décomposition semi-orthogonale de $\mathbf{D}^b(X)$ par les A_i , que l'on note :

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle,$$

si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $j > i$, pour tout $\mathcal{F} \in \mathbf{A}_i$ et pour tout $\mathcal{G} \in \mathbf{A}_j$ on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0$,
- pour tout $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(X)$, il existe une suite longue de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = \mathcal{F}_n & \longrightarrow & \mathcal{F}_{n-1} & \cdots & \mathcal{F}_{k+1} & \longrightarrow & \mathcal{F}_k & \cdots & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \\
 & & \searrow \\
 & & & & & & & & & & A_1 \\
 & & A_n & \cdots & & & A_{k+1} & \cdots & & &
 \end{array}$$

avec $A_k \in \mathbf{A}_k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Nous remarquons que les A_k sont uniques à quasi-isomorphie près. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}^b(X)$ une sous-catégorie pleine. Nous appelons *orthogonal à droite* de \mathbf{A} , que l'on note \mathbf{A}^\perp , la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}^b(X)$ définie par :

$$\mathbf{A}^\perp = \{\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(X), \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathbf{A}\}.$$

Il existe naturellement une définition analogue d'orthogonale gauche ${}^\perp\mathbf{A}$.

Définition 3.1.3. *Un objet exceptionnel dans une catégorie dérivée \mathbf{A} est un objet E qui satisfait les conditions $\mathrm{Hom}^i(E, E) = 0$ lorsque $i \neq 0$ et $\mathrm{Hom}(E, E) = k$.*

La proposition suivante fait le lien entre admissibilité pour une sous-catégorie pleine $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}^b(X)$ et décompositions semi-orthogonales de $\mathbf{D}^b(X)$ en fonction de \mathbf{A} .

Proposition 3.1.4. (cf. [34], [35]) *Soit $\sigma : \mathbf{A} \subset \mathbf{D}^b(X)$ une sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}^b(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- \mathbf{A} est admissible dans X ,
- on a les décompositions semi-orthogonales $\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}, {}^\perp\mathbf{A} \rangle$ et $\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}^\perp, \mathbf{A} \rangle$.

Définition 3.1.5. *Soit \mathbf{A} une catégorie k -linéaire avec Hom de dimension finie. Un foncteur de Serre $S : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ est une équivalence additive avec des isomorphismes bi-fonctoriels $\phi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(B, S(A))^*$, pour tous les objets $A, B \in \mathbf{A}$.*

Notons que si $\mathbf{D}^b(X)$ admet un foncteur de Serre (par exemple si X est projective) alors une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}, {}^\perp\mathbf{A} \rangle$$

donne lieu à une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}^\perp, \mathbf{A} \rangle$$

et réciproquement. Ainsi, pour montrer qu'une sous-catégorie pleine $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}^b(X)$ est admissible, il suffit de vérifier que l'on a une décomposition $\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}^\perp, \mathbf{A} \rangle$.

Les décompositions semi-orthogonales sont particulièrement utiles lorsqu'elles peuvent être reliées à des données géométriques intéressantes sur X . Les *décompositions de Lefschetz*, introduites par Kuznetsov dans [92], satisfont à cette exigence. Elles sont détaillées dans l'appendice B. Il s'agit de décompositions semi-orthogonales particulièrement pratiques pour l'étude d'un (ou plusieurs) fibrés en droites donnés sur le schéma X . Voir [92, Def. 4.1] pour plus de détails.

3.2 Décompositions semi-orthogonales et géométrie birationnelle : le cas des fibrés en coniques

L'un des défis les plus attractifs de la recherche dans la théorie des catégories dérivées est de comprendre comment la géométrie d'une variété projective lisse X est codée dans $\mathbf{D}^b(X)$. L'un des axes principaux de recherche, développés pour la première fois par Bondal et Orlov [32], est dédié à la compréhension du type d'informations que contient cette catégorie par rapport à la géométrie birationnelle de X . L'approche la plus prometteuse et efficace consiste en l'étude des décompositions semi-orthogonales

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle A_1, \dots, A_k \rangle.$$

Dans beaucoup de cas intéressants (par exemple \mathbb{P}^n ou les hypersurfaces quadriques lisses), on dispose d'une décomposition dans laquelle les composantes A_i sont toutes (ou presque toutes) équivalentes à la catégorie dérivée d'un point. En effet, on s'attend que, si une sous-catégorie non-triviale apparaît dans une telle décomposition, alors elle apporte des informations sur la géométrie birationnelle de X . Cela est particulièrement évident pour de larges classes de variétés avec dimension de Kodaira négative.

Par exemple, si X est le Fano 3fold V_{14} , alors $\mathbf{D}^b(X)$ admet une décomposition semi-orthogonale avec une seule composante non-triviale, appelons-la A_X . Une décomposition semblable existe aussi pour toutes les hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}^4 . Kuznetsov a montré que, si Y est l'unique 3fold cubique birationnel à X (voir [73]), alors A_X est équivalente à la composante non-triviale A_Y de $\mathbf{D}^b(Y)$. De plus, cette sous-catégorie est un invariant birationnel pour X [98]. En effet, dans [20] les auteurs prouvent, en reconstruisant la variété de Fano des droites contenues dans Y en partant de A_Y , que A_Y détermine la classe d'isomorphisme de Y . La catégorie dérivée d'une hypersurface cubique lisse de dimension 4 admet aussi une décomposition avec un seul objet non-trivial, et Kuznetsov a conjecturé que la composante non-triviale détermine la rationalité de la hypersurface cubique.

Dans cette partie, nous allons explorer les liens entre l'existence de certaines décompositions semi-orthogonales et la rationalité des fibrés en coniques sur des surfaces minimales rationnelles. Dans les sections suivantes nous développerons le cas des fibrations en intersections de quadriques et de certains 4fold cubiques.

Définition 3.2.1. *Soit S une surface projective lisse. Un fibré en coniques standard $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme projectif, plat et surjectif dont les fibres schématiques sont isomorphes à des coniques planes, tel que pour toute courbe irréductible $D \subset S$ la surface $\pi^{-1}(D)$ est irréductible (minimalité relative).*

3.2.1 La théorie classique

La rationalité d'un fibré en coniques standard $\pi : X \rightarrow S$ sur une surface projective lisse S est un problème classique (et encore partiellement ouvert) en géométrie algébrique complexe. Une condition nécessaire pour la rationalité est que la Jacobienne intermédiaire $J(X)$ soit isomorphe, en tant que variété abélienne principalement polarisée (vapp dans la suite), à la somme directe de Jacobiennes de courbes projectives lisses. Par exemple cela a permis [41] de prouver la non-rationalité des 3fold cubiques lisses.

Le lieu discriminant d'un fibré en coniques standard est une courbe $C \subset S$ avec au plus des points doubles [9, Prop 1.2]. Les points lisses de C correspondent aux coniques formées par

deux droites distinctes qui s'intersectent, les noeuds aux droites doubles. Donc on construit un revêtement double étale naturel (un revêtement admissible si C est singulière [9]) $\tilde{C} \rightarrow C$ de la courbe discriminante en considérant les composantes irréductibles des coniques. La Jacobienne intermédiaire est isomorphe à la variété de Prym $P(\tilde{C}/C)$ (voir [9], section 3). Cela permet de prouver la non-rationalité des fibrés en coniques sur \mathbb{P}^2 avec courbe discriminante de degré plus grand que 6 ([9], section 4). Par ailleurs, nous remarquons facilement que, si S n'est pas rationnelle ou C n'est pas connexe, alors X ne peut pas être rationnel. De plus, comme X est standard, $p_a(C)$ est positif [75, Section 1].

Si S est une surface minimale rationnelle, Shokurov [126] a montré que X est rationnel si et seulement si $J(X)$ se scinde en somme directe de Jacobiennes de courbes lisses projectives. Cela arrive seulement dans cinq cas :

si $S = \mathbb{P}^2$,

- soit C est une cubique,
- soit une quartique,
- soit une quintique et $\tilde{C} \rightarrow C$ est induit par une thêta caractéristique paire ;

si $S = \mathbb{F}_n$,

- soit C est hyperelliptique,
- soit trigonale,

et dans ces deux cas le morphisme vers \mathbb{P}^1 est induit par la projection le long du réglage de S . Si S n'est pas minimale, Iskovskih conjecture que il n'y a essentiellement pas d'autres cas [75].

3.2.2 L'approche avec les catégories dérivées

Dans l'article [17] avec M. Bernardara, nous avons abordé le problème en utilisant les décompositions semi-orthogonales des catégories dérivées. En effet, dans [93] Kuznetsov considère le faisceau \mathcal{B}_0 des parties paires de l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique qui définit une fibration en coniques (et plus généralement en quadriques) $X \rightarrow S$. En particulier, il étudie la catégorie dérivée bornée $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ des \mathcal{B}_0 algèbres cohérentes au-dessus de S . On peut noter que Kuznetsov se base sur le travail de référence de Kapranov ([81], [80] pour les catégories dérivées des quadriques).

Théorème 3.2.2. (cf. [93], Thm. 4.2) *Il existe un foncteur plein et fidèle $\Phi : \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$ qui donne la décomposition semi-orthogonale suivante pour la catégorie dérivée de X*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \Phi \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0), \pi^* \mathbf{D}^b(S) \rangle.$$

Si S est une surface rationnelle, sa catégorie dérivée admet une suite exceptionnelle pleine, qui implique la décomposition semi-orthogonale suivante :

$$(3.2.1) \quad \mathbf{D}^b(X) = \langle \Phi \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0), E_1, \dots, E_s \rangle,$$

où les $\{E_i\}_{i=1}^s$ sont des objets exceptionnels. Donc, l'information non triviale sur la géométrie du fibré en coniques est contenue dans la catégorie $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$. Nous remarquons aussi que dans le cas où X est l'éclatement d'un 3fold cubique lisse Y le long d'une droite, $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$

contient la sous-catégorie \mathbf{A}_Y , qui détermine la classe d'isomorphisme de Y (cf. [20]), comme il a été mentionné au début de cette section.

Une approche différente du même problème, par la symétrie miroir homologique généralisée, conduit aux conjectures exposées dans [84, 85].

Théorème 3.2.3. (cf. [17], Thm. 1.1) *Soit $\pi : X \rightarrow S$ un fibré en coniques standard au-dessus d'une surface rationnelle. Supposons que $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ soient des courbes projectives lisses et $k \geq 0$, avec des foncteurs pleins et fidèles $\Psi_i : \mathbf{D}^b(\Gamma_i) \rightarrow \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ pour $i = 1, \dots, k$, tels que $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ admet une décomposition semi-orthogonale*

$$(3.2.2) \quad \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0) = \langle \Psi_1 \mathbf{D}^b(\Gamma_1), \dots, \Psi_k \mathbf{D}^b(\Gamma_k), E_1, \dots, E_l \rangle,$$

où les E_i sont des objets exceptionnels et $l \geq 0$. Alors $J(X) = \bigoplus_{i=1}^k J(\Gamma_i)$ en tant que vapp.

Si S n'est pas rationnelle, et donc X non plus, alors le théorème 3.2.3 n'est plus valable. Sa preuve s'appuie de façon importante sur la rationalité de S . Dans [17, Section 6.3] nous construisons aussi un exemple d'un fibré en coniques standard au-dessus d'une surface non-rationnelle où la sous-catégorie $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ se décompose en catégories dérivées de courbes projectives lisses et objets exceptionnels.

L'intérêt du théorème 3.2.3 est double : d'un côté, c'est le premier exemple où des informations sur les propriétés birationnelles (et sur les cycles algébriquement triviaux) sont obtenues directement d'une décomposition semi-orthogonale. De l'autre côté, cela donne un critère catégorique pour la rationalité des fibrés en coniques sur une surface minimale. En effet, Shokurov [126, Section 10.1] montre qu'un fibré en coniques sur une telle surface est rationnel si et seulement si la variété Jacobienne intermédiaire se scinde. Nous avons aussi prouvé l'implication inverse par une analyse cas par cas.

Théorème 3.2.4. (cf. [17], Thm. 1.2) *Si S est une surface rationnelle minimale, alors X est rationnel et $J(X) = \bigoplus_{i=1}^k J(\Gamma_i)$ si et seulement si il existe des foncteurs pleins et fidèles $\Psi_i : \mathbf{D}^b(\Gamma_i) \rightarrow \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ et une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0) = \langle \Psi_1 \mathbf{D}^b(\Gamma_1), \dots, \Psi_k \mathbf{D}^b(\Gamma_k), E_1, \dots, E_l \rangle,$$

où les E_i sont des objets exceptionnels et $l \geq 0$.

La clé de la preuve du théorème 3.2.3 pour l'implication est l'étude des morphismes induits par un foncteur plein et fidèle $\Psi : \mathbf{D}^b(\Gamma) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$ sur les motifs rationnels de Chow, où Γ est une courbe lisse projective de genre positif. Ces morphismes ont été introduits par Orlov [121]. Notamment, il faut montrer qu'un tel foncteur induit un morphisme injectif $\psi : J(\Gamma) \rightarrow J(X)$ qui préserve la polarisation principale. Pour faire cela nous remarquons d'abord que Ψ est forcément Fourier-Mukai, de noyau $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(\Gamma \times X)$, et donc admet un adjoint, qui est FM aussi avec noyau $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\Gamma \times X)$.

A partir de ces deux noyaux, nous définissons deux cycles mixtes $e := ch(\mathcal{E}) \cdot Td(X)$ et $f := ch(\mathcal{F}) \cdot Td(X)$ dans $CH_{\mathbb{Q}}^{\bullet}(X \times \Gamma)$ grâce auxquels nous pouvons décrire une correspondance fonctorielle entre foncteurs dérivés de Fourier-Mukai et applications motiviques. En effet, en prenant les composantes e_i et $f_i \in CH_{\mathbb{Q}}^i$ de dimension pure des cycles mixtes e et f , nous obtenons des applications motiviques $e_i : h(\Gamma) \rightarrow h(X)(i - m)$ et $f_i : h(X)(i - m) \rightarrow h(\Gamma)$.

La formule de Grothendieck-Riemann-Roch assure que la composée $f \cdot e$ induit l'identité $Id : h(\Gamma) \rightarrow h(\Gamma)$ sur le motif de la courbe.

Donc, en utilisant l'application définie par e sur le motif $h(\Gamma)$ et la décomposition de Chow-Künneth du motif d'un fibré en coniques décrite dans [113, Thm. 1], nous prouvons qu'il existe une isogénie entre $J(\Gamma)$ et une sous-variété de la Jacobienne intermédiaire $J(X)$. L'argument est un peu technique mais n'est pas difficile. Il existe une unique composante (qui correspond à la Jacobienne intermédiaire, isomorphe à la variété de Prym du revêtement double associé $\tilde{C} \rightarrow C$) non-discrete dans la décomposition de Chow-Künneth du motif d'un fibré en coniques au-dessus d'une surface rationnelle. Nous notons cette composante $P(\tilde{C}/C)$. De la même façon, il existe une unique composante $h^1(\Gamma)$ (qui correspond à la Jacobienne de la courbe) dans la décomposition du motif d'une courbe de genre positif. Donc, comme la composition $f \cdot e$ est égale à l'identité, $h^1(\Gamma)$ est isomorphe à une composante directe de $P(\tilde{C}/C)$. Par un argument standard, cela implique qu'il existe une isogénie entre $J(\Gamma)$ et une sous-variété abélienne de $J(X)$, dont on peut prouver l'injectivité, donc un isomorphisme sur une sous-vapp de $J(X)$. Ensuite, l'existence de la décomposition semi-orthogonale implique la bijectivité de la somme des ψ_i pour les courbes Γ_i .

Pour la réciproque il est suffisant de construire d'une décomposition semi-orthogonale comme celles du théorème 3.2.4 pour chacun des cinq types (plus précisément, les cinq types de dégénérescence : cubique plane, quartique plane, etc.) de fibrés en coniques standard rationnels et toute courbe de dégénérescence. Ceci grâce au lemme suivant :

Lemma 3.2.5. (cf. [17], Rem. 3.2) *Soit S une surface lisse et rationnelle. Soient $\pi : X \rightarrow S$, $\pi' : X' \rightarrow S$ deux fibrés en coniques standard, et \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}'_0 les faisceaux des parties paires des algèbres de Clifford leur associés. Si X et X' ont le même revêtement double associé $\tilde{C} \rightarrow C$, alors \mathcal{B}_0 est isomorphe à \mathcal{B}'_0 . En particulier, les catégories dérivées $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ et $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}'_0)$ sont équivalentes.*

Dans chacun des cas possibles, nous donnons une construction explicite comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow \chi \\ S & \dashleftarrow \quad \quad \quad & Z \end{array}$$

où Z est un 3fold lisse rationnel avec une décomposition semi-orthogonale connue, $\pi : X \rightarrow S$ est induit en résolvant un système linéaire explicite sur Z (éventuellement avec lieu de base), et $\chi : X \rightarrow Z$ est l'éclatement d'une (au moins) courbe lisse dans le lieu de base du système linéaire. En effet, il existe une formule explicite d'Orlov [118] qui fournit une décomposition semi-orthogonale de la catégorie dérivée d'un éclatement. Les décompositions de $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$ sont obtenues en comparant par des mutations les décompositions induites respectivement par l'éclatement et la structure de fibré en coniques

$$(3.2.3) \quad \mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(\Gamma), \chi^* \mathbf{D}^b(Z) \rangle,$$

$$(3.2.4) \quad \mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0), \pi^* \mathbf{D}^b(S) \rangle.$$

Voici un tableau qui résume tous les cas possibles (voir section 5 et 6 de [17]).

$C \subset S$	$\mathbf{D}^b(S)$	Z	Γ	$\mathbf{D}^b(Z)$	$\mathbf{D}^b(S, \mathcal{B}_0)$
quint. $\subset \mathbb{P}^2$	3 exc.	\mathbb{P}^3	genre 5	4 exc.	$\mathbf{D}^b(\Gamma)$, 1 exc.
quart. $\subset \mathbb{P}^2$	3 exc.	quadr.	genre 2	4 exc.	$\mathbf{D}^b(\Gamma)$, 1 exc.
cub. $\subset \mathbb{P}^2$	3 exc.	div. (1,2) dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	-	6 exc.	3 exc.
hyperel. $\subset \mathbb{F}_n$	4 exc.	fib. en \mathbb{P}^2 . sur \mathbb{P}^1	tetrag.	6 exc.	$\mathbf{D}^b(\Gamma)$, 2 exc.
trig. $\subset \mathbb{F}_n$	4 exc.	fib. quadr. sur \mathbb{P}^1	hyperel.	$\mathbf{D}^b(\Gamma')$, 4 exc.	$\mathbf{D}^b(\Gamma)$, $\mathbf{D}^b(\Gamma')$

TABLE 3.1 – Constructions explicites par éclatement des fibrés en coniques standard.

De façon assez inattendue, le cas des fibrés en coniques rationnels sur \mathbb{P}^2 qui dégènèrent sur une courbe quartique a un lien avec un article publié pendant ma thèse [25] il y a quelques années. En effet, dans [25], j'avais construit un fibré en coniques sur \mathbb{P}^3 qui dégènère le long d'une surface de Kummer. Il se trouve que, grâce aux observations de [138] et [48], tous les fibrés en coniques standard qui dégènèrent sur une quartique plane peuvent être décrits comme la restriction de celui de [25] à un hyperplan de \mathbb{P}^3 , qui effectivement intersecte la surface de Kummer le long d'une courbe quartique.

3.3 Généralisations aux variétés de Fano et représentabilité catégorique

Par la suite, toujours avec M. Bernardara, nous avons essayé de généraliser les résultats de [17] à une classe plus large de 3folds complexes avec dimension de Kodaira négative. En effet, nous avons remarqué que les propriétés que nous utilisons dans [17] pour prouver le théorème 3.2.3 sont valables pour d'autres classes de 3folds. Nous avons donc rédigé [18] afin de mettre en évidence plusieurs classes de variétés pour lesquelles la connaissance d'une décomposition semi-orthogonale de la catégorie dérivée donne des informations sur la structure de la Jacobienne intermédiaire, et sur leur géométrie birationnelle. En effet, les fibrés en coniques sont l'exemple le plus récent d'une liste assez longue (qui pourrait commencer avec les exemples de [32]) de variétés de dimension 3 avec dimension de Kodaira négative, qui admettent une décomposition semi-orthogonale formée d'objets exceptionnels et de composantes qui devraient être liées à des propriétés birationnelles. Récemment, une conjecture difficile de Kuznetsov [95] (voir Conj. 3.3.6) a ajouté les hypersurfaces cubiques lisses de dimension 4 à cette liste.

3.3.1 Une nouvelle notion de représentabilité en termes de catégories dérivées

En cherchant à unifier les différents contextes, nous avons défini une nouvelle notion de représentabilité, qui s'appuie sur les décompositions semi-orthogonales, et qui, par rapport à d'autres définitions plus classiques en termes de cycles algébriques, a peut-être l'avantage de pouvoir se généraliser facilement en toutes dimensions.

Définition 3.3.1. (cf. [18], Def 2.3) Une catégorie triangulée T est représentable en dimension m si elle admet une décomposition semi-orthogonale

$$T = \langle A_1, \dots, A_l \rangle$$

où, pour tous $i = 1, \dots, l$, il existe une variété lisse projective connexe Y_i avec $\dim(Y_i) \leq m$ telle que A_i est équivalente à une sous-catégorie admissible de $\mathbf{D}^b(Y_i)$.

Définition 3.3.2. (cf. [18], Def 2.4) Soit X une variété projective lisse de dimension n . Nous disons que X est catégoriquement représentable en dimension m (resp. en codimension $n - m$) si $\mathbf{D}^b(X)$ est représentable en dimension m .

La représentabilité catégorique sera notée par la suite RC. L'idée de définir la représentabilité catégorique vient de la théorie classique des cycles algébriques. En effet, plusieurs notions de représentabilité du groupe $A_{\mathbb{Z}}^i(X)$ des cycles algébriquement triviaux de codimension i sur X ont paru dans la littérature : dans [18] nous explorons leurs interactions avec la représentabilité catégorique. Voici une esquisse grossière de ces représentabilités classiques :

- (i) [22] la *représentabilité faible* (RF) pour $A_{\mathbb{Z}}^i(X)$ est donnée par une application algébrique $J(\Gamma) \rightarrow A_{\mathbb{Z}}^i(X)$, où Γ est une courbe algébrique, dont le noyau est un groupe algébrique ;
- (ii) [61] en travaillant avec coefficients rationnels, le groupe $A_{\mathbb{Q}}^i$ est *rationnellement représentable* (RR) s'il existe un cycle $z \in CH_{\mathbb{Q}}^i(X \times \Gamma)$ qui induit une application algébrique surjective $z_* : A_{\mathbb{Q}}^1(\Gamma) \rightarrow A_{\mathbb{Q}}^i(X)$. La variété X est rationnellement représentable si $A_{\mathbb{Q}}^i(X)$ est rationnellement représentable pour tout i ;
- (iii) [9] le groupe $A_{\mathbb{Z}}^i(X)$ est *algébriquement représentable* (AR) s'il existe un isomorphisme régulier quasi-universel $A_{\mathbb{Z}}^i(X) \rightarrow A$, où A est une variété abélienne (représentant algébrique) ;
- (iv) [9] si $\dim(X) = 2n + 1$ est impaire, A est le représentant algébrique de $A_{\mathbb{Z}}^n(X)$, et la polarisation principale de A a certaines bonnes propriétés (voir [9], Déf. 3.4.2 ou [18], Def. 2.15 pour les détails) par rapport à cet isomorphisme régulier, on dit que A a une *polarisation d'incidence* (PI).

Il n'est pas compliqué de noter que la représentabilité rationnelle est aussi fortement liée à la structure du motif $h(X)$ de X . Les motifs classiques (ou de Grothendieck) ont été introduits afin de donner une description algébrique universelle des cohomologies et des cycles sur X . Notamment, on obtient beaucoup d'informations en partant d'une décomposition de Chow–Künneth du motif $h(X)$, qui est en gros une décomposition dont les composantes sont strictement liées aux cycles algébriques d'une codimension donnée. Par exemple, si X est un 3fold, alors la représentabilité rationnelle de tous les $A_{\mathbb{Q}}^i(X)$ est équivalente à l'existence d'une décomposition de Chow–Künneth du motif $h(X)$ [61]. Une première remarque est qu'une trace de l'existence d'un foncteur plein et fidèle entre les catégories dérivées de deux variétés projectives lisses devrait se retrouver au niveau motivique, comme prévu par la conjecture d'Orlov suivante :

Conjecture 3.3.3. (cf. [120], Conj. 2) Soient X et Y des variétés projectives lisses et $\Phi : \mathbf{D}^b(Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$ un foncteur plein et fidèle. Alors le motif $h(Y)$ est une composante directe du motif $h(X)$.

Notamment, un lien évident entre représentabilité catégorique et rationnelle devrait apparaître lorsque nous considérons la représentabilité en dimension 1. Effectivement, être représentable en dimension 1 est équivalent à l'existence d'une décomposition semi-orthogonale composée par des objets exceptionnels et catégories dérivées de courbes. Le motif d'une courbe se décompose en deux motifs discrets et un motif abélien. Ce dernier correspond à la Jacobienne à isogénie près.

Si la conjecture d’Orlov était vraie, cela impliquerait que si X est RC en dimension 1, alors son motif est une somme finie de motifs abéliens (jacobiens) et discrets. Cela donnerait bien des informations sur la RR de $A_{\mathbb{Q}}^i(X)$. En effet, être RC en dimension 1 semble une condition très forte. Par exemple un 3fold cubique lisse est fortement représentable avec la propriété d’incidence mais n’est pas RC, parce que sinon nous aurions une Jacobienne intermédiaire scindée. Le lien de l’application de Abel–Jacobi avec les catégories dérivées de certaines hypersurfaces a déjà été considéré par exemple dans [96].

3.3.2 Représentabilité catégorique et reconstruction de la Jacobienne intermédiaire

La RA et la PI ont des interactions très profondes avec la RC ; un premier exemple est le résultat principal de [17], où une décomposition semi-orthogonale de $\mathbf{D}^b(X)$ est suffisante pour décrire complètement la Jacobienne intermédiaire et sa polarisation. Plus généralement, considérons un 3fold projectif lisse X , supposons que les hypothèses suivantes soient valables :

Hypothèses 3.3.3.1. *X est rationnellement et algébriquement représentable, avec $h^1(X) = h^5(X) = 0$ (c’est-à-dire, X a groupe de Picard discret) et le représentant algébrique de $A_{\mathbb{Z}}^2(X)$ a une polarisation d’incidence.*

Les arguments dans [17] montrent que si X est un fibré en coniques RC en dimension 1, alors la Jacobienne intermédiaire se scinde en une somme directe de Jacobiennes de courbes, notamment les courbes de genre positif qui apparaissent dans la décomposition semi-orthogonale. Ce résultat peut être appliqué à une large classe de 3folds complexes avec dimension de Kodaira négative qui vérifient les Hypothèses 3.3.3.1. La décomposition de Chow–Künneth pour les variétés dans cette liste provient de [113] pour les fibrés en coniques et de [61] dans tous les autres cas. La liste évidemment est loin d’être complète, à la fois en ce qui concerne les résultats et les auteurs. Nous nous limitons dans ce contexte au cas des variétés de Fano avec nombre de Picard 1.

- 1) Fano d’indice > 2 : X est soit \mathbb{P}^3 soit une quadrique lisse.
- 2) Fano d’indice 2 : X est un double solide quartique [129], ou une hypersurface cubique lisse dans \mathbb{P}^4 [41], ou l’intersection de deux quadriques lisses dans \mathbb{P}^5 [125], ou un V_5 (dans le dernier cas, $J(X)$ est trivial).
- 3) Fano d’indice 1 : X est un double solide sextique général [39], ou une quartique lisse dans \mathbb{P}^4 [22], ou l’intersection d’une hypersurface cubique et d’une quadrique dans \mathbb{P}^5 [22], ou l’intersection de trois quadriques dans \mathbb{P}^6 [9], ou un V_{10} [107, 69], ou un V_{12} [74] ($J(X)$ est la Jacobienne d’une courbe de genre 7), ou un V_{14} [73], ou un V_{16} général [70, 112], ou un V_{18} général [71, 76] ($J(X)$ est la Jacobienne d’une courbe de genre 2), ou une V_{22} (la Jacobienne est triviale).
- 4) Fibrés en coniques : $X \rightarrow S$ un fibré en coniques standard au-dessus d’une surface rationnelle [9, 16], c’est le cas étudié dans [17].
- 5) Fibrations en surfaces de Del Pezzo : $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fibration en surfaces de Del Pezzo avec $2 \leq K_X^2 \leq 5$ [79, 78].

Considérons maintenant un ensemble d’hypothèses moins restrictives :

Hypothèses 3.3.3.2. *X est un 3fold lisse projectif RR avec $h^1(X) = h^5(X) = 0$.*

Sous les hypothèses 3.3.3.2 nous pouvons néanmoins obtenir des isogénies entre la Jacobienne intermédiaire et des Jacobiennes de courbes.

Proposition 3.3.4. (cf. [18], Thm 3.3 et Cor. 3.4) *Supposons vraies les hypothèses 3.3.3.2 et soient $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ des courbes projectives lisses de genre positif. Si $\mathbf{D}^b(X)$ est RC en dimension 1 par les catégories $\mathbf{D}^b(\Gamma_i)$ et par des objets exceptionnels, alors $J(X)$ est isogène à $\bigoplus_{i=1}^k J(\Gamma_i)$.*

Grâce à [61], nous savons que pour les 3folds de Fano, pour les 3folds avec groupe de Picard discret avec une structure de fibration en surfaces de Del Pezzo ou d'Enriques sur \mathbb{P}^1 , les hypothèses 3.3.3.2 sont valables. Elles sont valables aussi pour les fibrés en coniques standard au-dessus des surfaces rationnelles [113].

3.3.3 Représentabilité catégorique et rationalité des variétés projectives

L'une des raisons qui nous apparaît plus importante pour définir la RC est son lien avec les questions de rationalité des variétés projectives. En regardant les exemples dont nous disposons, la questions suivante semble naturelle :

Question 1 :

Est-ce que la RC en codimension 2 est une condition nécessaire pour la rationalité ?

Cela est vrai pour les surfaces complexes, parce que toute surface complexe lisse rationnelle et projective admet une suite exceptionnelle pleine. Plus généralement, la Question 1 est liée à une autre question très naturelle :

Question 2 :

Supposons que X soit un 3fold qui vérifie les hypothèses 3.3.3.1 ou 3.3.3.2, et tel quel $J(X) = \bigoplus J(\Gamma_i)$. Est-il possible de décrire une décomposition semi-orthogonale de $\mathbf{D}^b(X)$ par des objets exceptionnels et les catégories $\mathbf{D}^b(\Gamma_i)$?

La réponse à la Question 2 est positive pour tous les 3folds (avec dimension de Kodaira négative) contenus dans la liste suivante, et pour ceux qui sont obtenus en les éclatant le long d'une sous-variété lisse.

- 1) Les 3folds avec une suite exceptionnelle pleine : X est \mathbb{P}^3 [15], ou une quadrique lisse [80], ou un fibré en \mathbb{P}^1 sur une surface rationnelle, ou un fibré en \mathbb{P}^2 sur \mathbb{P}^1 [118], ou la variété de Fano V_5 [117], ou bien V_{22} [97].
- 2) Les 3folds de Fano sans aucune suite exceptionnelle pleine : X est l'intersection complète de deux quadriques ou un 3fold de Fano de type V_{18} , et $J(\Gamma) \simeq J(X)$ avec Γ une courbe de genre 2. Les décompositions semi-orthogonales sont décrites dans [32, 100], et elles sont remarquablement liées (comme dans les cas de V_5 avec V_{22} , et de la cubique avec V_{14}) par une correspondance dans l'espace de modules des 3fold de Fano, comme expliqué dans [102]. X est la Fano V_{12} [99], ou bien V_{16} [100].
- 3) Fibrés en coniques sans aucune suite exceptionnelle : $X \rightarrow S$ est un fibré en coniques rationnel sur une surface minimale [17]. Si le lieu discriminant de X est soit vide soit une cubique dans \mathbb{P}^2 , alors X est un fibré en \mathbb{P}^1 et cela fait partie du point 1.
- 4) Fibrations en Del Pezzo : Si $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une pinceau de quadriques avec au plus dégénérescence simple ; dans ce cas la courbe hyperelliptique $\Gamma \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ ramifiée le long du lieu de dégénérescence des quadriques apparaît naturellement comme le complément orthogonale d'une suite exceptionnelle de $\mathbf{D}^b(X)$ [93]. Si $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fibration rationnelle en surface de Del Pezzo de degré 4. Dans ce cas, X est birationnel à un fibré

en coniques sur une surface de Hirzebruch [3] et la décomposition semi-orthogonale est décrite dans [7].

Le lien entre la Question 1 et la Question 2 est plus clair une fois que l'on remarque que les premiers deux points de la liste ci-dessus couvrent toutes les classes de 3folds de Fano avec nombre de Picard 1 ; les variétés contenues dans ces classes sont toutes rationnelles.

D'autre part, il existe aussi des exemples élémentaires de 3folds lisses projectifs non rationnels qui sont RC en codimension 2. Considérons par exemple un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang 3 sur une courbe C de genre positif et prenons $X := \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Dans [17, Section 6.3] nous donnons un exemple de fibré en coniques. En tout cas, conjecturalement, la réponse à la Question 1 semble être positive.

Un exemple en dimension 3 également intéressant est la cubique dans \mathbb{P}^4 avec un point singulier. En imitant l'argument donné dans [95, §5] pour le cas de dimension 4, nous prouvons la proposition suivante pour le 3fold cubique :

Proposition 3.3.5. *(cf. [18], Prop 4.6) Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ un 3fold cubique avec un point double et $\tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement du point singulier. Il existe une résolution catégorique des singularités $\tilde{\mathbf{D}} \subset \mathbf{D}^b(\tilde{X})$ de $\mathbf{D}^b(X)$ (dans le sens de [94]) qui est RC en dimension deux. En effet, il existe une décomposition semi-orthogonale*

$$\tilde{\mathbf{D}} = \langle \mathbf{D}^b(\Gamma), E_1, \dots, E_3 \rangle,$$

où les E_i sont des objets exceptionnels et Γ est une intersection complète d'une surface quadratique et une cubique dans \mathbb{P}^3 .

En dimension 4, la conjecture de Kuznetsov sur la rationalité des hypersurfaces cubiques ([95, Conj. 1.1]) est évidemment liée (et en effet plus forte) à cette question. Dans [95], on établit effectivement une décomposition semi-orthogonale pour la catégorie dérivée bornée

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle$$

d'un 4fold cubique lisse X . La catégorie \mathbf{A}_X a la propriété remarquable d'être une catégorie 2-Calabi–Yau, ce qui veut dire essentiellement une déformation non commutative de la catégorie dérivée d'une surface K3. En partant des indices qui proviennent des cas connus de 4folds cubiques rationnels et des considérations catégoriques plus générales, Kuznetsov a conjecturé que la catégorie \mathbf{A}_X contient toutes les informations relatives à la rationalité de X .

Conjecture 3.3.6. *[Kuznetsov] Soit $X \subset \mathbb{P}^5$ un 4fold cubique lisse, alors X est rationnel si et seulement s'il existe une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(S), \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle,$$

pour S une surface K3.

En outre, dans [7], nous faisons une conjecture semblable pour une autre classe de 4folds lisses et projectives en termes de RC. Cela sera développé ultérieurement dans la section suivante 3.4.

Enfin, je voudrais souligner que des idées semblables commencent à poindre en dimension plus haute. Dans [72], on donne des exemples en dimension 7. Si X est une cubique de dimension 7 il existe une catégorie distinguée \mathbf{B}_X de $\mathbf{D}^b(X)$, à savoir le complément orthogonale

de la suite exceptionnelle $\{\mathcal{O}_X, \dots, \mathcal{O}_X(5)\}$. Celle-ci est une catégorie 3-Calabi-Yau. De plus, les auteurs montrent que \mathbf{B}_X ne peut pas être équivalente à la catégorie dérivée d'un 3fold de Calabi-Yau.

3.4 Fibrations en intersections complètes de quadriques, algèbres de Clifford, catégories dérivées et problèmes de rationalité

En poursuivant le travail déjà développé dans [17] et [18], nous avons décrit dans [7] des nouvelles classes de variétés projectives pour lesquelles la RC est strictement liée à des propriétés birationnelles. Ces variétés se présentent comme des fibrations $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des intersections complètes de deux quadriques. Nous imposons aussi une hypothèse de généralité pour ces fibrations afin que le pinceau de quadriques associé ait dégénérescence simple le long d'un diviseur lisse.

Définition 3.4.1. *Un ensemble de formes quadratiques primitives génériquement régulières (E, q_i, L_i) (ou de fibrations en quadriques $Q_i \rightarrow Y$) pour $1 \leq i \leq m$ est générique si les propriétés suivantes sont valables :*

1. le \mathcal{O}_Y -submodule $L^\vee \subset S^2(E^\vee)$ engendré par les images de $L_i^\vee \rightarrow S^2(E^\vee)$ a rang m ,
2. la fibration en quadriques engendrée linéairement par les L_i^\vee (c'est à dire la fibration associée au \mathcal{O}_Y -sous-module $L^\vee \subset S^2(E^\vee)$) $Q \rightarrow S$ a dégénérescence simple avec diviseur discriminant régulier,
3. l'intersection relative associée $X \rightarrow Y$ des fibrations en quadriques $Q_i \subset \mathbb{P}(E)$ est une intersection complète relative.

On nommera intersection relative générique de quadriques toute intersection $X \rightarrow Y$ d'un ensemble générique de fibrations en quadriques

Donc la fibration en quadriques engendrée linéairement par les L_i^\vee est une fibration en quadriques au-dessus d'un fibré en \mathbb{P}^{m-1} au-dessus de Y , à savoir le projectivisé de L^\vee . Dans cette section, sauf indication contraire, nous travaillons sur un corps k arbitraire.

3.4.1 Rationalité pour des fibrations de dimension relative 2 et 3

D'abord, nous avons considéré les fibrations $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des surfaces de Del Pezzo de degré 4, donc intersection de deux 3folds quadriques. Ces 3folds fibrés en Del Pezzo ont dimension de Kodaira négative et leur rationalité (sur les complexes) est complètement classifiée [3], [127] en termes de caractéristique d'Euler. Nous avons donné un critère purement catégorique pour la rationalité de X basé sur des critères déjà prouvés dans [17].

Théorème 3.4.2. (cf. [7], Thm. 1) *Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration complexe générique en surfaces de Del Pezzo de degré 4. Alors X est rationnelle si et seulement si elle est RC en codimension 2. En outre, il existe une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(\Gamma_1), \dots, \mathbf{D}^b(\Gamma_k), E_1, \dots, E_l \rangle,$$

avec Γ_i des courbes projectives lisses et E_i des objets exceptionnels si et seulement si $J(X) = \bigoplus J(\Gamma_i)$ en tant que variétés abéliennes principalement polarisées.

Ensuite, nous avons considéré les fibrations génériques $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des intersections complètes de deux quadriques de dimension 4. De tels 4folds ont une décomposition semi-orthogonale

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}_X, E_1, \dots, E_4 \rangle,$$

où les E_i sont des objets exceptionnels. De plus, nous avons construit une fibration $T \rightarrow \mathbb{P}^1$ en courbes hyperelliptiques et une classe de Brauer $\beta \in \text{Br}(T)$ telle que $\mathbf{A}_X \simeq \mathbf{D}^b(T, \beta)$. Cette classe de Brauer peut être définie de deux façons différentes. Voyons-les.

D'abord, rappelons qu'on peut associer naturellement à X une fibration en quadriques $Q \rightarrow S$ de dimension relative 4 sur une surface réglée S , en considérant les pinceaux dont X est le lieu de base. Soit \mathcal{C}_0 l'algèbre de Clifford paire associée [93] à Q . Cette fibration dégénère le long d'une 6-section lisse D de $S \rightarrow \mathbb{P}^1$. La fibration hyperelliptique T est le revêtement double $\pi : T \xrightarrow{2:1} S$ ramifié le long de D et elle est appelée *revêtement discriminant*. Comme la base de la fibration est régulière et que nous supposons que la fibration en surfaces quadriques a dégénérescence simple, par [93, Prop. 3.13] il existe une algèbre d'Azumaya \mathcal{B}_0 sur T telle que $\pi_* \mathcal{B}_0 \cong \mathcal{C}_0$. La classe de Brauer β est la classe de l'algèbre \mathcal{B}_0 . Dans certains contextes β est appelée aussi *l'invariant de Clifford* de la fibration en quadriques Q .

Il existe aussi une autre interprétation de β . Considérons le schéma de Hilbert relatif Ψ des plans contenus dans les fibres de Q . La classe de Brauer apparaît de manière très naturelle parce que la partie connexe de la factorisation de Stein de la projection naturelle $\Psi \rightarrow S$ est un morphisme lisse $\Psi \rightarrow T$ qui est une variété de Brauer-Severi. La proposition suivante explique que la classe dans $\text{Br}(T)$ associée à cette variété de Brauer-Severi est exactement β .

Proposition 3.4.3. (cf. [7, Thm. B.3]) *Soit $\beta \in \text{Br}(T)$ l'invariant de Clifford associé à \mathcal{B}_0 . La classe β correspond au fibré en \mathbb{P}^1 qui est la partie connexe de la factorisation de Stein du schéma de Hilbert relatif des plans contenus dans les fibres de $Q \rightarrow S$.*

En particulier, nous proposons une conjecture dans le même esprit que la conjecture de Kuznetsov (voir Conj. 3.3.6 et [95]) pour les 4folds cubiques .

Conjecture 3.4.4. *Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration générique dont les fibres sont des intersections de deux quadriques complexes de dimension 4. Alors X est rationnelle si et seulement si elle est RC en codimension 2.*

C'est à dire : si et seulement si \mathbf{A}_X admet une décomposition semi-orthogonale composée par des objets exceptionnels et des catégories dérivées de courbes et de surfaces.

Les motivations pour cette conjecture proviennent évidemment du cas des fibrations en surfaces de Del Pezzo et de la conjecture de Kuznetsov pour le 4fold cubique. Des éléments en faveur de cette conjecture sont donnés par deux cas de fibrations rationnelles qui sont RC en codimension 2. Nous rappelons aussi, grâce à [46, Thm. 2.2], que si X contient une surface génériquement réglée au-dessus de \mathbb{P}^1 , alors X est rationnelle. Le premier cas est décrit dans le théorème suivant :

Théorème 3.4.5. (cf. [7], Thm. 2) *Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration générique dont les fibres sont des intersections de deux quadriques de dimension 4 sur un corps k . Soient $T \rightarrow \mathbb{P}^1$ et $\beta \in \text{Br}(T)$ la fibration en courbes hyperelliptiques et la classe de Brauer qui lui sont associées. Si $\beta = 0$, alors X est rationnelle et RC en codimension 2. Notamment, cela est le cas si X contient une surface génériquement réglée au-dessus de \mathbb{P}^1 .*

Le deuxième cas est développé dans la section 5 de [7] (voir Thm. 5.10). Il s'agit d'un exemple explicite de fibration générique χ en intersections de quadriques de dimension relative 4 qui est rationnelle et dont la catégorie dérivée admet une décomposition semi-orthogonale

$$\mathbf{D}^b(\chi) = \langle \mathbf{D}^b(\mathbb{B}), E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle,$$

où $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un pinceau de courbes de genre 2 et les E_i des objets exceptionnels. De plus nous avons une équivalence $A_\chi \cong \mathbf{D}^b(\mathbb{B})$.

3.4.2 Dualité Projective Homologique relative et réduction quadrique par scindage hyperbolique

Dans les preuves des résultats précédents nous utilisons trois outils principaux : la dualité projective homologique (voir [92] et l'appendice B pour les définitions de base) élargie à un contexte relatif pour les fibrations en quadriques et en intersections de quadriques, la description de Kuznetsov [93] de la catégorie dérivée d'une fibration en quadriques par l'algèbre de Clifford paire, et un résultat d'invariance de Morita pour l'algèbre de Clifford paire sous "réduction quadrique" par scindage hyperbolique. Nous allons décrire brièvement ces outils.

Soit $Q \rightarrow Y$ une fibration en quadriques de dimension relative n au-dessus d'un schéma Y , avec algèbre de Clifford associée \mathcal{C}_0 . Comme il a été vu dans le théorème 3.2.2, Kuznetsov ([93, Thm 4.2]) a construit une décomposition semi-orthogonale

$$(3.4.1) \quad \mathbf{D}^b(Q) = \langle \mathbf{D}^b(Y, \mathcal{C}_0), \mathbf{D}^b(Y)_1, \dots, \mathbf{D}^b(Y)_n \rangle,$$

où $\mathbf{D}^b(Y)_i \simeq \mathbf{D}^b(Y)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. La catégorie $\mathbf{D}^b(Y, \mathcal{C}_0)$ est la composante de $\mathbf{D}^b(Q)$ qui contient les informations les plus importantes sur la géométrie de la fibration. L'un des résultats principaux de [7] est l'invariance de cette catégorie par "réduction quadrique" par scindage hyperbolique. Cela nous permet de passer à des fibrations en quadriques de dimension plus petite.

La "réduction quadrique" par scindage hyperbolique est une construction classique qui, en partant d'une quadrique $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de dimension n avec un point rationnel lisse x , définit une quadrique $Q' \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de dimension $n-2$ avec la même dégénérescence. En gros, Q' est la base du cône obtenu en intersectant l'espace tangent projectif $T_x Q$ et Q . C'est l'analogie du phénomène appelé "scindage d'un plan hyperbolique" pour les formes quadratiques. La construction algébrique est la suivante : si $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}(V)$ et q est une forme quadratique qui définit Q , l'existence d'un k -point lisse de Q est équivalente à l'existence d'une droite isotrope $l_x \subset V$ qui n'est pas contenue dans le radical de q . Donc nous pouvons décomposer $q = h \perp q'$, où h est un plan hyperbolique et q' est une forme quadratique qui définit $Q' \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Cette construction peut se faire de manière relative, en remplaçant V par un fibré vectoriel sur un schéma de base Y lisse avec une forme quadratique (éventuellement dégénérée) q et le point rationnel lisse par une section régulière (c'est à dire, une section $Y \rightarrow Q$ qui ne rencontre aucun point singulier). Une telle opération se révèle un outil très intéressant lorsqu'on veut étudier des catégories dérivées tordues liées aux fibrations en quadriques.

Théorème 3.4.6. (cf. [7], Thm. 3) *Soit Y un schéma régulier intègre, $Q \rightarrow S$ une fibration en quadriques avec dégénérescence simple, $Q' \rightarrow S$ la fibration en quadriques obtenue*

par réduction quadrique le long d'une section régulière, et \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 les algèbres de Clifford respectives. Alors il y a une équivalence $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0) \simeq \mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}'_0)$. On dit aussi que \mathcal{C}'_0 et \mathcal{C}_0 sont Morita Y -équivalentes.

Ce résultat est classique lorsque Y est le spectre d'un corps et la quadrique Q est lisse (voir [51, Lemma 14.2]).

La dualité projective homologique a été introduite par Kuznetsov dans [92] afin d'étudier les décompositions semi-orthogonales des sections hyperplanes (voir aussi [101]). Pour un survol des définitions de base, voir l'appendice B.

Considérons donc un ensemble fini d'hypersurfaces quadriques $\{Q_i\}_{i=0}^r$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(V)$ et leur intersection complète X . Soit Q le système linéaire de quadriques engendré par les Q_i , qui est une fibration en quadriques $Q \rightarrow \mathbb{P}^r$ de dimension relative $n-2$, et soit \mathcal{C}_0 l'algèbre de Clifford paire qui est lui associée. Les catégories dérivées $\mathbf{D}^b(X)$ et $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^r, \mathcal{C}_0)$ sont strictement liées. En particulier, si X est Fano ou Calabi–Yau, alors il existe un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^r, \mathcal{C}_0) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$.

Nous donnons une version relative de cette construction, en remplaçant V par un fibré vectoriel E sur une variété lisse Y , les quadriques par des fibrations en quadriques plates $Q_i \rightarrow Y$ contenues dans $\mathbb{P}(E)$, l'intersection par l'intersection complète relative $X \rightarrow Y$ des fibrations en quadriques, le système linéaire de quadriques par la fibration en quadriques $Q \rightarrow S$ engendrée linéairement (voir Définition 3.4.1) par les Q_i (qui est une fibration en quadriques plates sur un fibré projectif $S \rightarrow Y$) et \mathcal{C}_0 par l'algèbre de Clifford paire de $Q \rightarrow S$. Alors $\mathbf{D}^b(X)$ et $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0)$ sont liées de manière semblable : si les fibres de $X \rightarrow Y$ sont Fano ou Calabi–Yau, alors il existe un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$.

Théorème 3.4.7 (Dualité Projective Homologique pour des intersections de fibrations en quadriques). (cf. [7], Thm 2.19) Soit Y un schéma lisse, $Q \rightarrow S$ la fibration en quadriques engendrée linéairement par m fibrations de dimension relative $n-2$ au-dessus de Y , et $X \rightarrow Y$ leur intersection complète relative. Soit \mathcal{C}_0 l'algèbre de Clifford relative de $Q \rightarrow S$.

1. Si $2m < n$, alors les fibres de $X \rightarrow Y$ sont des variétés de Fano et la dualité projective homologique donne

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0), \pi^* \mathbf{D}^b(Y)(1) \dots \pi^* \mathbf{D}^b(Y)(n-2m) \rangle.$$

2. Si $2m = n$ alors les fibres de $X \rightarrow Y$ sont génériquement Calabi–Yau et la dualité projective homologique donne

$$\mathbf{D}^b(X) \simeq \mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0).$$

3. Si $2m > n$, alors les fibres de $X \rightarrow Y$ sont génériquement de type général et il existe un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0)$ avec un complément orthogonal qui peut être décrit explicitement.

Dans le cas des fibrations en variétés de Fano, la catégorie $\mathbf{D}^b(S, \mathcal{C}_0)$ est donc la composante importante \mathbf{A}_X de $\mathbf{D}^b(X)$ que l'on avait remarquée précédemment. En outre, si $Q \rightarrow S$ admet une section régulière, nous pouvons examiner la relation entre $\mathbf{D}^b(X)$ et $\mathbf{D}^b(Q)$ de plus près, en utilisant la réduction quadrique. Dans les cas que nous considérons, l'existence de ces sections est assurée respectivement par le travail de Alexeev [3] et par la théorie des formes

quadratiques (pour les surfaces de Del Pezzo), ou par les résultats généraux de [38] et [62] (pour les cas de dimension supérieure).

La relation entre intersections de quadriques et fibrations en quadriques engendrées linéairement a aussi des racines arithmétiques. Le théorème de Amer–Brumer, qui est indispensable pour nos résultats, assure que l’intersection de deux quadriques a un point rationnel si et seulement si le pinceau de quadriques engendré linéairement a une section rationnelle au-dessus de \mathbb{P}^1 . D’autres versions de ce théorème sont aussi valables pour les intersections de plusieurs formes quadratiques, mais il faut remplacer les points par les 0-cycles de degré 1 (voir [45]). Le sujet général est aussi pris en considération dans [46].

3.5 Représentabilité catégorique et rationalité des 4folds cubiques qui contiennent un plan et une surface quintique de Del Pezzo

Comme nous l’avons déjà indiqué, l’un des terrains où les catégories dérivées et la notion de représentabilité catégorique sont les plus fertiles en applications spectaculaires est celui des hypersurfaces cubiques de dimension 4. Dans ce contexte, les nouvelles définitions catégoriques se mélangent avec la théorie de Hodge et avec des constructions géométriques classiques très élégantes. Notamment, le lien avec les surfaces K3 est particulièrement important. Je suis arrivé de manière assez naturelle à travailler sur ce sujet puisque, si un 4fold cubique X contient un \mathbb{P}^2 , alors la projection linéaire depuis ce plan induit sur \tilde{X} , l’éclatée de la cubique le long du plan, une structure naturelle de fibration en surfaces quadriques $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$. En outre, de manière semblable à ce que l’on a déjà vu dans [7] et dans la section 3.4, nous pouvons lui associer une classe de Brauer sur un revêtement double $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ ramifié le long du diviseur sextique discriminant $D \subset \mathbb{P}^2$ de cette fibration en surfaces quadriques. Ce revêtement double est appelé *revêtement discriminant* et il s’agit d’une surface K3 de degré 2; la classe de Brauer sur S est appelée *invariant de Clifford* et nous pouvons la construire à la fois par le schéma de Hilbert relatif des plans contenus dans les fibres de \tilde{Z} ou en utilisant l’algèbre de Clifford de la fibration en quadriques (voir section 3.4). Après avoir développé dans [17], [18] et [7] des outils pour l’étude en termes de catégories dérivées de la rationalité de tels objets, grâce toujours aux résultats de [93], il était logique de se poser des questions sur ce type de hypersurface cubiques.

Soit X un 4fold cubique, c’est-à-dire une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^5$ sur le corps des complexes. Déterminer la rationalité de X est une question classique en géométrie algébrique. Certaines classes de 4folds cubiques rationnels ont été décrites par Fano [55], Tregub [130], [131], et Beauville–Donagi [13]. Notamment, les 4folds cubiques *pfaffiens*, définis par des pfaffiens de matrices anti-symétriques 6×6 de formes linéaires, sont rationnels. Grâce à [11, Prop. 9.1(a)], nous savons qu’un 4fold cubique est pfaffien si et seulement si il contient une surface de Del Pezzo quintique.

3.5.1 L’étude de l’intersection des diviseurs \mathcal{C}_8 et \mathcal{C}_{14} dans l’espace de modules des hypersurfaces cubiques de dimension 4

Hassett [63] décrit, par la théorie des réseaux, des diviseurs \mathcal{C}_d dans l’espace de modules \mathcal{C} des 4fold cubiques. Ces diviseurs représentent les hypersurfaces cubiques spéciales, c’est-à-dire les cubiques X qui contiennent une surface $T \in H^4(X, \mathbb{Z})$ qui n’est pas homologue à h^2 , où

$h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est la classe de la section hyperplane. L'entier d est défini comme la valeur du discriminant du sous-réseau $\langle T, h^2 \rangle \subset H^4(X, \mathbb{Z})$. En particulier, \mathcal{C}_{14} est la adhérence du lieu des 4folds cubiques pfaffiens (plus précisément, pour les hypersurfaces cubiques dans \mathcal{C}_{14} , T est un scroll rationnel normal de degré 4) et \mathcal{C}_8 est le lieu des 4fold cubiques qui contiennent un plan. Hassett [63] identifie une infinité dénombrable de diviseurs de \mathcal{C}_8 dont les éléments sont des 4folds cubiques contenant un plan avec invariant de Clifford trivial. La trivialité de cet invariant implique que les fibrés en quadriques associés à ces hypersurfaces cubiques ont une section rationnelle et par conséquent sont rationnels. Cependant, les experts s'attendent à ce que le 4fold cubique général (et également le 4fold cubique général contenant un plan) soit non rationnel. En tout cas, au moment de la rédaction de ce mémoire, aucun cas de 4fold cubique non rationnel n'est connu.

Dans l'article [8], nous avons étudié des 4folds cubiques dans $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ avec invariant de Clifford non trivial, qui donc n'appartiennent pas aux diviseurs de \mathcal{C}_8 décrits par Hassett. Soit $A(X)$ le réseau des 2-cycles algébriques de X à équivalence rationnelle près et d_X le discriminant de la forme d'intersection sur $A(X)$. Notre résultat principal est une description complète des composantes irréductibles de $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$.

Théorème 3.5.1. *(cf. [8], Thm. A) L'intersection $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ a cinq composantes irréductibles, qui sont indexées par le discriminant $d_X \in \{21, 29, 32, 36, 37\}$ d'un élément général de chaque composante. L'invariant de Clifford d'un 4fold général X dans $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ est trivial si et seulement si d_X est impair. Le lieu pfaffien est dense dans la composante avec $d_X = 32$.*

En particulier, le 4fold cubique général dans la composante de $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ avec $d_X = 32$ est rationnel et il a invariant de Clifford non trivial. Cela répond à une question de Hassett [63, Rem. 4.3] sur l'existence de telles hypersurfaces cubiques. En effet, il existe une description plus précise de cette composante : le 4fold cubique général a une *conique tangente* à la courbe de dégénérescence sextique du fibré en surfaces quadriques associé. Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ le revêtement discriminant. En effet, s'il existe une conique plane $C \subset \mathbb{P}^2$ partout tangente à D , alors π^*C se scinde en deux composantes rationnelles $C_1 + C_2$ à partir desquelles nous arrivons à construire un sous-réseau du groupe de Néron-Severi de S de rang 2 et discriminant pair. Si S a nombre de Picard égal à 2, en développant des résultats de [139], nous arrivons à prouver que cette condition est suffisante pour avoir un invariant de Clifford non-trivial. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.5.2. *(cf. [8], Prop. 3)*

Soit X un 4fold cubique lisse contenant un plan, dont le fibré en quadriques associé a dégénérescence simple. Soit S la surface K3 de degré 2 associée et β dans $\text{Br}(S)$ l'invariant de Clifford. Si S a nombre de Picard géométrique 2 et discriminant de Néron-Severi pair alors l'invariant de Clifford $\beta \in \text{Br}(S)$ de X est non trivial.

3.5.2 La conjecture de Kuznetsov et certains indices sur sa véracité.

Dans [8] nous répondons aussi à une question de E. Macrì and P. Stellari [109] sur l'existence d'autres exemples de hypersurfaces cubiques contenant un plan pour lesquelles la conjecture de Kuznetsov (voir Conj. 3.3.6) est vraie. En effet, nous allons voir que ce type de 4folds cubiques fournit une corroboration non triviale de cette conjecture.

En effet, la conjecture est motivée par des éléments provenant de trois classes d'exemples : les 4fold cubiques singulières [95, Section 5], les hypersurfaces cubiques pfaffiennes [91, Thm. 2],

et les 4folds cubiques lisses qui contiennent un plan, dont l'algèbre de Clifford associée a classe de Brauer triviale [95, Section 4]. Pour chacune de ces classes, le fait que les 4folds cubiques considérés sont rationnels est bien connu et la surface K3 associée peut être décrite explicitement. Par exemple, en utilisant la dualité projective homologique (voir App. B), [91] prouve le résultat suivant :

Proposition 3.5.3. (cf. [91], Thm. 2) *Soit $X \subset \mathbb{P}^5$ un 4fold cubique lisse pfaffien. Alors il existe une surface K3 lisse Z de degré 14 et une décomposition semi-orthogonale*

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{D}^b(Z), \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle.$$

Ces cubiques forment un ouvert dense dans le diviseur \mathcal{C}_{14} .

Si X contient un plan, une description plus précise de la sous-catégorie remarquable A_X de la Conjecture 3.3.6 est possible. En effet, soit \mathcal{C}_0 l'algèbre de Clifford paire associée [93], [7, Section 1] à la fibration en quadriques $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Comme la base de la fibration est régulière, le centre de \mathcal{C}_0 est isomorphe à $\pi_*\mathcal{O}_S$ par [87, IV Prop. 4.8.3]. De plus, nous supposons que la fibration en surfaces quadriques ait dégénérescence simple, donc S est une surface K3 lisse de degré 2 et \mathcal{C}_0 définit une algèbre d'Azumaya sur S par [93, Prop. 3.13]. Exactement en suivant le même argument de la proposition 3.4.3, nous voyons que l'invariant de Clifford $\beta \in \text{Br}(S)$ associé à \mathcal{C}_0 correspond au fibré en \mathbb{P}^1 qui est la partie connexe de la factorisation de Stein du schéma de Hilbert relatif des droites dans les fibres de $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ (voir aussi [95, Lemma 4.2]). Dans ce contexte, l'invariant de Clifford est aussi étudié dans [139], [109], and [66]. Par des mutations, Kuznetsov établit [95, Thm. 4.3] une équivalence $A_X \cong \mathbf{D}^b(S, \beta)$ avec la catégorie dérivée bornée des faisceaux β -tordus sur S . D'autre part, par des résultats classiques de la théorie des formes quadratiques (voir [7, Thm. 2.24]), β est triviale si et seulement si le fibré en surfaces quadriques $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ a une section rationnelle. De manière équivalente, \tilde{X} est $k(\mathbb{P}^2)$ -rationnel, et donc \tilde{X} est k -rationnel. Par le théorème de Springer la k -rationalité de \tilde{X} est équivalente au fait que $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ a une multi-section rationnelle de degré impair, une condition déjà explorée dans [63, Thm. 3.1] et [95, Prop. 4.7].

Donc, en particulier, si $\beta \in \text{Br}(S)$ est triviale, alors X est rationnel et la conjecture de Kuznetsov est vérifiée. Nous pouvons donc considérer ce cas comme le cas "enfant" de la conjecture de Kuznetsov pour les 4folds cubiques contenant un plan.

Conjecture 3.5.4. *Soit X un 4fold cubique lisse qui contient un plan, S la surface K3 de degré 2 associée, et $\beta \in \text{Br}(S)$ l'invariant de Clifford. Alors X est rationnel si et seulement s'il existe une surface K3 S' et une équivalence $\mathbf{D}^b(S, \beta) \cong \mathbf{D}^b(S')$.*

Avant [8], cette variante de la conjecture de Kuznetsov avait été prouvée seulement pour le cas enfant (où β est triviale et $S = S'$). E. Macrì et P. Stellari avaient demandé s'il existe une classe de 4folds cubiques lisses qui contiennent un plan qui vérifient cette variante de la conjecture de Kuznetsov de manière non triviale, c'est-à-dire, pour lesquelles β est non triviale et il existe une autre surface K3 S' et une équivalence $\mathbf{D}^b(S, \beta) \cong \mathbf{D}^b(S')$. L'existence de tels 4folds cubiques n'est pas évidente *a priori* : si d'un côté le 4fold cubique général contenant un plan a invariant de Clifford non trivial, l'existence de tels 4folds *rationnels* était seulement suggérée dans la littérature [63, Rem. 4.3].

Théorème 3.5.5. (cf. [8], Thm. B) *Soit X un élément général de la composante de $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$ avec $d_X = 32$, c'est-à-dire un 4fold cubique lisse pfaffien X qui contient un plan, avec invariant*

de Clifford $\beta \in \text{Br}(S)$ non trivial et qui satisfait les hypothèses du théorème 3.5.2. Alors il existe une surface K3 S' de degré 14 et une équivalence dérivée tordue non-triviale $\mathbf{D}^b(S, \beta) \cong \mathbf{D}^b(S')$.

Le fait que le lieu pfaffien soit dense dans la composante avec $d_X = 32$ est prouvé en construisant un exemple explicite de 4fold cubique pfaffien avec une conique tangente [8, Section 4], et qui satisfait donc les hypothèses du théorème 3.5.2. Le lieu des hypersurfaces cubiques pfaffiennes contenant un plan est dense dans \mathcal{C}_{14} , mais il n'est pas vrai que le lieu des pfaffiens contenant un plan est dense dans $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{C}_{14}$.

Chapitre 4

Appendices

4.1 Appendice A : les espaces de blocs conformes

Dans cet appendice nous donnons la définition soigneuse d'espace de blocs conformes, en suivant [128] et [10]. La construction se fait sur le corps des complexes.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple de dimension finie sur \mathbb{C} . Nous fixons aussi une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ et nous choisissons une base $\Psi = \{\alpha_1; \dots; \alpha_r\}$ du système de racines associé. Nous noterons α^* la coracine de α . Soit $\mathcal{P} \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids entiers, et $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des poids dominants. On désignera par $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ les poids fondamentaux. L'ensemble \mathcal{P}_+ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathfrak{g} -modules simples. On notera $L(\beta)$ le \mathfrak{g} -module associé au poids dominant β . Enfin, $(\ , \)$ indiquera la forme de Cartan-Killing, que l'on normalise de façon à ce que pour la racine maximale θ on ait $(\theta, \theta) = 2$.

Maintenant, nous associons à \mathfrak{g} une autre algèbre de Lie, *l'algèbre des lacets*, définie par $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z))$ avec le crochet naturel. Contrairement à \mathfrak{g} , l'algèbre $L\mathfrak{g}$ a des extensions centrales non-triviales. En effet, nous avons $H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et il existe un extension canonique

$$(4.1.1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \widetilde{L\mathfrak{g}} \rightarrow L\mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

Soit l un entier. Nous disons qu'une représentation de $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ est de niveau l si le centre opère par multiplication par l . Les représentations irréductibles de niveau l intégrables de $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ sont classifiées par les poids contenus dans $\mathcal{P}_l := \{\beta \in \mathcal{P}_+ | (\beta, \theta) \leq l\}$. On note $\mathcal{H}_l(\beta)$ la représentation irréductible et intégrable de niveau l et de plus haut poids $\beta \in \mathcal{P}_l$.

Or, fixons un niveau $l \geq 0$. Soit (X, p_1, \dots, p_n) une courbe n -marquée stable sur \mathbb{C} et supposons que les points p_i soient étiquetés par les représentations $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{P}_l$. Choisissons un point non-singulier $p \neq p_i \in X, \forall i$. Soit z une coordonnée locale en p . Notons $X^* := X - \{p\}$ et considérons l'algèbre de Lie $L_X\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(X^*)$. Nous obtenons donc un morphisme d'algèbres de Lie

$$(4.1.2) \quad \sigma : L_X\mathfrak{g} \rightarrow L\mathfrak{g},$$

$$(4.1.3) \quad M \otimes f \mapsto M \otimes \hat{f},$$

où \hat{f} désigne le développement en série de Laurent de f en p . Par le théorème des résidus, l'extension centrale de $L_X\mathfrak{g}$ obtenue par image réciproque via le morphisme σ de (4.1.1) se

scinde. Notamment, $L_X \mathfrak{g}$ peut être vue comme une sous-algèbre de Lie de $\widetilde{L\mathfrak{g}}$. Par conséquent, le module $\mathcal{H}_l(0)$ peut être considéré comme un $L_X \mathfrak{g}$ -module. En outre, les \mathfrak{g} -modules $L(\beta_i)$ peuvent également être considérés comme des $L_X \mathfrak{g}$ -modules via l'évaluation en p_i . L'espace des blocs conformes se définit alors par

$$B_{G,X}(l; p_1, \dots, p_n; \beta_1, \dots, \beta_n) := [\mathcal{H}_l(0) \otimes L(\beta_1) \otimes \dots \otimes L(\beta_n)]_{L_X \mathfrak{g}},$$

où $\llbracket_{L_X \mathfrak{g}}$ désigne les coinvariants sous l'action de $L_X \mathfrak{g}$.

4.2 Appendice B : dualité projective homologique, décompositions de Lefschetz et résolutions catégoriques des singularités

Dans cette section nous donnons la définition de décomposition semi-orthogonale de Lefschetz et de dualité projective homologique, introduites par Kuznetsov dans [92]. Pour mieux comprendre ces deux définitions nous allons aussi introduire la notion de résolution catégorique des singularités, traitée par Kuznetsov [94], Van den Bergh [135] et d'autres. Pour les détails les plus techniques, nous renvoyons le lecteur à [92], [101] et [94].

Définition 4.2.1. [94, Def. 3.1] *Une catégorie triangulée \mathcal{D} est régulière si elle est équivalente à une sous-catégorie admissible de la catégorie dérivée bornée d'une variété algébrique lisse.*

Définition 4.2.2. [94, Def. 3.2] *Soit \mathcal{D}^{perf} la sous-catégorie pleine triangulée d'une catégorie triangulée \mathcal{D} composée par les complexes parfaits. Une résolution catégorique de \mathcal{D} est une catégorie triangulée régulière $\widetilde{\mathcal{D}}$ et un couple de foncteurs*

$$\pi_* : \widetilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}, \quad \pi^* : \mathcal{D}^{perf} \rightarrow \widetilde{\mathcal{D}},$$

tels que :

1. π^* est l'adjoint à gauche de π_* sur \mathcal{D}^{perf} , i.e.

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\pi^* F, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \pi_* G) \quad \forall F \in \mathcal{D}^{perf}, G \in \widetilde{\mathcal{D}};$$

2. le morphisme naturel de foncteurs $\mathrm{id}_{\mathcal{D}^{perf}} \rightarrow \pi_* \pi^*$ est un isomorphisme.

Remarque 4.2.3. *Soit Y une variété algébrique singulière. Nous appelons résolution non-commutative des singularités une résolution catégorique $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\mathbf{D}^b(Y)$ qui peut être réalisée comme la catégorie dérivée des faisceaux de modules sur un faisceau de \mathcal{O}_Y -algèbres sur Y . Ce type de résolution a été introduite par Van den Bergh [136], [135].*

Maintenant, nous introduisons une classe de décompositions semi-orthogonales qui est nécessaire pour la dualité projective homologique. Soit X une variété algébrique.

Définition 4.2.4. (cf. [92], Def. 4.1) *Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites sur X . Une décomposition de Lefschetz de $\mathbf{D}^b(X)$ par rapport à L est une décomposition semi-orthogonale :*

$$(4.2.1) \quad \langle \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \otimes \mathcal{O}_X(1) \dots, \mathbf{A}_m \otimes \mathcal{O}_X(m) \rangle$$

où les A_i sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathbf{D}^b(X)$ satisfaisant $A_m \subset \dots \subset A_1 \subset A_0$.

Une décomposition de Lefschetz duale de $\mathbf{D}^b(X)$ par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$ est une décomposition semi-orthogonale :

$$\langle A_m \otimes \mathcal{O}_X(-m), \dots, A_1 \otimes \mathcal{O}_X(-1), A_0 \rangle,$$

où les A_i sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathbf{D}^b(X)$ satisfaisant $A_m \subset \dots \subset A_1 \subset A_0$.

Dans la définition ci-dessus, la notation $A_i \otimes \mathcal{O}_X(i)$ désigne la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les objets $A_i \otimes \mathcal{O}_X(i)$, pour $A_i \in A_i$.

Exemple 4.2.5. Soit $X = Gr(2, n)$ la grassmannienne des plans dans un espace vectoriel de dimension n . On note \mathcal{B} le fibré tautologique de rang 2 sur X et $\mathcal{O}_X(1)$ le fibré très ample du plongement de Plücker. Alors on a une décomposition de Lefschetz de $\mathbf{D}^b(X)$ par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$ ([91], section 2.4) :

$$\mathbf{D}^b(X) = \langle A_0, A_1 \otimes \mathcal{O}_X(1) \dots A_{n-1} \otimes \mathcal{O}_X(n-1) \rangle,$$

avec

$$A_0 = \dots = A_{n-1} = \langle S^{k-1}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}, \mathcal{O}_X \rangle \text{ si } n = 2k + 1,$$

$$A_0 = \dots A_{k-1} = \langle S^{k-1}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}, \mathcal{O}_X \rangle \text{ et}$$

$$A_k = \dots = A_{2k-1} = \langle S^{k-2}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}, \mathcal{O}_X \rangle \text{ si } n = 2k.$$

Considérons maintenant X comme plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$, dont $\mathcal{O}_X(1)$ est le fibré en droites très ample correspondant. Prenons la décomposition semi-orthogonale de Lefschetz (4.2.1). Pour toute section hyperplane X_H de X par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$, la composée des foncteurs

$$A_i(i) \rightarrow \mathbf{D}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}^b(X_H)$$

de plongement et restriction est pleine et fidèle et nous obtenons une autre suite semi-orthogonale

$$(4.2.2) \quad \langle A_1(1), \dots, A_m(m) \rangle$$

dans $\mathbf{D}^b(X_H)$. Nous remarquons que cette collection est égale à (4.2.1), privée de la première composante. Notons \mathcal{C}_H l'orthogonal, dans $\mathbf{D}^b(X_H)$, de la sous-catégorie engendrée par la suite (4.2.2). Cela donne une famille $\{\mathcal{C}_H\}_{H \in \mathbb{P}(V^*)}$ de catégories triangulées au-dessus de l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$. Nous devons aussi ajouter un'ultérieure hypothèse, c'est-à-dire que cette famille soit géométrique. Cela en gros veut dire qu'il existe une variété algébrique Z avec une application $Z \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ telle que pour tout $H \in \mathbb{P}(V^*)$ nous avons $\mathcal{C}_H \cong \mathbf{D}^b(Z(H))$, où $Z(H)$ est la fibre de Z au-dessus de H .

Théorème 4.2.6. [92, Thm. 6.3] La catégorie dérivée de Z admet une décomposition de Lefschetz duale

$$\mathbf{D}^b(Z) = \langle \mathbf{B}_l(-l), \mathbf{B}_{l-1}(1-l), \dots, \mathbf{B}_1(-1), \mathbf{B}_0 \rangle, \quad 0 \subset \mathbf{B}_l \subset \mathbf{B}_{l-1} \subset \dots \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_0.$$

Soient $L \subset V^*$ un sous-espace linéaire, et $L^\perp \subset V$ son espace orthogonal, tel que les sections linéaires $X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp)$ et $Z_L = Z \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L)$ aient les dimension attendues, $\dim(X_L) = \dim(X) - \dim(L)$ et $\dim(Z_L) = \dim(Z) - \dim(L^\perp)$. Alors il existe une catégorie triangulée \mathcal{C}_L et des décompositions semi-orthogonales :

$$(4.2.3) \quad \mathbf{D}^b(X_L) = \langle \mathcal{C}_L, \mathbf{A}_{\dim(L)}(1), \dots, \mathbf{A}_m(m+1-\dim(L)) \rangle;$$

$$(4.2.4) \quad \mathbf{D}^b(Z_L) = \langle \mathbf{B}_l(\dim(L^\perp) - l - 1), \dots, \mathbf{B}_{\dim(L^\perp)}(-1), \mathcal{C}_L \rangle.$$

La variété Z peut être considérée comme une généralisation homologique de la variété duale projective de X . D'après [92], Z est appelée donc *la variété projective homologiquement duale de X* .

Exemples 4.2.7. (i) Soit $f : X := \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ un sous-espace linéaire de dimension $i-1$, considéré avec la décomposition de Lefschetz $\mathbf{D}^b(X) = \langle f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k), \dots, f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k+i-1) \rangle$. Alors $Y = \mathbb{P}(W^\perp) \subset \mathbb{P}(V^*)$ est la variété homologiquement duale de X [92, Sect. 9].

(ii) Soit S une variété lisse avec un fibré vectoriel $E \rightarrow S$ de rang i . Soit $X := \mathbb{P}_S(E)$ un projectivisé de ce fibré avec projection $p : X \rightarrow S$ et $\mathcal{O}_X(1)$ le fibré sur X tel que $p_* \mathcal{O}_X(1) \cong E^*$. Soit $V^* \subset H^0(S, E^*)$ un espace de sections globales qui engendrent E^* , et $f : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ le morphisme correspondant. Notons $Y := \mathbb{P}_S(E^\perp)$ le projectivisé du noyau $E^\perp = \text{Ker}(V^* \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E^*)$. Alors, si E est engendré par ses sections globales, Y est homologiquement duale à X , relativement au-dessus de S [92, Sect. 8].

(iii) Soit $V = \text{Sym}^2 W$ le carré symétrique d'un espace vectoriel W de dimension finie. Il existe naturellement un faisceau \mathcal{B}_0 de parties paires de l'algèbre de Clifford sur $\mathbb{P}(V^*)$. La variété algébrique non-commutative $(\mathbb{P}(V^*), \mathcal{B}_0)$ est la variété projective homologiquement duale de $\mathbb{P}(W)$, plongé par son morphisme double de Veronese [93, Thm 5.4]. En effet, il existe une version "tordue" de la dualité homologique, que nous nous abstenons d'expliquer en détail, aussi pour les variétés non-commutatives

(iv) Soit W un espace vectoriel de dimension 6 ou 7 et $Pf(2t, W)$ la variété (Pfaffienne) qui paramètre tous les tenseurs anti-symétriques ω tels que $\text{rg}(\omega) \leq 2t$. Alors la variété projective homologiquement duale de $Gr(2, W)$ est une résolution catégorique non-commutative (Y, \mathcal{R}) (voir Rem. 4.2.3) de la variété Pfaffienne $Y := Pf(4, W)$ [91, Thm. 1].

(v) Soient U et V deux espaces vectoriels de dimension, respectivement, $n+1$ et $m+1$. Soit $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$ la variété produit de Segre leur associée et $Z_{n,m} \subset \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ la variété déterminantielle qui paramètre toutes les matrices $n \times m$ de rang non maximale. Alors il existe une $\mathcal{O}_{Z_{n,m}}$ -algèbre \mathcal{R} et une résolution catégorique non-commutative des singularités $(Z_{n,m}, \mathcal{R})$ de $Z_{n,m}$ (voir Rem. 4.2.3) qui est la variété projective homologiquement duale de X (à paraître dans [19], voir un résumé dans l'appendice C).

4.3 Appendice C : Dualité projective homologique pour les variétés de Segre

Dans cette section nous présentons brièvement des résultats obtenus en collaboration avec M.Bernardara et D.Faenzi, qui font l'objet d'un travail en cours [19]. L'objectif de ce travail est de montrer la dualité projective homologique entre les variétés de Segre et certaines désingularisations des variétés déterminantielles, et en étudier les applications. Nous travaillerons sur le corps \mathbb{C} des complexes. Pour des raisons de clarté dans les formules, dans cette section $\mathbb{P}(V)$ indiquera l'espace des quotients de dimension 1 d'un espace vectoriel V . Si $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow S$ est un fibré projectif associé à un fibré vectoriel $E \rightarrow S$, pour le fibré ample relatif nous adoptons la convention que $p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cong E$.

Soient U et V deux espaces vectoriels complexes, tels que $\dim(U) = n + 1$ et $\dim(V) = m + 1$. Soit $X := \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$ la variété produit de Segre des deux espaces projectifs et soit $Z_{n,m}$ le lieu qui paramètre les tenseurs (les matrices) dans $\mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ qui n'ont pas rang maximale. Nous allons appeler $Z_{n,m}$ *variété déterminantielle*, comme elle est définie dans $\mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ par les déterminants des mineurs maximales des matrices.

Le produit de Segre peut être vu de manière très naturelle comme un fibré projectif au-dessus de $\mathbb{P}(U)$. En effet, ce n'est pas difficile de voir que X est isomorphe au projectivisé du fibré $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ au-dessus de $\mathbb{P}(U)$. En outre, dénotons par $T_{\mathbb{P}(U)}$ le fibré tangent de l'espace projectif $\mathbb{P}(U)$ et désignons

$$Y := \mathbb{P}(V^* \otimes T_{\mathbb{P}(U)}(-1)).$$

Le fibré projectivisé Y vient avec une projection naturelle $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}(U)$. De plus, il existe un morphisme tautologique naturel $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$. En effet, en prenant la duale, tordue par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-1)$ de la suite exacte d'Euler, nous avons

$$(4.3.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-1) \rightarrow U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \rightarrow T_{\mathbb{P}(U)}(-1) \rightarrow 0.$$

En prenant le push-forward, en tensorisant par V^* et en prenant les sections globales, nous trouvons un isomorphisme $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)) \cong U^* \otimes V^*$, qui définit le morphisme. Nous pouvons même prouver plus. Notamment, l'image de $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ est $Z_{n,m}$ et Y en est une résolution de singularités. Cette résolution est traditionnellement appelée *résolution de Springer*.

Grâce à la dualité projective homologique pour les fibrés projectifs (voir Exemple 4.2.7 (ii) de l'appendice B)¹ nous arrivons à prouver le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *La variété projective lisse $Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ est la duale projective homologique de la variété de Segre $X \rightarrow \mathbb{P}(U \otimes V)$, relativement au-dessus de $\mathbb{P}(U)$.*

La preuve de ce théorème est une application directe de la dualité projective homologique pour les fibrés projectifs [92, Sect. 8] pour les projectivisés de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ et $V^* \otimes T_{\mathbb{P}(U)}(-1)$ au-dessus de $\mathbb{P}(U)$. Les deux fibrés sont engendrés par leurs sections globales et on voit qu'ils sont orthogonaux en twistant la suite exacte (4.3.1) par V^* .

1. Plus précisément, il s'agit d'une version "duale" de celle-la, où $E^\perp = (\text{Ker}(V \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E))^*$ et V est un espace de sections globales qui engendrent E .

Nous remarquons que la duale projective classique de la variété de Segre $X \rightarrow \mathbb{P}(U \otimes V)$ est exactement la variété déterminantielle $Z_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$, qui est toujours singulière lorsque sa dimension est au moins 3. Au contraire, la duale projective homologique [92, Thm. 6.3] est toujours une variété lisse (éventuellement non-commutative). La relation entre la duale projective homologique d'une variété projective W avec la duale classique de W est décrite dans [92]. Dans le cas que nous traitons, l'ensemble des points critiques de $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(U^* \otimes V^*)$ est la variété duale classique. Une interprétation plus catégorique, qui s'adapte mieux au contexte de la dualité homologique, est l'identification de $\mathbf{D}^b(Y)$ avec une résolution catégorique non-commutative des singularités de $\mathbf{D}^b(Z_{n,m})$. De cette manière, on peut énoncer le théorème 4.3.1 comme une dualité entre variétés de Segre et résolutions catégoriques des variétés déterminantielles.

Proposition 4.3.2. *Il existe une $\mathcal{O}_{Z_{n,m}}$ -algèbre \mathcal{R} telle que $(Z_{n,m}, \mathcal{R})$ est une résolution catégorique non-commutative des singularités de $Z_{n,m}$. De plus, $\mathbf{D}^b(Z_{n,m}, \mathcal{R}) \cong \mathbf{D}^b(Y)$, de manière que $(Z_{n,m}, \mathcal{R})$ est la duale projective homologique (non-commutative) de X .*

La preuve de cette proposition se base sur l'observation suivante. Soit $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ une résolution des singularités d'une variété projective \mathcal{Z} telle que $Rq_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ et que \mathcal{Y} a un objet *tilting*² T . Si nous considérons $S := Rq_*T$, alors la variété non-commutative $(\mathcal{Z}, \text{End}(S))$ est une résolution catégorique des singularités de \mathcal{Z} . En effet, dans notre cas, Y est un fibré projectif au-dessus d'un espace projectif donc il a bien un objet tilting.

L'une des motivations qui nous a poussé à étudier cette dualité homologique est une question posée par Bondal.

Question (Bondal) : Soit X une variété projective lisse. Existe-t-il une variété de Fano lisse F avec un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}^b(F)$?

Nous avons décidé d'appeler *Fano-visitor* les variétés X pour lesquelles cette condition est vérifiée. En prenant des sections linéaires des variétés de Segre et déterminantielles, nous trouvons des larges classes de Fano-visitors. Considérons un sous-espace linéaire $L \subset U \otimes V$ (i.e. une projection $U^* \otimes V^* \rightarrow L^*$) de dimension r et désignons $X_L := X \cap \mathbb{P}(U \otimes V/L)$, $Z_L := Z_{n,m} \cap \mathbb{P}(L^*)$ et $Y_L := Y_{\times_{\mathbb{P}(U^* \times V^*)} \mathbb{P}(L^*)}$. Nous observons que, pour un choix générique de L , Z_L est une variété déterminantielle dans \mathbb{P}^{r-1} définie par une matrice $n \times m$ de formes linéaires et $\mathbf{D}^b(Y_L) \cong \mathbf{D}^b(Z_L, \mathcal{R}_L)$ sont ses résolutions géométrique et catégorique des singularités (où \mathcal{R}_L est le tiré en arrière de \mathcal{R} le long de l'application naturelle de restriction). En appliquant les résultats généraux sur la dualité projective homologique, nous obtenons le deuxième résultat principal de [19].

Proposition 4.3.3. *Soit $Z_L \subset \mathbb{P}^{r-1}$ une variété déterminantielle générique définie par une matrice $n \times m$.*

Si $r < m$, Z_L n'est pas Fano, et il existe un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(Z_L, \mathcal{R}_L) \rightarrow \mathbf{D}^b(X_L)$ dans la catégorie dérivée de la variété de Fano X_L . Donc les variétés déterminantielles (à une résolution catégorique des singularités près) sont des Fano-visitors.

Si $r > n$, X_L n'est pas Fano, et il y a un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(X_L) \rightarrow \mathbf{D}^b(Z_L, \mathcal{R}_L)$ dans la catégorie dérivée de la résolution catégorique des singularités de la variété de Fano Z_L . Donc les sections linéaires des variétés de Segre (à une résolution catégorique des singularités près) sont des Fano-visitors.

2. Un fibré vectoriel E au-dessus de \mathcal{Y} est dit *tilting* si le push-forward $q_* \text{End}(E)$ est un faisceau pure, i.e. $R^{>0}q_* \text{End}(E) = 0$

En outre, nous remarquons que, si $n = m$, la proposition 4.3.3 couvre tous les cas possibles. Au contraire, si $m \leq r < n$, il existe un foncteur plein et fidèle $\mathbf{D}^b(Y_L) \rightarrow \mathbf{D}^b(X_L)$, mais X_L n'est pas une variété de Fano.

En petite dimension, la proposition 4.3.3 a des corollaires particulièrement amusants. Notamment, rappelons que l'équation de toute courbe plane lisse de degré $d \geq 4$ peut s'écrire comme le déterminant d'une matrice $d \times d$ de formes linéaires en trois inconnues. En prenant une section linéaire appropriée, de codimension 3, de la variété de Segre $\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{P}^{d-1}$, nous obtenons un variété de Fano lisse. Donc, toute courbe plane de type général est Fano-visitor.

Le lecteur aura peut-être déjà remarqué que les idées que nous décrivons dans cette section sont proches de celles développées dans la section 3.3 à propos de la représentabilité catégorique. En effet, grâce à la dualité projective homologique nous trouvons des classes de variétés rationnelles qui sont catégoriquement représentables en codimension 2, comme demandé dans la Question 1, posée dans la section 3.3.3.

Proposition 4.3.4. *Si $r < m$, alors X_L est rationnelle et catégoriquement représentable en codimension $2n - 2r \geq 2$. Si $r > n$, alors Y_L est rationnelle et catégoriquement représentable en codimension $2r - 2n \geq 2$. Dans le deuxième cas, la variété déterminantielle Z_L est rationnelle et elle admet une résolution catégorique des singularités qui est catégoriquement représentable en codimension $2r - 2n \geq 2$.*

La partie finale de [19] est complètement dédiée à l'étude des hypersurfaces cubiques déterminantielles de dimension 3 et 4. Malheureusement, les preuves ne sont pas encore finies donc je vais seulement donner un résultat qui me semble intéressant et dont je suis (raisonnablement !) sûr. Dans la section 5 de [95], Kuznetsov décrit la catégorie dérivée d'un 4fold cubique $B \subset \mathbb{P}^5$ avec un point singulier. Notamment, il prouve l'existence d'une catégorie triangulée \tilde{D} qui est une résolution catégorique de $\mathbf{D}^b(B)$. Soit \tilde{B} l'éclatée de la hypersurface cubique dans son point singulier et \tilde{H} le pull-back des diviseurs hyperplanes le long de l'éclatement. Alors il existe une surface K3 sextique G dans \mathbb{P}^4 , intersection complète d'une hypersurface cubique et une quadrique, telle que \tilde{D} admet une décomposition semi-orthogonale comme suit :

$$\tilde{D} = \langle \mathbf{D}^b(G), \mathcal{O}_{\tilde{B}}, \mathcal{O}(\tilde{H})_{\tilde{B}}, \mathcal{O}(2\tilde{H})_{\tilde{B}} \rangle.$$

Il est aussi possible de décrire un système linéaire explicite sur \mathbb{P}^4 , dont le lieu de base est la surface G , qui définit une application rationnelle dont l'image est \tilde{B} . Dans le cas du 4fold cubique déterminantielle (qui est toujours singulier), le résultat de Kuznetsov reste valable mais la surface sextique est dégénérée.

Proposition 4.3.5. *Si la hypersurface cubique $B \subset \mathbb{P}^5$ est déterminantielle, elle est obtenue comme éclatement de \mathbb{P}^4 le long d'une surface sextique qui est l'union de deux scrolls cubiques qui s'intersectent le long d'une courbe quintique elliptique.*

La proposition 4.3.5 est une généralisation du cas du 3fold cubique, présenté par Hassett et Tschinkel dans [65, Thm. 2]. Dans le cas de l'hypersurface déterminantielle de dimension 3, lorsque nous projetons avec centre un point singulier, une famille de droites est contractée sur une courbe sextique dans \mathbb{P}^3 , composée par l'union de deux cubiques gauches qui s'intersectent en 5 points. Par un argument d'induction, un résultat semblable peut être prouvé pour les hypersurfaces cubiques déterminantielles de toute dimension.

Bibliographie

- [1] H. M. A. Gibney, D. Jensen and D. Swinarski. Veronese quotient models of $\overline{M}_{0,n}$ and conformal blocks. *preprint* <http://arxiv.org/abs/1208.2438>, 2012.
- [2] A. Bruno and M. Mella. On some fibrations of $\overline{M}_{0,n}$. *preprint* <http://arxiv.org/pdf/1105.3293.pdf>, à paraître au *JEMS*, 2011.
- [3] V. A. Alekseev. On conditions for the rationality of three-folds with a pencil of del Pezzo surfaces of degree 4. *Mat. Zametki*, 41(5) :724–730, 766, 1987.
- [4] V. Alexeev and D. Swinarski. Nef divisors on $\overline{M}_{0,n}$ from GIT. In *Geometry and arithmetic*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 1–21. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
- [5] A. Alzati and M. Bolognesi. On rational maps between moduli spaces of curves and of vector bundles. (*à paraître au J. of Alg. Geom.*), pages 1–27, 2010.
- [6] M. Arap, A. Gibney, J. Stankewicz, and D. Swinarski. sl_n level 1 conformal blocks divisors on $\overline{M}_{0,n}$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7) :1634–1680, 2012.
- [7] A. Auel, M. Bernardara, and M. Bolognesi. Fibrations in complete intersections of quadrics, clifford algebras, derived categories, and rationality problems. (*à paraître au Journ. Math. Pures et Appl., arXiv :1109.6938*), pages 1–42, 2011.
- [8] A. Auel, M. Bernardara, M. Bolognesi, and A. Varilly-Alvarado. Cubic fourfolds containing a plane and a quintic del pezzo surface. (*preprint* <http://arxiv.org/abs/1205.0237>, à paraître au *Algebraic Geometry*), pages 1–14, (2013).
- [9] A. Beauville. Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(3) :309–391, 1977.
- [10] A. Beauville. Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula. In *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993)*, volume 9 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 75–96, Ramat Gan, 1996. Bar-Ilan Univ.
- [11] A. Beauville. Determinantal hypersurfaces. *Michigan Math. J.*, 48 :39–64, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.
- [12] A. Beauville. The Coble hypersurfaces. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(3) :189–194, 2003.
- [13] A. Beauville and R. Donagi. La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(14) :703–706, 1985.
- [14] A. Beauville, M. S. Narasimhan, and S. Ramanan. Spectral curves and the generalised theta divisor. *J. Reine Angew. Math.*, 398 :169–179, 1989.
- [15] A. A. Beilinson. The derived category of coherent sheaves on \mathbf{P}^n . *Selecta Math. Soviet.*, 3(3) :233–237, 1983/84. Selected translations.

- [16] M. Beltrametti. On the Chow group and the intermediate Jacobian of a conic bundle. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 141 :331–351, 1985.
- [17] M. Bernardara and M. Bolognesi. Derived categories and rationality of conic bundles. (*à paraître au Compositio Math.*), pages 1–29, 2010.
- [18] M. Bernardara and M. Bolognesi. Categorical representability and intermediate jacobians of fano threefolds. *Derived Categories in Algebraic Geometry–Tokyo 2011*, EMS Series Congress Reports :1–25, 2012.
- [19] M. Bernardara, M. Bolognesi, and D. Faenzi. Homological projective duality for segre and determinantal varieties. (*preprint, en préparation*), pages 1–24, 2013.
- [20] M. Bernardara, E. Macrì, S. Mehrotra, and P. Stellari. A categorical invariant for cubic threefolds. *Adv. Math.*, 229(2) :770–803, 2012.
- [21] A. Bertram. Moduli of rank-2 vector bundles, theta divisors, and the geometry of curves in projective space. *J. Differential Geom.*, 35(2) :429–469, 1992.
- [22] S. Bloch and J. P. Murre. On the Chow group of certain types of Fano threefolds. *Compositio Math.*, 39(1) :47–105, 1979.
- [23] B.Moonen and F.Oort. The Torelli locus and special subvarieties. *preprint* <http://arxiv.org/abs/1112.0933>, (*To appear in Handbook of Moduli (G. Farkas and I. Morrison, eds.)*), 2011.
- [24] M. Bolognesi. On Weddle surfaces and their moduli. *Adv. in Geom.*, 7(1) :113–144, 2007.
- [25] M. Bolognesi. A conic bundle degenerating on the Kummer surface. *Math. Z.*, 261(1) :149–168, 2009.
- [26] M. Bolognesi. Forgetful linear systems on the projective space and rational normal curves over $\mathcal{M}_{0,2n}^{GIT}$. *Bull. of the London Math. Soc.*, 43(3) :583–596, 2011.
- [27] M. Bolognesi and S. Brivio. Coherent systems and modular subvarieties of $SU_C(r)$. *Internat. J. Math.*, 23(4) :1–23, 2012.
- [28] M. Bolognesi and N. Giansiracusa. Factorization of point configurations, cyclic covers and conformal blocks. (*à paraître au JEMS*), pages 1–17, (2012).
- [29] M. Bolognesi, N. Giansiracusa, D. Jensen, and A. Massarenti. Cyclic cover, factorization rules and conformal blocks bundles in positive genus. *en préparation*, 2013.
- [30] M. Bolognesi and M. Loenne. The fundamental group of the trigonal locus. *preprint, en préparation*, pages 1–30, 2013.
- [31] M. Bolognesi and A. Vistoli. Stacks of trigonal curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(7) :3365–3393, 2012.
- [32] A. Bondal and D. Orlov. Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties. *preprint arXiv :alg-geom/9506012*, pages 1–55, 1995.
- [33] A. Bondal and D. Orlov. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compositio Math.*, 125(3) :327–344, 2001.
- [34] A. I. Bondal. Representations of associative algebras and coherent sheaves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(1) :25–44, 1989.
- [35] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Representable functors, Serre functors, and reconstructions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(6) :1183–1205, 1337, 1989.

- [36] S. B. Bradlow, O. García-Prada, V. Mercat, V. Muñoz, and P. E. Newstead. Moduli spaces of coherent systems of small slope on algebraic curves. *Comm. Algebra*, 37(8) :2649–2678, 2009.
- [37] S. Brivio and A. Verra. The theta divisor of $su_c(2, 2d)^s$ is very ample if c is not hyperelliptic. *Duke Math. J.*, 82 :503–552, 1996.
- [38] F. Campana, T. Peternell, and A. V. Pukhlikov. The generalized Tseng theorem and rationally connected Fano fibrations. *Mat. Sb.*, 193(10) :49–74, 2002.
- [39] G. Ceresa and A. Verra. The Abel-Jacobi isomorphism for the sextic double solid. *Pacific J. Math.*, 124(1) :85–105, 1986.
- [40] D. Chen. Covers of the projective line and the moduli space of quadratic differentials. *Geom. Dedicata*, 163 :105–125, 2013.
- [41] C. H. Clemens and P. A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math. (2)*, 95, 1972.
- [42] A. B. Coble. A Generalization of the Weddle Surface, of Its Cremona Group, and of Its Parametric Expression in Terms of Hyperelliptic Theta Functions. *Amer. J. Math.*, 52(3) :439–500, 1930.
- [43] A. B. Coble. The geometry of the Weddle manifold W_p . *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41(4) :209–222, 1935.
- [44] A. B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*, volume 10 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982. Reprint of the 1929 edition.
- [45] J.-L. Colliot-Thélène and M. Levine. Une version du théorème d’Amer et Brumer pour les zéro-cycles. In *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, volume 18 of *Dev. Math.*, pages 215–223. Springer, New York, 2010.
- [46] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, and P. Swinnerton-Dyer. Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I. *J. Reine Angew. Math.*, 373 :37–107, 1987.
- [47] D. F. Coray, D. J. Lewis, N. I. Shepherd-Barron, and P. Swinnerton-Dyer. Cubic threefolds with six double points. In *Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, pages 63–74. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [48] J. d’Almeida, L. Gruson, and N. Perrin. Courbes de genre 5 munies d’une involution sans point fixe. *J. London Math. Soc. (2)*, 72(3) :545–570, 2005.
- [49] I. Dolgachev and D. Ortland. *Point Sets in Projective Spaces and Theta Functions*, volume 165 of *Asterisque*. Société Mathématique de France, 1988.
- [50] D. Swinarski. sl_2 conformal block divisors and the nef cone of $\overline{M}_{0,n}$. *preprint* <http://arxiv.org/abs/1107.5331>, 2011.
- [51] R. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev. *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, volume 56 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [52] E. Looijenga. Conformal blocks revisited. *preprint math.AG/0507086*, 2005.
- [53] N. Fakhruddin. Chern classes of conformal blocks. In *Compact moduli spaces and vector bundles*, volume 564 of *Contemp. Math.*, pages 145–176. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

- [54] G. Faltings. A proof for the Verlinde formula. *J. Algebraic Geom.*, 3(2) :347–374, 1994.
- [55] G. Fano. Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4° ordine. *Comment. Math. Helv.*, 15 :71–80, 1943.
- [56] M. Fedorchuk. Cyclic covering morphisms on $\overline{M}_{0,n}$. *preprint* <http://arxiv.org/abs/1105.0655>, 2011.
- [57] W. Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [58] N. Giansiracusa and A. Gibney. The cone of type A , level 1, conformal blocks divisors. *Adv. Math.*, 231(2) :798–814, 2012.
- [59] A. Gibney, S. Keel, and I. Morrison. Towards the ample cone of $\overline{M}_{g,n}$. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :273–294, 2002.
- [60] D. Gieseker. Geometric invariant theory and the moduli of bundles. In *Gauge theory and the topology of four-manifolds (Park City, UT, 1994)*, volume 4 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 5–21. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [61] S. Gorchinskiy and V. Guletskiĭ. Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field. *J. Algebraic Geom.*, 21(2) :347–373, 2012.
- [62] T. Graber, J. Harris, and J. Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :57–67 (electronic), 2003.
- [63] B. Hassett. Some rational cubic fourfolds. *J. Algebraic Geom.*, 8(1) :103–114, 1999.
- [64] B. Hassett. Moduli spaces of weighted pointed stable curves. *Adv. Math.*, 173(2) :316–352, 2003.
- [65] B. Hassett and Y. Tschinkel. Flops on holomorphic symplectic fourfolds and determinantal cubic hypersurfaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 9(1) :125–153, 2010.
- [66] B. Hassett, A. Várilly-Alvarado, and P. Varilly. Transcendental obstructions to weak approximation on general K3 surfaces. *Adv. Math.*, 228(3) :1377–1404, 2011.
- [67] B. Howard, J. Millson, A. Snowden, and R. Vakil. The ideal of relations for the ring of invariants of n points on the line. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(1) :1–60, 2012.
- [68] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [69] A. Iliev. The Fano surface of the Gushel’ threefold. *Compositio Math.*, 94(1) :81–107, 1994.
- [70] A. Iliev. The Sp_3 -Grassmannian and duality for prime Fano threefolds of genus 9. *Manuscripta Math.*, 112(1) :29–53, 2003.
- [71] A. Iliev and L. Manivel. Prime Fano threefolds and integrable systems. *Math. Ann.*, 339(4) :937–955, 2007.
- [72] A. Iliev and L. Manivel. On cubic hypersurfaces of dimension seven and eight. *Proc. of the London Math. Soc.*, (to appear, <http://arxiv.org/abs/1102.3618>), 2011.
- [73] A. Iliev and D. Markushevich. The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14. *Doc. Math.*, 5 :23–47 (electronic), 2000.
- [74] A. Iliev and D. Markushevich. Elliptic curves and rank-2 vector bundles on the prime Fano threefold of genus 7. *Adv. Geom.*, 4(3) :287–318, 2004.

- [75] V. A. Iskovskikh. On the rationality problem for conic bundles. *Duke Math. J.*, 54(2) :271–294, 1987.
- [76] V. A. Iskovskikh and Y. G. Prokhorov. Fano varieties. In *Algebraic geometry, V*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–247. Springer, Berlin, 1999.
- [77] E. Izadi and B. van Geemen. The tangent space to the moduli space of vector bundles on a curve and the singular locus of the theta divisor of the Jacobian. *J. Algebraic Geom.*, 10(1) :133–177, 2001.
- [78] V. Kanev. Intermediate Jacobians and Chow groups of three-folds with a pencil of del Pezzo surfaces. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 154 :13–48, 1989.
- [79] V. I. Kanev. Intermediate Jacobians of threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces and generalized Prym varieties. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 36(8) :1015–1017, 1983.
- [80] M. M. Kapranov. Derived category of coherent bundles on a quadric. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(2) :67, 1986.
- [81] M. M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 92(3) :479–508, 1988.
- [82] M. M. Kapranov. Chow quotients of Grassmannians. I. In *I. M. Gel'fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 29–110. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [83] M. M. Kapranov. Veronese curves and Grothendieck-Knudsen moduli space $\overline{M}_{0,n}$. *J. Algebraic Geom.*, 2(2) :239–262, 1993.
- [84] L. Katzarkov. Generalized homological mirror symmetry, superschemes and nonrationality. In *Special metrics and supersymmetry*, volume 1093 of *AIP Conf. Proc.*, pages 92–131. Amer. Inst. Phys., Melville, NY.
- [85] L. Katzarkov. Generalized homological mirror symmetry and rationality questions. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 163–208. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
- [86] S. Keel and J. McKernan. Contractible extremal rays on $\overline{M}_{0,n}$. pages 1–24, 1996. preprint, <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9607009>.
- [87] M.-A. Knus. *Quadratic and Hermitian forms over rings*, volume 294 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. With a foreword by I. Bertuccioni.
- [88] M. Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [89] C. Kumar. Invariant vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves. *Michigan Math. J.*, 47(3) :575–584, 2000.
- [90] C. Kumar. Linear systems and quotients of projective space. *Bull. London Math. Soc.*, 35(2) :152–160, 2003.
- [91] A. Kuznetsov. Homological projective duality for grassmannians of lines. (*preprint arXiv :math/0610957*), 2006.
- [92] A. Kuznetsov. Homological projective duality. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :157–220, 2007.

- [93] A. Kuznetsov. Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics. *Adv. Math.*, 218(5) :1340–1369, 2008.
- [94] A. Kuznetsov. Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(4) :661–696, 2008.
- [95] A. Kuznetsov. Derived categories of cubic fourfolds. In *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, volume 282 of *Progr. Math.*, pages 219–243. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
- [96] A. Kuznetsov, L. Manivel, and D. Markushevich. Abel-Jacobi maps for hypersurfaces and noncommutative Calabi-Yau's. *Commun. Contemp. Math.*, 12(3) :373–416, 2010.
- [97] A. G. Kuznetsov. An exception set of vector bundles on the varieties V_{22} . *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (3) :41–44, 92, 1996.
- [98] A. G. Kuznetsov. Derived category of a cubic threefold and the variety V_{14} . *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 246(Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.) :183–207, 2004.
- [99] A. G. Kuznetsov. Derived categories of the Fano threefolds V_{12} . *Mat. Zametki*, 78(4) :579–594, 2005.
- [100] A. G. Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 70(3) :23–128, 2006.
- [101] A. G. Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 70(3) :23–128, 2006.
- [102] A. G. Kuznetsov. Derived categories of Fano threefolds. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 264(Mnogomernaya Algebraicheskaya Geometriya) :116–128, 2009.
- [103] H. Lange and M. S. Narasimhan. Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 266(1) :55–72, 1983.
- [104] Y. Laszlo. Local structure of the moduli space of vector bundles over curves. *Comment. Math. Helv.*, 71(3) :373–401, 1996.
- [105] Y. Laszlo and C. Sorger. The line bundles on the moduli of parabolic G -bundles over curves and their sections. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(4) :499–525, 1997.
- [106] R. Laza. The moduli space of cubic fourfolds via the period map. *Ann. of Math. (2)*, 172(1) :673–711, 2010.
- [107] D. Y. Logachëv. Isogeny of the Abel-Jacobi mapping for a Fano threefold of genus six. In *Constructive algebraic geometry*, pages 67–76, 143. Yaroslav. Gos. Ped. Inst., Yaroslavl', 1982.
- [108] E. Looijenga. The period map for cubic fourfolds. *Invent. Math.*, 177(1) :213–233, 2009.
- [109] E. Macrì and P. Stellari. Fano varieties of cubic fourfolds containing a plane. *Math. Ann.*, 354(3) :1147–1176, 2012.
- [110] B. Moonen. Special subvarieties arising from families of cyclic covers of the projective line. *Doc. Math.*, 15 :793–819, 2010.
- [111] S. Mukai. Fourier functor and its application to the moduli of bundles on an abelian variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 515–550. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [112] S. Mukai. Noncommutativizability of Brill-Noether theory and 3-dimensional Fano varieties. *Sūgaku*, 49(1) :1–24, 1997.

- [113] J. Nagel and M. Saito. Relative Chow–Künneth decompositions for conic bundles and Prym varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16) :2978–3001, 2009.
- [114] M. S. Narasimhan and S. Ramanan. Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 89 :14–51, 1969.
- [115] N. Giansiracusa. Conformal blocks and rational normal curves. *to appear on J. of Alg. Geom.*, preprint <http://arxiv.org/abs/1012.4835>, 2010.
- [116] Q. M. Nguyen. Vector bundles, dualities and classical geometry on a curve of genus two. *Internat. J. Math.*, 18(5) :535–558, 2007.
- [117] D. O. Orlov. Exceptional set of vector bundles on the variety V_5 . *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (5) :69–71, 1991.
- [118] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4) :852–862, 1992.
- [119] D. O. Orlov. Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces. *J. Math. Sci. (New York)*, 84(5) :1361–1381, 1997. Algebraic geometry, 7.
- [120] D. O. Orlov. Derived categories of coherent sheaves, and motives. *Uspekhi Mat. Nauk*, 60(6(366)) :231–232, 2005.
- [121] D. O. Orlov. Derived categories of coherent sheaves, and motives. *Uspekhi Mat. Nauk*, 60(6(366)) :231–232, 2005.
- [122] A. Ortega. On the moduli space of rank 3 vector bundles on a genus 2 curve and the Coble cubic. *J. Algebraic Geom.*, 14(2) :327–356, 2005.
- [123] C. Pauly. Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes. *Duke Math. J.*, 84(1) :217–235, 1996.
- [124] C. Pauly. Self-duality of Coble’s quartic hypersurface and applications. *Michigan Math. J.*, 50(3) :551–574, 2002.
- [125] M. Reid. *The intersection of two quadrics*. PhD thesis, Trinity College, Cambridge, 1972.
- [126] V. V. Shokurov. Prym varieties : theory and applications. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47(4) :785–855, 1983.
- [127] K. A. Shramov. On the rationality of nonsingular threefolds with a pencil of del Pezzo surfaces of degree 4. *Mat. Sb.*, 197(1) :133–144, 2006.
- [128] C. Sorger. La formule de Verlinde. *Astérisque*, (237) :Exp. No. 794, 3, 87–114, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [129] A. S. Tihomirov. The intermediate Jacobian of double \mathbf{P}^3 that is branched in a quartic. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(6) :1329–1377, 1439, 1980.
- [130] S. L. Tregub. Three constructions of rationality of a cubic fourfold. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (3) :8–14, 1984.
- [131] S. L. Tregub. Two remarks on four-dimensional cubics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 48(2(290)) :201–202, 1993.
- [132] A. Tsuchiya, K. Ueno, and Y. Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. In *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, volume 19 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 459–566. Academic Press, Boston, MA, 1989.

- [133] K. Ueno. Introduction to conformal field theory with gauge symmetries. In *Geometry and physics (Aarhus, 1995)*, volume 184 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 603–745. Dekker, New York, 1997.
- [134] A. V. Alexeev and D. Swinarski. Conformal blocks divisors on $\overline{M}_{0,n}$ from \mathfrak{sl}_2 . *preprint* <http://arxiv.org/abs/1001.6659>, 2010.
- [135] M. van den Bergh. Non-commutative crepant resolutions. In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 749–770. Springer, Berlin, 2004.
- [136] M. Van den Bergh. Three-dimensional flops and noncommutative rings. *Duke Math. J.*, 122(3) :423–455, 2004.
- [137] J.-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239) :xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.
- [138] A. Verra. The fibre of the Prym map in genus three. *Math. Ann.*, 276(3) :433–448, 1987.
- [139] C. Voisin. Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbf{P}^5 . *Invent. Math.*, 86(3) :577–601, 1986.
- [140] E. Witten. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 141(1) :153–209, 1991.

Michele Bolognesi
IRMAR
Université de Rennes1
263 Av. du Général Leclerc
35042 RENNES Cédex
FRANCE.
michele.bolognesi@univ-rennes1.fr