Table des matières

Introduction

L'objectif de cette thèse est de prouver quelques résultats sur les espaces de modules de variétés abéliennes et sur les espaces de modules de fibrés vectoriels, qui ont comme trait d'union la surface de Weddle W.
Cette surface peut être définie en partant d'une courbe projective lisse C de genre 2. Soit $Pic^1(C)$ la variété de Picard de C qui paramètre les fibrés en droites de degré 1 sur C et Θ le diviseur sur $Pic^1(C)$ qui paramètre les fibrés en droites F t.q. $h^0(C,F) \neq 0$. Alors $H^0(Pic^1,3\Theta)$ a dimension 9 et l'involution $\varepsilon : L \mapsto \omega_C \otimes L$ agit sur $Pic^1(C)$. Une linéarisation de l'action de ε sur $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(3\Theta)$ décompose $H^0(Pic^1,3\Theta)$ en deux espace propres, respectivement de dimension 4 et 5. La clôture de l'image de l'application rationnelle

$$Pic^1(C) \dashrightarrow |3\Theta|_+^* = \mathbb{P}^3$$

est une surface de Weddle W, elle a degré 4 et 6 points doubles. Si nous considérons l'image K^1 de $Pic^1(C)$ dans $|2\Theta|^*$, nous obtiendrons une surface de Kummer, elle aussi est une surface de degré 4 mais avec 16 points doubles. Nous noterons JC la Jacobienne de la courbe C, c'est-à-dire la variété de Picard qui paramètre les fibrés en droites de degré 0 sur C. La surface W est liée à la surface de Kummer K^1 par une construction classique. En effet si nous considérons un système linéaire de quadriques sur $\mathbb{P}^3$ avec 6 points de base, le lieu discriminant de ce système de quadriques est une surface de Kummer, tandis que la surface de Weddle est le lieu qui paramètre les noyaux des formes quadratiques qui correspondent aux points de la surface K^1.

D'abord nous décrivons l'espace de modules $\mathcal{A}_2(3)^-$ des surfaces abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau 3 et d'une thêta caractéristique impair. Une telle structure permet d'associer naturellement une surface de Weddle à une surface abélienne principalement polarisée (A,H) de la manière suivante. Soit $\imath := \pm Id$ l'involution sur A et L un fibré en droites symétrique représentant la polarisation H, nous obtenons une surface de Weddle en considérant l'image de A dans $\mathbb{P}H^0(A,L^3)_+ = \mathbb{P}^3$, après avoir choisi une linéarisation de l'action de $\imath$ sur le fibré en droites L.

En effet la donnée d'une thêta caractéristique impair indique quel fibré en droites symétrique choisir dans la classe d'équivalence algébrique de H.
Le principal résultat obtenu dans cette partie est le suivant:

Théorème 1 *Soit $\mathcal{A}_2(3)^-$ l'espace de modules de surfaces abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau 3 et une thêta caractéristique impair. L'application donnée par les thêta constants Th^- determiné par les fonctions thêta pairs induit un isomorphisme birationnel*

$$Th^- : \mathcal{A}_2(3)^- \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

En premier lieu, nous développons les préliminaires nécessaires dans la suite de la thèse. Les groupes suivants sont introduits: le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_g(n)$, le groupe thêta $\mathcal{G}(L^n)$ de niveau n d'un fibré en droites L sur une variété abélienne et la notion de structure thêta [Mum66]. De plus certains résultats sur les thêta caractéristiques sont introduits [Bea91].

Ensuite la notion de structure thêta symétrique est défine et nous décrivons le groupe d'automorphismes du groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_g(n)$ qui préservent une structure thêta symétrique. Nous trouvons en effet que la structure de niveau détermine complètement une structure thêta symétrique (Corollaire 3). Puis nous décrivons un groupe arithmétique $\Gamma_2(3)^-$ qui nous permet de définir $\mathcal{A}_2(3)^-$ comme quotient du demi-espace de Siegel $\mathbb{H}_2$ par l'action de $\Gamma_2(3)^-$. Enfin nous développons une construction analogue à celle donnée par Van der Geer pour $\mathcal{A}_2(3{,}6)$, l'espace de modules de surfaces abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau 3 et une thêta caractéristique pair. De manière plus précise, Van der Geer démontre que les thêta constants induisent un isomorphisme birationnel

$$Th^+ : \mathcal{A}_2(3{,}6) \longrightarrow Hess(\mathcal{B})$$

entre l'espace de modules $\mathcal{A}_2(3{,}6)$ et la variété *Hessienne* de la quartique de Burkhardt $\mathcal{B}$, un modèle projectif de $\mathcal{A}_2(3)$. En outre il construit aussi une application *steinerienne*

$$St_+ : Hess(\mathcal{B}) \xrightarrow{10:1} \mathcal{B}$$

qui peut être interprétée comme l'application d'oubli de la thêta caractéristique.
Dans cette thèse on montre en effet que l'application

$$Th^- : \mathcal{A}_2(3)^- \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

donnée par les thêta constants est un isomorphisme birationnel. De plus on construit un système de matrices anti-symétriques sur $\mathbb{P}^3$ qui permet de définir une application *steinerienne*

$$St_- : \mathbb{P}^3 \xrightarrow{6:1} \mathcal{B}$$

qui est l'analogue impair de celle donnée par Van der Geer.

Dans la deuxième partie de la thèse une courbe C projective, lisse de genre 2 est fixé et on donne une description de la surface de Weddle associée à C comme variété paramétrante certaines extensions du fibré canonique ω_C par son inverse ω_C^{-1}. A partir de cette description un fibré en coniques est construit dont le lieu discriminant est birationnel à la surface de Kummer $K^0 := JC/\imath$.

De manière plus précise, le théorème suivant est démontré.

Théorème 2 *Soit C une courbe projective lisse de genre 2 et λ l'involution hyperelliptique sur C. Le lieu des classes d'extensions de ω_C par ω_C^{-1} strictement semistables et λ-invariantes est la surface de Weddle*

$$W \subset \mathbb{P}H^0(Pic^1(C), 3\Theta)_+^*$$

clôture de l'image de $Pic^1(C)$. Les six noeuds de W représentent les extensions non semi-stables.

On notera $\omega = \omega_C$. L'objectif de cette partie est de décrire une sous-variété de

$$\mathbb{P}^4_\omega := \mathbb{P}Ext^1(\omega, \omega^{-1}) = |\omega^3|^*.$$

Cet espace projectif paramètre les classes d'isomorphisme d'extensions

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \omega^{-1} \longrightarrow E_e \longrightarrow \omega \longrightarrow 0, \qquad (e)$$

et il existe une action de l'involution hyperelliptique λ sur $\mathbb{P}^4_\omega$. La variété W' décrite est le lieu des extensions semi-stables invariantes sous l'action de λ. L'action de λ a deux espaces propres et le projectivisé de l'espace invariant est

$$\mathbb{P}^3_{\omega+} := \mathbb{P}H^0(C, \omega^3)_+^* = \mathbb{P}(Sym^3 H^0(C, \omega)^*).$$

Grace au théorème de Bertram [Ber92] nous démontrons que la surface W' est une section hyperplane (avec multiplicité 2) d'une hypersurface de degré 8 dans $\mathbb{P}^4_\omega$. Notamment nous avons une égalité entre diviseurs de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$

$$Sec(C) \cap \mathbb{P}^3_{\omega+} = 2W'.$$

Ensuite nous démontrons que $W' \cong W$, où W est la surface de Weddle image de $Pic^1(C)$ dans le système linéaire $|3\Theta|^*_-$.

Comme il existe un isomorphisme entre l'espace de modules $\mathcal{SU}_C(2)$ des fibrés vectoriels de rang 2 semi-stables à déterminant trivial avec $\mathbb{P}^3 \cong |2\Theta|$ ([NR69], théorème 7.2) nous avons aussi une application classifiant

$$\varphi : \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow |2\Theta|$$

qui envoie une extension (e) sur le diviseur

$$\theta(E_e) = \{\xi \in JC \ t.q. \ h^0(E_e \otimes \xi) \neq 0\}.$$

Le troisième résultat principal de la thèse est le suivant.

Théorème 3 *Soit C une courbe de genre 2 et $K^0 \subset |2\Theta|$ la surface de Kummer associée à JC. Soit $X \subset \mathbb{P}^3_{\omega+}$ la cubique gauche et soit $S \subset \mathbb{P}^4_\omega$ le cône au-dessus de la courbe X. Soit $\mathbb{P}^3_\mathcal{O}$ l'éclaté de $|2\Theta|$ à l'origine $\mathcal{O}$ et $Bl_S(\mathbb{P}^4_\omega)$ l'éclaté de $\mathbb{P}^4_\omega$ le long de S. Alors φ se résout en un morphisme*

$$\tilde{\varphi} : Bl_S(\mathbb{P}^4_\omega) \longrightarrow \mathbb{P}^3_\mathcal{O}$$

qui définit un fibré en coniques sur $\mathbb{P}^3_\mathcal{O}$ et dont le lieu discriminant est l'éclaté de la surface K^0 en $\mathcal{O}$.

D'abord nous démontrons que l'application φ définit un fibré en coniques en-dehors de l'origine $\mathcal{O}$ de la variété de Kummer $K^0 = JC/\imath \subset |2\Theta|$ et que le discriminant est la surface K^0 privée de l'origine. Ensuite nous remarquons que la fibre $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ est le cône S au-dessus de la cubique gauche

$$X \subset \mathbb{P}Sym^3 H^0(C,\omega) \cong \mathbb{P}^3_{\omega+}.$$

Donc on éclate $\mathbb{P}^4_\omega$ le long de S et $|2\Theta|$ en l'origine, puis un morphisme est défini

$$\tilde{\varphi} : Bl_S(\mathbb{P}^4) \longrightarrow \mathbb{P}^3_\mathcal{O}$$

qui étend φ et on prouve que la restriction de $\tilde{\varphi}$ aux diviseurs exceptionnels au-dessus de S et $\mathcal{O}$ est un fibré en coniques.

Comme ces fibrés en coniques sur $\mathbb{P}^3_\mathcal{O}$ sont parametrés par un espace projectif de dimension 15 qui ne dépend pas de la courbe C on obtient une application de modules

$$\begin{array}{rcl}\Xi : \{\text{courbes lisses de genre 2}\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{15} = \mathbb{P}B; \\ C & \mapsto & \tilde{\varphi}.\end{array}$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels

Plus de détails sur les résultats qui sont rappelés dans ce chapitre se trouve dans [LB92], [Mum66], [Mum74] et [Mum67b].

1.1.1 Variétés abéliennes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim g et $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ un réseau dans V. Une *polarisation* sur le tore complexe $A = V/\Lambda$ est par définition la première classe de Chern $H = c_1(L)$ d'un fibré en droites ample L sur A. Parfois le fibré en droites lui-même est considéré comme la polarisation. La polarisation H est une forme hermitienne sur V dont la forme alternée associée $E = ImH$ prend des valeurs entières sur Λ. Il existe une $\mathbb{Z}$-base $\lambda_1,\ldots,\lambda_g,\mu_1,\ldots,\mu_g$ de Λ par rapport à laquelle E est donnée par la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

où $D = diag(d_1,\ldots,d_g)$, avec d_ν des entiers positifs vérifiant $d_\nu | d_{\nu+1}$ avec $1 \leq \nu \leq g-1$. On appelle le vecteur $(d_1,\ldots,d_g)$ le *type de la polarisation*. Une polarisation est principale si elle est de type $(1,\ldots,1)$. Une *variété abélienne* est un tore complexe A qui admet une polarisation. Ainsi une variété abélienne principalement polarisée (v.a.p.p.) est un couple (A,L), où L est une polarisation principale. Le théorème de Riemann-Roch pour les variétés abéliennes dit que $h^0(A,\mathcal{O}_A(L)) = \prod_{i=1}^{g} d_i$.

1.2 Groupe de Heisenberg et groupe thêta

Soit (A,H) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On définit une involution $\imath$ sur A de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \imath : A &\longrightarrow A; \\ x &\mapsto -x. \end{aligned}$$

Définition 1 *Soit (A,H) une v.a.p.p. et L un fibré en droites sur A. On dit que L est symétrique si $\imath^*L \cong L$.*

Soit L un fibré en droites symétrique sur A représentant la polarisation H. Soit $t_\eta : x \mapsto x + \eta$ la translation par η sur A et $n \neq 0$ un naturel. Le *groupe thêta de L* de niveau n est le groupe

$$\mathcal{G}(L^n) = \{(\varphi,\eta) | \eta \in A, \varphi : t_\eta^*(L^n) \xrightarrow{\sim} (L^n)\}$$

avec l'operation de groupe donnée par:

$$(\varphi,\eta) \cdot (\varphi',\eta') = (t_{\eta'}^* \varphi \circ \varphi', \eta + \eta')$$

Définition 2 *Soit $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ un naturel. On appelle $A[n]$ le groupe des points de n-torsion. Soit*

$$\begin{aligned} \mu_n : A &\longrightarrow A; \\ x &\mapsto nx. \end{aligned}$$

l'application de multiplication par n. Nous avons $A[n] = Ker(\mu_n)$.

Nous avons l'extension centrale de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{i} \mathcal{G}(L^n) \xrightarrow{p} A[n] \longrightarrow 0,$$

où $i(\alpha)$ est l'automorphisme de L^n donné par la multiplication par α et $p(\varphi,\eta) = \eta$. Le commutateur $[(\varphi,\eta),(\varphi',\eta')]$ de deux éléments dans $\mathcal{G}(L^n)$ appartient au centre, et induit la *forme de Weil*

$$e^L : A[n] \times A[n] \to \mathbb{C}^*$$

en prenant des relèvements. On prouve que cela ne dépend pas du choix du relèvement.
En tant que groupe abstrait $\mathcal{G}(L^n)$ est isomorphe au groupe de Heisenberg

$$\mathcal{H}_g(n) := \mathbb{C}^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \times (\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^g \cong \mathbb{C}^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g},$$

où

$$(\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^g := Hom((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g, \mathbb{C}^*),$$

avec la loi de groupe

$$(t,x,x^*)\cdot(s,y,y^*) = (st(y^*(x)),x+y,x^*+y^*),$$

où ω est un racine n-ème de l'unité. Nous noterons d'autre part

$$\langle (x,x^*),(y,y^*)\rangle := y^*(x) - x^*(y)$$

la forme bilinéaire standard sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \times (\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^g$. La projection $(t,x,x^*) \mapsto (x,x^*)$ définit une extension centrale de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{H}_g(n) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \longrightarrow 0.$$

Définition 3 *Une structure thêta de niveau n pour L est un isomorphisme*

$$\alpha : \mathcal{H}_g(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(L^n)$$

dont la restriction aux centres est l'identité.

Par projection sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, une structure thêta α (de niveau n) induit un isomorphisme

$$\tilde{\alpha} : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \xrightarrow{\sim} A[n]$$

de telle manière que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{G}(L^n) & \longrightarrow & A[n] & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow \alpha & & \uparrow \tilde{\alpha} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{H}_g(n) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, l'isomorphisme $\tilde{\alpha}$ est un isomorphisme symplectique par rapport aux formes bilinéaires e^L et $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

Définition 4 *On appelle structure de niveau 3 un isomorphisme symplectique* $\tilde{\alpha} : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{2g} \to A[3]$.

Le groupe $\mathcal{G}(L^n)$ a une représentation irréductible naturelle dans l'espace $V_A := H^0(A,L^n)$ donnée par

$$((\varphi,\eta)s)(a) = \varphi_a(s(a+\eta)),$$

où $a \in A$, $s \in V_A$ et

$$\varphi_a : t_\eta^*(L^n)_a \cong (L^n)_{a+\eta} \to (L^n)_a.$$

D'autre part, si on note $V_g(n)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de fonctions sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$ à valeurs complexes, le groupe $\mathcal{H}_g(n)$ agit linéairement sur $V_g(n)$ par une représentation irréductible U appelée représentation de Schrödinger. Elle est définie comme suit, pour $v \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^g$ et $f \in V_g(3)$:

$$\begin{array}{lrcl} (1.1) & U : \mathcal{H}_g(n) & \longrightarrow & GL(V_g(n)) \\ & (t,x,x^*) & \mapsto & [((t,x,x^*)f)(v) \mapsto tx^*(v-x)f(v-x)], \\ (1.2) & & & \end{array}$$

Proposition 1 *([Mum66], Prop. 3)*
Le groupe $\mathcal{H}_g(n)$ a une unique representation irréductible $V_g(n)$ dans laquelle $\mathbb{C}^*$ agit par son caractère naturel. De plus, si V est une autre representation de $\mathcal{H}_g(n)$ dans laquelle $\mathbb{C}^*$ agit de cette manière, alors V est isomorphe à la somme directe de r copies de $V_g(n)$ quel que soit $r \in \mathbb{N}$.

Cela implique donc qu'il existe un isomorphisme de représentations linéaires irréductibles

$$\psi_\alpha : V_g(n) \to V_A.$$

Par le lemme de Schur un tel isomorphisme est unique à scalaire près, ce qui entraîne une identification

$$\mathbb{P}(V_A) \cong \mathbb{P}(V_g(n)).$$

Nous considérons le sous-groupe de $\mathcal{H}_g(n)$

$$\mathcal{H}[n] := \{(t,x,x^*) \in \mathcal{H}_g(n) | t^n = 1\}.$$

C'est une extension centrale non triviale

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathcal{H}[n] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \longrightarrow 0,$$

où μ_n est le groupe des racines n-èmes de l'unité. Par restriction, $V_g(n)$ est une représentation linéaire de $\mathcal{H}[n]$. Pour chaque $v \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$, soit $\delta_v \in V_g(n)$ la fonction caractéristique

$$\delta_v = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq v, \\ 1 & \text{si } x = v. \end{cases}$$

Nous obtenons

$$(t,x,x^*)\delta_v = tx^*(v-x)\delta_{v-x},$$

pour tout $(t,x,x^*) \in \mathcal{H}[n]$. Après avoir fixé un ordre dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$, nous obtenons une base canonique $\{\delta_v\}_{v\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g}$ de $V_g(n)$. L'image de cette base par l'isomorphisme ψ_α correspond [Mum66] à la base des fonctions thêta

$$\left\{ X_b := \theta \begin{bmatrix} b/n \\ 0 \end{bmatrix} (nz,n\tau), \;\; b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g, \;\; z \in \mathbb{C}^g \right\}$$

de l'espace V_A, avec $\tau \in \mathbb{H}_g$ fixé. Nous considérons $\varphi = \varphi_\tau : A \to \mathbb{P}(V_A^*)$ l'application définie par

$$z \mapsto (\dots, X_b(z), \dots)$$

correspondant au système linéaire $|L^n|$. Soit φ_α la composée des applications

$$\varphi_\alpha : A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(V_A^*) \xrightarrow{{}^t\psi_\alpha} \mathbb{P}(V(g)^*).$$

Nous observons que le groupe $A[n] = \mathcal{G}/\mathbb{C}^*$ agit par translations sur A et le groupe suivant

$$\mathcal{H}[n]/\mu_n = \mathcal{H}_g(n)/\mathbb{C}^* = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

agit sur $\mathbb{P}(V_g(n)^*)$ par le projectivisé de la représentation duale de $\mathcal{H}[n]$ sur $V_g(n)^*$. Ces actions sont compatibles car elles vérifient la relation

$$\varphi_\alpha(a+\eta) = \tilde{\alpha}^{-1}(\eta) \cdot [\varphi_\alpha(a)], \ \ \forall \eta \in A[n], a \in A.$$

Explicitement l'action de $\mathcal{H}[n]$ sur la base $\{X_b\}$ est donnée par

$$(t,x,x^*)X_b = tx^*(b-x)X_{b-x},$$

pour tout $(t,x,x^*) \in \mathcal{H}[n]$ et $b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$.

1.3 Thêta Caractéristiques

Soit A une variété abélienne principalement polarisée de dimension g.
Le commutateur $[(\varphi,\eta),(\varphi',\eta')]$ de deux éléments dans $\mathcal{G}(L^2)$ appartient au centre, et induit la *forme de Weyl*

$$\langle\ ,\ \rangle : A[2] \times A[2] \longrightarrow \{\pm 1\}$$

en prenant des relèvements. Deux relèvements différents donnent le même commutateur.
Soit $T(A)$ le $A[2]$-torseur des diviseurs Θ symétriques qui représentent la polarisation. Le fibré en droites $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ ne dépend pas de $\Theta \in T(A)$.
Une thêta caractéristique est une forme quadratique $\kappa : A[2] \to \{\pm 1\}$ associée à $\langle\ ,\ \rangle$, c'est à dire:

$$\kappa(x+y)\kappa(x)\kappa(y) = \langle x,y \rangle, \ \ \text{pour } x,y \in A[2].$$

L'ensemble des thêta caractéristiques, notées $\vartheta(A)$, est un $A[2]$-torseur par rapport à l'action $\kappa \mapsto x \cdot \kappa$, $x \in A[2]$, où

$$x \cdot \kappa(y) = \langle x,y \rangle \kappa(y) \ \ \text{pour } x \in A[2].$$

Il existe une identification canonique de $A[2]$-torseurs:

$$T(A) \xrightarrow{\sim} \vartheta(A). \tag{1.3}$$

Elle envoie Θ sur κ_Θ, définie par $\kappa_\Theta(x) = (-1)^{mult_x(\Theta)+mult_0(\Theta)}$. La fonction

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : \vartheta(A) & = & T(A) \to \{\pm 1\} \\ \Theta & \mapsto & (-1)^{mult_0(\Theta)} \end{array}$$

est appelée *parité* et elle a la propriété que $\kappa \in \vartheta(A)$ prenne la valeur $+1$ (respectivement -1) en $2^{g-1}(2^g + \varepsilon(\kappa))$ points (resp. $2^{g-1}(2^g - \varepsilon(\kappa))$. Elle satisfait la relation:

$$\varepsilon(x \cdot \kappa) = \kappa(x)\varepsilon(\kappa). \tag{1.4}$$

En outre nous écrirons $\vartheta^+(A)$ et $\vartheta^-(A)$ pour les ensembles $\varepsilon^{-1}(\pm 1)$ des thêta caractéristiques *pairs* et *impairs*.

Remarque 1 *Si on suppose que $A = J(C)$ est la variété Jacobienne d'une courbe C et on appelle $\vartheta(C) \subset J^{g-1}(C)$ l'ensemble des thêta caractéristiques de C, c'est à dire les fibrés en droites L t.q. $L^2 = K_C$. Alors $\vartheta(C) \cong \vartheta(J(C)) \cong T(J(C))$ en tant que $J[2]$-torseurs par:*

$$L \mapsto \Theta_L := \{M \in J(C) | H^0(L \otimes M) \neq 0\};$$

et, par le théorème de singularité de Riemann, ε est la fonction de parité suivante.

$$\begin{array}{rcl} \vartheta(C) & \longrightarrow & \{\pm 1\}; \\ L & \mapsto & h^0(C,L) \ mod\ 2. \end{array}$$

Toute thêta-caractéristique $\kappa = \kappa_\Theta \in \vartheta(A)$ peut être utilisée pour identifier, par l'action de $A[2]$:

$$\begin{array}{rcl} A[2] & \xrightarrow{\sim} & \vartheta(A), \\ x & \mapsto & x \cdot \kappa_\Theta. \end{array} \tag{1.5}$$

1.4 Formes quadratiques sur un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel

Beaucoup de résultats de la théorie des thêta caractéristiques sont des cas particuliers de certains Théorèmes sur les formes quadratiques sur un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel.

Soit $k = \mathbb{F}_2$. Soit V un espace vectoriel de dimension $2g$ sur k. Une forme anti-symétrique non dégénérée $\langle \ , \ \rangle : V \otimes V \to k$ est fixée. Donc $\langle v,v \rangle = 0$ pour tout $v \in V$, et l'application $v \mapsto f_v(u) = \langle u,v \rangle$ donne un isomorphisme de V vers son espace duale $Hom(V,k)$. L'espace symplectique $(V,\langle \ , \ \rangle)$ est déterminé uniquement à isomorphisme près par sa dimension $2g$. Soit $Sp(V)$ le groupe de tout isomorphismes k-linéaires $T : V \to V$ qui satisfont $\langle Tv,Tu \rangle = \langle v,u \rangle$ pour tout $v,u \in V$. Le groupe $Sp(V)$ est engendré par les transvections:

$$T_u(V) = v + \langle v,u \rangle u \tag{1.6}$$

où $u \neq 0$ dans V, et celles-la forment une classe de conjugaison d'involutions dans $Sp(V)$. L'ordre du groupe fini $Sp(V)$ est égal à $2^{g^2}(2^{2g} - 1)(2^{2g-2} - 1)\ldots(2^2 - 1)$ [Art57]. Un sous-espace $X \subset V$ est isotrope si $\langle x,x' \rangle = 0$ pour tout $x,x' \in X$. Les espaces isotropes maximals ont tous dimension g, et ils peuvent être complétés en une décomposition isotrope de V:

$$V = X \oplus Y \tag{1.7}$$

avec X et Y isotropes de dimension g. La forme $\langle \ , \ \rangle$ sur V induit un isomorphisme

$$X \xrightarrow{\sim} Y^*$$

Si $\langle e_1, \ldots ,e_g \rangle$ est une base pour X et $\langle f_1, \ldots ,f_g \rangle$ est la base duale de Y, les vecteurs $\langle e_1, \ldots ,e_g; f_1, \ldots ,f_g \rangle$ donnent une base symplectique pour V.
Une fonction $q : V \to k$ est dite une forme quadratique sur V relative a la forme symplectique fixé $\langle , \rangle$ si

$$q(v + u) + q(v) + q(u) = \langle v,u \rangle$$

pour tout $v,u \in V$. Si $V = X \oplus Y$ est une décomposition isotropique, la fonction

$$q_0(x + y) = \langle x,y \rangle \tag{1.8}$$

définit une forme quadratique sur V. En termes d'une base symplectique on a

$$q_0\left(\sum_{i=1}^{g}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{g}\beta_i f_i\right)=\sum_{i=1}^{g}\alpha_i\beta_i.$$

Soit QV l'ensemble des formes quadratiques sur V relatives à $\langle,\rangle$. Alors QV est un torseur sous V: si $q\in QV$ et $v\in V$ nous définissons la forme quadratique $q+v$ par

$$[q+v](u)=q(u)+\langle v,u\rangle.$$

De plus, si q et q' sont deux éléments de QV il existe un unique vecteur $v=q+q'$ t.q.

$$\langle v,u\rangle=q(u)+q'(u).$$

Cela donne une structure de k-espace vectoriel de dimension $2g+1$ à $W=V\cup QV$. Il contient V en tant que sous-espace de codimension 1. Le groupe $Sp(V)$ agit sur l'ensemble QV par la formule $q\mapsto Tq$, où

$$Tq(Tv)=q(v).$$

Cela définit une action linéaire de $Sp(V)$ sur W. Nous avons alors une suite exacte de $Sp(V)$-modules

$$0\longrightarrow V\longrightarrow W\longrightarrow k\longrightarrow 0. \tag{1.9}$$

Nous définissons *l'invariant de Arf* $a:QV\to k$ de la manière suivante. Soit $\langle e_1,\ldots e_g;f_1,\ldots,f_g\rangle$ une base symplectique de V. Pour $q\in QV$, nous posons

$$a(q)=\sum q(e_i)q(f_i).$$

On prouve de plus que cela ne dépend pas de la base symplectique choisie. Nous avons en effet la Proposition suivante.

Proposition 2 *[Art57] L'invariant de Arf $a(q)$ ne dépend pas de la base symplectique. Si q est défini par une décomposition isotrope, comme dans l'équation 1.8, alors $a(q)=0$. On a aussi les formules suivantes:*

$$a(Tq)=a(q)\qquad T\in Sp(V),$$

$$a(q+v)=a(q)+q(v)\qquad v\in V.$$

Le groupe $Sp(V)$ a deux orbites sur QV, les $2^{g-1}(2^g+1)$ formes pairs q avec $a(q)=0$, et les $2^{g-1}(2^g-1)$ formes impairs q avec $a(q)=1$.

Cela implique les deux Corollaires suivants.

Corollaire 1 *Pour $q \in QV$, les conditions suivantes sont toutes équivalentes*

1. *$a(q)$=0.*
2. *la forme q a $2^{g-1}(2^g+1)$ zéros sur V.*
3. *Il existe une décomposition isotropique $V = X \oplus Y$ t.q. q=0 sur les sous-espaces X et Y.*

Corollaire 2 *L'ordre du sous-groupe stabilisateur $O(V,q) \subset Sp(V)$ d'une forme $q \in QV$ est égal à*

$$2^{g^2-g+1}(2^{2g-2}-1)(2^{2g-4}-1)\dots(2^2-1)(2^g-1) \quad si\ a(q)=0,$$

$$2^{g^2-g+1}(2^{2g-2}-1)(2^{2g-4}-1)\dots(2^2-1)(2^g+1) \quad si\ a(q)=1.$$

La transvection T_u appartient à $O(V,q)$ si $q(u)=1$.

Chapitre 2

L'espace de modules $\mathcal{A}_2(3)^-$

2.1 L'involution $\imath = -Id$

Soit maintenant (A,L) une variété abélienne avec un fibré en droites qui induit une polarisation principale; nous considérons l'action de l'involution $\imath = -Id$ sur A.

Proposition 3 *([LB92], page 90)*
Dans la classe d'équivalence algébrique d'un fibré en droites L sur un variété abélienne de dimension g, il existe 2^{2g} fibrés en droites symétriques.

Définition 5 *Si L est un fibré en droites symétrique, un isomorphisme*

$$\phi : L \xrightarrow{\sim} \imath^* L$$

est dit une linéarisation de $\imath$.

Soit x un point de A et L un fibré en droites, alors L_x indique la fibre de L au-dessus de x.
Si ϕ est une linéarisation de $\imath$, alors pour tout point fermé $x \in A$ on a un isomorphisme

$$\phi_x : L_x \xrightarrow{\sim} \imath^* L_x = L_{-x}.$$

Remarque 2

- *Si y est un point de 2-torsion, alors $y = -y$, donc ϕ_y est un automorphisme de L_y.*
- *Nous pouvons toujours normaliser ϕ de manière unique en demandant que ϕ_0 soit l'identité sur la fibre L_0 au-dessus du 0.*

Définition 6 *L'isomorphisme ϕ est appelé isomorphisme normalisé de L et $\imath^* L$ si $\phi_0 = Id_{L_0}$.*

D'après l'identification (1.5), on a

$$\phi(\imath^*\theta_\kappa) = \varepsilon(\Theta_\kappa)\theta_\kappa.$$

Définition 7 *Soit $\phi : L \to \imath^* L$ l'isomorphisme normalisé. Soit $x \in A$ un point d'ordre 2. On définit $e_*^L(x)$ comme le scalaire α tel que*

$$\phi_x : L_x \xrightarrow{\sim} (\imath^* L)_x = L_{\imath(x)} = L_x$$

est la multiplication par α.

Propriétés 1 *([Mum66], page 304)*

1. $e_*^L(x) = \pm 1$, $e_*^L(0) = +1$;
2. $e_*^{L\otimes M}(x) = e_*^L(x) \cdot e_*^M(x)$;
3. *si $\varphi : A \to B$ est un isomorphisme, et L est un faisceau inversible symétrique sur Y, alors*

$$e_*^{\varphi^* L}(x) = e_*^L(\varphi(x))$$

pour tous $x \in A$ d'ordre 2;

4. *Soit $\hat{A}$ la variété duale de A et soit*

$$e_2 : X \times \hat{X} \to \{\pm 1\}$$

la forme bilinéaire canonique. Si $x \in A[2]$, et $\alpha \in \hat{A}[2]$, et si α correspond à un fibré en droites L d'ordre 2 sur X, alors L est symétrique et

$$e_*^L(x) = e_2(x,\alpha).$$

De plus

Proposition 4 *Soit L un fibré en droites symétrique, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} A[2] & \longrightarrow & \{\pm 1\}; \\ x & \mapsto & e_*^L(x) \end{array}$$

est une forme quadratique sur $A[2]$ et, si $\kappa \in \vartheta(A)$ alors $e_*^{\mathcal{O}(\Theta_\kappa)}$ est la forme quadratique κ. On dira souvent qu'un fibré en droites est pair (résp. impair) si la forme quadratique induite sur $A[2]$ est pair (résp.impair).

L'isomorphisme normalisé induit donc une involution linéaire

$$\imath^\# : H^0(A,L^n) \to H^0(A,L^n)$$

sur les espaces des sections globales de L^n définis de la manière suivante. Soit $s \in H^0(A,L^n)$, alors

$$\imath^{\#}(s) = \imath^*(\phi^n(s)),$$

où ϕ est toujours l'isomorphisme normalisé et ϕ^n est l'isomorphisme naturel entre les puissances

$$\phi^n : L^n \xrightarrow{\sim} \imath^* L^n.$$

Afin de construire l'espace de modules qui nous interesse, il est important de pouvoir calculer les dimensions des espaces propres $H^0(A,L)_+$ et $H^0(A,L)_-$ de manière intrinsèque. En effet la formule des pointes fixes de Atiyah-Bott-Lefschetz ([GH78], page 421) est utilisée. En sachant que les points fixes de $\imath$ sont les points de 2-torsion $\beta \in A[2]$, nous pouvons alors écrire:

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^j Tr(i^{\#} : H^j(A,L)) = \sum_{\beta \in A[2]} \frac{Tr(i : L_\beta \to L_\beta)}{det(Id - (di)_\beta)}. \tag{2.1}$$

Or $(di) = -Id$ donc $det(2Id) = 2^g$.

Donc si le fibré L induit une forme quadratique pair, d'après les résultats de la section 1.3, nous trouvons

$$\sum_{\beta \in A[2]} Tr(i : L_\beta \to L_\beta) = 2^{g-1}(2^g + 1) - 2^{g-1}(2^g - 1) = 2^g.$$

Si en revanche le fibré considéré est impair, alors

$$\sum_{\beta \in A[2]} Tr(i : L_\beta \to L_\beta) = 2^{g-1}(2^g - 1) - 2^{g-1}(2^g + 1) = -2^g.$$

D'autre part, comme L représente une polarisation principale, $h^p(A,L) = 0$ pour $p > 0$ et donc, par définition de $H^0(L)_+$ et $H^0(L)_-$,

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^j Tr(\imath^{\#} : H^j(X,L)) = h^0(L)_+ - h^0(L)_-.$$

En développant la formule (2.1) et en rappelant que L est une polarisation principale, on trouve, pour une polarisation L associée à une thêta caractéristique pair:

$$h^0(A,L) = h^0(L)_+ + h^0(L)_- = 1,$$
$$Tr(\imath^{\sharp}, H^0(A,L)) = h^0(L)_+ - h^0(L)_- = 1.$$

Ce qui implique $h^0(L)_+ = 1$ et $h^0(L)_- = 0$. En revanche pour L pair nous obtenons:

$$h^0(L)_+ + h^0(L)_- = 1,$$
$$h^0(L)_+ - h^0(L)_- = -1.$$

Donc $h^0(L)_+ = 0$ et $h^0(L)_- = 1$. Si par contre nous considérons le fibré symétrique L^n, alors $e_*^{L^n}(x) = e_*^L(x)^n$. Par consequent, si n est pair, la parité de la polarisation n'intervient pas dans le calcul de $h^0(A,L)_\pm$, et on trouve

$$h^0(L^n)_+ + h^0(L^n)_- = n^g,$$
$$h^0(L^n)_+ - h^0(L^n)_- = 2^g;$$

d'où:

$$h^0(L^n)_+ = (n^g + 2^g)/2,$$
$$h^0(L^n)_- = (n^g - 2^g)/2.$$

Si au contraire n est impair il faut encore distinguer la parité de la polarization: si elle est pair:

$$h^0(L^n)_+ + h^0(L^n)_- = n^g,$$
$$h^0(L^n)_+ - h^0(L^n)_- = 1,$$

et $h^0(L^n)_\pm = (n^g \pm 1)/2$. Si elle est impair $h^0(L^n)_+ - h^0(L^n)_- = -1$ et les dimensions des espace propres s'échangent. Ces formules, obtenues d'une autre manière, apparaissent aussi dans [LB92].
Donc, étant donné un isomorphisme normalisé, on a trouvé que $\imath$ agit sur $H^0(A,L^n)$ par sa linéarisation $\imath^\#$ en décomposant

$$H^0(A,L^n) = H^0(A,L^n)_+ \oplus H^0(A,L^n)_-$$

de manière différente selon le fibré symétrique choisi.

Dans le cas où n est impair, il faut distinguer la parité du fibré symétrique définissant la polarisation. Or, la situation est la suivante (**BL** indiquera le lieu de base):

Proposition 5 *Soit A une variété abélienne de dimension g, n un entier positif et L un fibré en droites symétrique sur A t.q. $h^0(A,L) = 1$. Le groupe des 2^{2g} points de 2-torsion se décompose en deux sous-ensembles*

$$S_+ := \{x \in A[2] \ t.q. \ e_*^L(x) = 1\},$$
$$S_- := \{x \in A[2] \ t.q. \ e_*^L(x) = -1\}.$$

Si n est impair alors, selon la parité de L, nous trouvons

L pair:

1. $\#(S_+) = 2^{g-1}(2^g+1)$ *et* $\#(S_-) = 2^{g-1}(2^g-1)$;
2. $h^0(A,L^n)_+ = (n^g+1)/2$ *et* $h^0(A,L^n)_- = (n^g-1)/2$.

L impair:

1. $\#(S_-) = 2^{g-1}(2^g+1)$ *et* $\#(S_+) = 2^{g-1}(2^g-1)$;
2. $h^0(A,L^n)_+ = (n^g-1)/2$ *et* $h^0(A,L^n)_- = (n^g+1)/2$.

Pour tout n, nous avons

$$\boldsymbol{BL}(|L^n|_+) = S_-,$$
$$\boldsymbol{BL}(|L^n|_-) = S_+$$

et l'origine $0 \in S_+$.
Si n est pair, alors

$$h^0(A,L^n)_+ = (n^g+2^g)/2, \;\; h^0(A,L^n)_- = (n^g-2^g)/2.$$

De plus $\boldsymbol{BL}(|L^n|_+) = \emptyset$ et $\boldsymbol{BL}(|L^n|_-) = A[2]$.

Démonstration: D'abord nous remarquons que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$\mathbf{BL}(|L^n|_+) \cup \mathbf{BL}(|L^n|_-) = A[2].$$

En effet par le Théorème de Lefschetz nous avons un plongement

$$A \hookrightarrow |L^n|^*.$$

Si nous projetons avec centre $|L^n|^*_-$

$$\rho_+ : |L^n|^* \dashrightarrow |L^n|^*_+$$

alors la projection ρ_+ n'est pas définie sur

$$A \cap |L^n|^*_- = \mathbf{BL}|L^n|^*_+.$$

En changeant les espace propres dans cette construction on obtient

$$A \cap |L^n|^*_+ = \mathbf{BL}|L^n|^*_-.$$

Comme

$$\{A \cap |L^n|^*_+\} \cup \{A \cap |L^n|^*_-\} = A[2],$$

la remarque en suit.

Soit n impair. Comme l'isomorphisme normalisé a été utilisé comme linéarisation, l'assertion à propos de l'origine est vraie par définition. Il reste à prouver l'assertion sur le lieu de base. Nous rapellons que, si $x \in A[2]$, $e_*^L(x)$ est le scalaire α t.q. $\phi(x) : L_{\imath(x)} \cong L_x \to L_x$ est la multiplication par α. Donc, étant donnée une section invariante $\varphi \in H^0(A,L^n)_+$ et $y \in S_-$, on a

$$\varphi(y) = (\imath^\#(\varphi))(y) = -\varphi(y),$$

donc $\varphi(y) = 0$. Cela implique que toutes les sections invariantes doivent s'annuler aux points de S_-. Comme notre linéarisation agit comme l'identité sur les fibres au-dessus des points de S_+, le même argument prouve que toutes les sections anti-invariantes s'annulent aux points de S_+.

Si n est pair, nous pouvons écrire $n = 2k$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Nous rappelons que le système linéaire $|L^2|$ est sans points de base et que toutes les sections de $H^0(A,L^2)$ sont invariantes. Soit maintenant

$$\mu : Sym^k(H^0(A,L^2)) \longrightarrow H^0(A,L^{2k})$$

l'application de restriction. Alors l'image de μ est un sous-espace de $H^0(A,L^{2k})$ sans point de base. Cela entraîne que le système linéaire complet est sans point de base. Nous rappelons en outre que, pour $y \in A[2]$,

$$e_*^{L^2k}(y) = e_*^L(y)^{2k}.$$

Donc $e_*^{L^2k}(z) = 1$ pour tout $z \in A[2]$. Cela implique, en utilisant un argument identique à celui utilisé dans le cas n impair, que toutes sections $\varphi \in H^0(A,L^{2k})_-$ s'annulent en les points de 2-torsion. $\square$

2.2 Les Automorphismes du groupe de Heisenberg

Dans toute cette section n sera un entier impair, $n \neq 1$. Nous sommes maintenant interessé par le sous-groupe suivant des automorphismes du groupe de Heisenberg de niveau n

$$A(\mathcal{H}_g(n)) := \{\phi \in Aut(\mathcal{H}_g(n)) : \phi((t,0,0)) = (t,0,0)\}.$$

Les éléments de $A(\mathcal{H}_g(n))$ sont les automorphismes de $\mathcal{H}_g(n)$ qui sont égaux à l'identité une fois qu'on se restreint au centre de $\mathcal{H}_g(n)$.

2.2.1 Relèvements de $\imath$

Soit $t_a : x \mapsto x + a$ la translation de vecteur a sur A.

Définition 8 *([Mum66], page 308)*

Soit (A,H) une vapp et L un fibré en droites symétrique qui représente H. De plus soit $\phi : L \xrightarrow{\sim} \imath^* L$ l'isomorphisme normalisé. Si

$$(x,\rho : L^n \xrightarrow{\sim} t_x^* L^n) \in \mathcal{G}(L^n),$$

nous considérons la composition suivante:

$$L \xrightarrow{\phi^n} \imath^* L^n \xrightarrow{\imath^*(\rho)} \imath^* t_x^* L^n = t_{-x}^* \imath^* L^n \xleftarrow{t_{-x}^* \phi^n} t_{-x}^* L^n$$

et définissons

$$\delta_{-1}((x,\rho)) = (-x,(t_{-x}^* \phi^n)^{-1} \circ \imath^* \rho \circ \phi^n)$$

On vérifie que δ_{-1} est un automorphisme de $\mathcal{G}(L^n)$ qui se décompose de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathcal{G}(L^n) & \rightarrow & A[n] & \rightarrow 0 \\ & & Id \downarrow & & \delta_{-1} \downarrow & & \imath \downarrow & \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathcal{G}(L^n) & \rightarrow & A[n] & \rightarrow 0 \end{array}.$$

En particulier, c'est l'unique relèvement de $\imath$ au groupe $\mathcal{G}(L^n)$ qui soit une involution, c'est à dire: $\delta_{-1} \circ \delta_{-1}$ est l'identité. Si on appelle

$$\gamma : \mathcal{G}(L^n) \rightarrow GL(H^0(A,L^n))$$

la représentation naturelle du groupe thêta , cela entraîne que, à une constante près, le diagramme suivant commute, pour tout $g \in \mathcal{G}(L^n)$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(L^n) & \xrightarrow{\gamma(g)} & H^0(L^n) \\ \imath^{\#} \downarrow & & \downarrow \imath^{\#} \\ H^0(L^n) & \xrightarrow{\gamma(\delta_{-1}(g))} & H^0(L^n) \end{array}$$

De manière analogue nous pouvons travailler sur le groupe de Heisenberg. Nous pouvons en effet nous donner une involution:

$$\begin{array}{rcl} D_{-1} : \mathcal{H}_g(n) & \longrightarrow & \mathcal{H}_g(n), \\ (t,x,x^*) & \mapsto & (t,-x,-x^*), \end{array}$$

qui se décompose comme suit:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathcal{H}_g(n) & \rightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g & \rightarrow 0 \\ & & Id \downarrow & & \alpha \downarrow & & -Id \downarrow & \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathcal{H}_g(n) & \rightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g & \rightarrow 0 \end{array}.$$

Lemme 1 *L'involution D_{-1} est un élément de $A(\mathcal{H}_g(n))$.*

Démonstration: Soient $u := (t,x,x^*), v := (s,y,y^*) \in \mathcal{H}_g(n)$. Alors nous avons

$$D_{-1}(u \cdot v) = D_{-1}(ts\omega^{(y^*(x))}, -x-y, -x^*-y^*) =$$
$$= (t, -x, -x^*) \cdot (s, -y, -y^*) = D_{-1}(u) \cdot D_{-1}(v).$$

D'autre part on a

$$D_{-1}(t,0,0) = (t,0,0),$$

d'où l'énoncé.□

Soit maintenant

$$V_g(n) = Hom((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g, \mathbb{C}).$$

On a vu dans la Proposition 1 qu'il existe une unique représentation irréductible de $\mathcal{H}_g(n)$ où $\mathbb{C}^*$ agit par homotétie sur $V_g(n)$, appelée la représentation de Schrödinger U. Nous remarquons aussi que si $\varphi \in A(\mathcal{H}_g(n))$ alors $U \circ \varphi$ est aussi une représentation de niveau 1, donc par le lemme de Schur il existe une unique (à un scalaire prés) application linéaire

$$T_\varphi : V_g(n) \to V_g(n), \ \ t.q. \ \ T_\varphi(U(h)) = U(\varphi(h)),$$

pour tout $h \in \mathcal{H}_g(n)$. Nous obtenons donc une représentation projective

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : A(\mathcal{H}_g(n)) &\to PGL(V_g(n)), \\ \varphi &\mapsto T_\varphi \bmod \mathbb{C}^*. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Une base canonique de $V_g(n)$ est maintenant donnée par les fonctions delta:

$$\begin{aligned} X_\sigma : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{C}, \\ X_\sigma(\sigma) = 1,& \\ X_\sigma(\alpha) = 0 \quad & si \quad \alpha \neq \sigma. \end{aligned}$$

Nous remarquons en outre que $D_{-1} \in \mathcal{H}_g(n)$. Alors l'involution $j = \widetilde{T}(D_{-1})$ est définie, à un scalaire près, comme suit:

$$\begin{aligned} j : V_g(n) &\to V_g(n), \\ j(X_\sigma) &\mapsto X_{-\sigma}. \end{aligned}$$

Donc le diagramme suivant commute, $\forall h \in \mathcal{H}_g(n)$

$$\begin{array}{ccc} V_g(n) & \stackrel{U(h)}{\to} & V_g(n) \\ j\downarrow & & \downarrow j \\ V_g(n) & \stackrel{\rho(D_{-1}(h))}{\to} & V_g(n) \end{array}$$

Cette action décompose $V_g(n)$ en deux espaces propres $V_{g+}(n) \oplus V_{g-}(n)$. En effet une thêta structure α qui fait commuter le diagramme suivant permettrait d'avoir des bases canoniques des espaces propres de $H^0(A,n\Theta)$ par rapport à $\imath^{\#}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(L^n) & \stackrel{\delta_{-1}}{\to} & \mathcal{G}(L^n) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha \\ \mathcal{H}_g(n) & \stackrel{D_{-1}}{\to} & \mathcal{H}_g(n) \end{array} \tag{2.3}$$

Définition 9 *([Mum66], page 317) Une structure thêta $\alpha : \mathcal{G}(L^n) \to \mathcal{H}_g(n)$ qui fait commuter le diagramme (2.3) est appelée symétrique.*

2.2.2 Automorphismes d'une structure thêta symétrique

Si α et $\beta : \mathcal{G}(L^n) \to \mathcal{H}_g(n)$ sont deux structures thêta, alors $\alpha \circ \beta^{-1} \in A(\mathcal{H}_g(n))$. Supposons maintenant que α et β sont des structures thêta symétriques. Alors les automorphismes dans $A(\mathcal{H}_g(n))$ qui préservent les structures symétriques, c'est à dire les

$$\phi \in A(\mathcal{H}_g(n)) \ t.q.\ \alpha \circ \beta^{-1} = \phi,$$

forment d'un sous-groupe de $A(\mathcal{H}_g(n))$. En effet ϕ, étant la composition de deux structure thêta symétriques, doit commuter à l'automorphisme D_{-1}. Il s'agit donc d'étudier les $\phi \in A(\mathcal{H}_g(n))$ t.q.

$$\phi^{-1} \circ D_{-1} \circ \phi = D_{-1}.$$

Les éléments de $A(\mathcal{H}_g(n))$ qui vérifient cette égalité forment un sous-groupe: le sous-groupe normalisateur

$$C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1}) \subset A(\mathcal{H}_g(n)).$$

Proposition 6 *Nous obtenons la suite exacte ci-dessous*

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g} \to A(\mathcal{H}_g(n)) \stackrel{G}{\to} Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0 \tag{2.4}$$

Démonstration: Soit $u := (x,x^*),v := (y,y^*) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$. Nous avons donc, pour $\phi \in A(\mathcal{H}_g(n))$ et $(t,x,x^*) \in \mathcal{H}_g(n)$:

$$\phi(t,x,x^*) = \phi(t,0,0)\phi(1,x,x^*) = (t,0,0) \cdot \phi(1,x,x^*),$$

et

$$\phi(t,x,x^*) = (f_\phi(x,x^*)t,G_\phi(x,x^*)), \tag{2.5}$$

pour un automorphisme

$$G_\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g}$$

et une fonction

$$f_\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{C}^*.$$

De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} G : A(\mathcal{H}_g(n)) & \to & Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g}), \\ \phi & \mapsto & G_\phi \end{array}$$

est un homomorphisme. Si $G_\phi = Id$ alors la condition que ϕ soit un automorphisme se traduit par le fait que f_ϕ est un homomorphisme. En effet, si ω est une racine primitive n-ième de l'unité, alors

$$(f_\phi(x,x^*)f_\phi(y,y^*)st\omega^{x\cdot y^*},x+y,x^*+y^*) = (f_\phi(x,x^*)t,x,x^*)(f_\phi(y,y^*)s,y,y^*) =$$
$$\phi(t,x,x^*)\phi(s,y,y^*) = \phi((t,x,x^*)(s,y,y^*)) =$$
$$\phi(ts\omega^{x\cdot y^*},x+x^*,y+y^*) = (tsf_\phi(x+y,x^*+y^*)\omega^{x\cdot y^*},x+x^*,y+y^*).$$

Tout homomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g}$ dans $\mathbb{C}^*$ peut s'écrire

$$f_\phi(x) = \omega^{E(a,x)}$$

pour un élément $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g}$, où $E(-,-)$ est la forme symplectique standard

$$E : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

dont la matrice, écrite en blocs $g \times g$ est $\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$.
On obtient donc un homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \zeta : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \longrightarrow & A(\mathcal{H}_g(n)) \\ a & \mapsto & [(t,x,x^*) \overset{\zeta_a}{\mapsto} (t\omega^{E(u,a)},x,x^*)]. \end{array} \tag{2.6}$$

Les homomorphismes ζ et G sont respectivement la première et la deuxième flèche dans la suite (2.4).
De plus, comme $\phi \in A(\mathcal{H}_g(n))$, il préserve les commutateurs. Cela équivaut à dire que

$$\begin{array}{rcl} \omega^{E(u,v)} = & [\tilde{u},\tilde{v}] = & \tilde{u}\cdot\tilde{v}\cdot\tilde{u}^{-1}\cdot\tilde{v}^{-1} = \\ = \phi(\tilde{u}\cdot\tilde{v}\cdot\tilde{u}^{-1}\cdot\tilde{v}^{-1}) = & [\phi(\tilde{u}),\phi(\tilde{v})] = & \omega^{E(G_\phi(u),G_\phi(v))}, \end{array}$$

et donc $Im(G) \subset Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. D'après l'expression 2.6 nous observons que ζ est injective et que $G \circ \zeta((x,x^*)) = Id$, $\forall (x,x^*) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.
Pour prouver la surjectivité de la deuxième flèche de la suite 2.4 il nous faut le lemme suivant.

Lemme 2 *Soit n un entier impair $n \neq 1$. L'homomorphisme G induit un isomorphisme*

$$G : C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1}) \xrightarrow{\sim} Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Démonstration: Soit ζ la fonction définie dans l'expression 2.6.
Pour tout $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ nous avons

$$D_{-1}\circ\zeta_a(t,x,x^*) = (t\omega^{E(u,a)}, -x, -x^*),$$
$$\zeta_a\circ D_{-1}(t,x,x^*) = (t\omega^{E(-u,a)}, -x, -x^*).$$

Nous avons donc

$$D_{-1}\circ\zeta_a(t,x) = \zeta_a\circ D_{-1}(t,x)$$

si et seulement si $-E(x,a) = E(x,a)$. Cela est impossible, car cela impliquerait $E(x,a) = 0$ pour tout a et E est non-dégénérée. Cela veut dire que

$$Im(\zeta)\cap C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1}) = Id,$$

c'est à dire $G_{|C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})}$ est injective.
Le problème se réduit à trouver une fonction $f_M : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to \mathbb{C}$ t.q. il existe un automorphisme $\widetilde{M} \in C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$ de la forme

$$\widetilde{M}(t,x,x^*) = (f_M(x,x^*)t, M(x,x^*)).$$

Le fait que $\widetilde{M} \in C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$ implique que $f_M(-x,-x^*) = f_M(x,x^*)$. De plus il faut que $\widetilde{M}$ soit un automorphisme de $\mathcal{H}_g(n)$. Cela veut dire que pour tout (x,x^*), $(y,y^*) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, si nous notons (a,a^*) (resp. (b,b^*)) l'image $M(x,x^*)$ (resp. l'image $M(y,y^*)$), f_M doit vérifier l'équation suivante

$$f_M(x+y,x^*+y^*)\omega^{y^*(x)} = f_M(x,x^*)\cdot f_M(y,y^*)\omega^{b^*(a)}, \tag{2.7}$$

de manière que nous puisons avoir

$$\widetilde{M}\left((t,x,x^*)\cdot(s,y,y^*)\right) = \widetilde{M}(t,x,x^*)\cdot\widetilde{M}(s,y,y^*).$$

Soit β la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \beta : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ ((x,x^*),(y,y^*)) & \mapsto & y^*(x). \end{array}$$

Sa relation avec la forme symplectique standard E sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ est donnée par la formule

$$E((x,x^*),(y,y^*)) = y^*(x) - x^*(y) = \beta((x,x^*),(y,y^*)) - \beta((y,y^*),(x,x^*)).$$

Supposons que f_M puisse s'écrire sous la forme $f_M = \omega^{\phi_M}$ pour une fonction $\phi_M : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Nous rapellons que $(a,a^*) = M(x,x^*)$ et que $(b,b^*) = M(y,y^*)$. Alors l'équation (2.7) est équivalente à celle-ci

$$\begin{aligned} (2.8)\phi_M(x+y,x^*+y^*) - \phi_M(x,x^*) - \phi_M(y,y^*) &= b^*(a) - y^*(x) = \\ &= \beta(M(x,x^*),M(y,y^*)) - \beta((x,x^*),(y,y^*)). \end{aligned}$$

Nous remarquons maintenant que l'expression

$$\begin{array}{rcl} \psi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ ((x,x^*),(y,y^*)) & \mapsto & \beta(M(x,x^*),M(y,y^*)) - \beta((x,x^*),(y,y^*)) \end{array}$$

est symétrique. En effet, pour tout $h = (x,x'),k = (y,y') \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$

$$\psi(h,k) - \psi(k,h) = \beta(M(h),M(k)) - \beta(h,k) - \beta(M(k),M(h)) + \beta(k,h) =$$

$$= E(M(h),M(k)) - E(h,k) = 0,$$

comme $M \in Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
Soit $h := (h_1,h_2) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ et soit ϕ_M la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ψ, c'est à dire

$$
(2.9)\quad \begin{array}{rcl} \phi_M : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (h_1,h_2) & \mapsto & \frac{1}{2}[\beta(M(h_1,h_2),M(h_1,h_2)) - \beta((h_1,h_2))]. \end{array}
$$

Alors la formule de polarisation donne l'équation (2.8) et

$$
\begin{array}{rcl} \widetilde{M} : \mathcal{H}_g(n) & \longrightarrow & \mathcal{H}_g(n) \\ (t,x,x^*) & \mapsto & (t\omega^{\phi_M(x,x^*)},M(x,x^*)) \end{array}
$$

est un automorphisme $\mathcal{H}_g(n)$. De plus

$$
\omega^{\phi_M(x,x^*)} = \omega^{\phi_M(-x,-x^*)}
$$

donc $\widetilde{M} \in C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$ et $\widetilde{M}$ est un relèvement de M. Cela termine la démonstration du Lemme 2. □

Corollaire 3 *Soit (A,H) une vapp, L un fibré en droites qui represente la polarisation et n un entier impair. Alors une structure de niveau n determine une unique structure thêta symétrique de niveau n.*

Le Lemme 2 implique que l'image de G est $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Ceci complète aussi la démonstration de la Proposition 6. □

Corollaire 4 *Pour chaque entier impair n il existe un isomorphisme*

$$
A(\mathcal{H}_g(n)) \cong Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g},
$$

où l'action de $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ est celle induite par $GL(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Démonstration: Nous remarquons que, comme il est le noyau de l'homomorphisme G, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ est un sous-groupe distingué de $A(\mathcal{H}_g(n))$. Alors $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$ agit sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ par conjugation. Soit $a = (a_1,a_2) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ et soit $\zeta_a \in A(\mathcal{H}_g(n))$ l'automorphisme défini par l'expression (2.6). De plus soit $\widetilde{M} \in A(\mathcal{H}_g(n))$ le relèvement de $M \in Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini dans la démonstration du Lemme 2. Alors, pour tout $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, nous avons

$$
\begin{array}{rcl} J : Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & GL((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \\ M & \mapsto & J_M := [\zeta_a \mapsto \widetilde{M} \circ \zeta_a \circ \widetilde{M}^{-1}]. \end{array}
$$

En développant l'expression nous obtenons que

$$\widetilde{M} \circ \zeta_a \circ \widetilde{M}^{-1}(t,x,x^*) = \zeta_{M\cdot a}(t,x,x^*),$$

où $M \cdot a$ est l'action naturelle de $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.$\square$

D'autre part l'inclusion de $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dans $A(\mathcal{H}_g(n))$ en tant que sous-groupe $C_{A(\mathcal{H}_g(n))}\ (D_{-1})$ donne une représentation

$$\Upsilon : Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{P}GL(V_n(g))$$

par restriction de la représentation $\widetilde{T}$ définie par (2.2). De plus, comme $Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$, la representation Υ se décompose en deux sous-representations

$$\begin{array}{rcl}\Upsilon_+ : Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\pm Id & \longrightarrow & \mathbb{P}GL(V_n(g))_+,\\ \Upsilon_- : Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\pm Id & \longrightarrow & \mathbb{P}GL(V_n(g))_-.\end{array}$$

2.3 Espaces de modules de variétés abéliennes

La bonne manière de formuler des questions à propos des classes d'isomorphisme d'objets géométriques avec des structures additionnelles est en termes de foncteurs et de leur représentabilité. Au lieu de considérer seulement l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets nous considérons plutôt le foncteur

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F} : \mathbb{C}-\textbf{Schémas} & \longrightarrow & \textbf{Ensembles};\\ S & \mapsto & \left\{\begin{array}{c}\chi \to S \text{ une famille d'objets}\\ \text{paramétrée par } S\end{array}\right\}/isom.\end{array}$$

et on pose le problème de sa représentabilité.

Plus en particulier, dans le cas des variétés abéliennes polarisées un problème de modules est défini comme suit.

Définition 10 *Un problème de modules est donné par:*

- *une classe $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ de variétés abéliennes polarisées (X,L);*
- *des familles d'objets $(f : \chi \to S,L)$, où f est plat, L inversible sur χ, t.q. $\forall s \in S$ le couple $(\chi_s,L_{\chi_s}) \in \mathcal{C}_\mathcal{G}$;*
- *une notion d'isomorphisme de familles;*
- *un foncteur $\mathcal{G}(S) := \{(f : \chi \to S,L)$ familles d'objets de $\mathcal{C}_\mathcal{G}\}/isom.$*

Exemples:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{A}_g : \mathbb{C} - \textbf{Schémas} & \longrightarrow & \textbf{Ensembles}; \\ \mathbf{A}_g(S) & := & \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isom. de vapp sur S} \\ \text{de dimension relative g} \end{array} \right\}\end{array}$$

Dans le cas de $\mathbf{A}_g$ la classe $\mathcal{C}_{\mathbf{A}_g}$ est formée des couples (X,L) où X est une variété abélienne et L une polarisation principale.

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{A}_{g,n} : \mathbb{C} - \textbf{Schémas} & \longrightarrow & \textbf{Ensembles}; \\ \mathbf{A}_{g,n}(S) & := & \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isom. de vapp sur S} \\ \text{de dimension relative g} \\ \text{avec une structure de niveau n} \end{array} \right\}\end{array}$$

Ici les éléments de la classe $\mathcal{C}_{\mathbf{A}_{g,n}}$ sont les triples (X,G,σ), où X est une variété abélienne, G une polarisation principale et σ une structure de niveau n.

Un foncteur $\mathcal{F} : \mathbb{C} - \textbf{Schémas} \longrightarrow \textbf{Ensembles}$ est dit représentable par un schéma M si pour tout schéma S, il existe un isomorphisme

$$\Xi(S) : \mathcal{F}(S) \longrightarrow Hom(S,M),$$

c'est à dire: il existe un isomorphisme de foncteurs entre $\mathcal{F}$ et le *foncteur des points* de M.

Définition 11 *Un schéma de modules fin M pour un foncteur de modules $\mathcal{F}$ est un schéma qui représente le foncteur $\mathcal{F}$.*

Dans la situation précédente il existe une famille universelle $(g : \chi \to M,\mathcal{L}) \in \mathcal{F}(M)$, c'est à dire, pour toutes familles d'objets $(f : \mathcal{Z} \to S,\mathcal{Y}) \in \mathcal{F}(S)$ il existe un unique morphisme $\lambda : S \to M$ t.q. f est la famille pull-back:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Z} & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \chi \\ f\downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\lambda} & M\end{array}$$

et $\tilde{\lambda}^*(\mathcal{L}) = \mathcal{Y}$.
S'il existe, un schéma de modules fin, est unique. Un exemple de classe pour laquelle il n'existe pas de schéma de modules fin est celle des fibrés vectoriels sur une courbe algébrique donnée.

La définition suivante généralise celle d'espace de modules fin.

Définition 12 *([MFK94], Déf. 5.6)*

Un espace de modules grossier M pour un foncteur de modules $\mathcal{F}$ est un schéma M avec une transformation naturelle de foncteurs

$$\Xi : \mathcal{F} \longrightarrow Hom(-,M)$$

satisfaisant:

1. *$\Xi(Spec(\mathbb{C})) : \mathcal{F}(\mathbb{C}) \longrightarrow Hom(\mathbb{C},M)$ est une bijection;*
2. *étant donné un schéma B et une transformation naturelle $\chi : \mathcal{F} \to Hom(-,B)$, il existe une unique transformation naturelle $\psi : Hom(-,M) \to Hom(-,B)$, avec $\chi = \psi \circ \Xi$.*

Même un espace de modules grossier, s'il existe, il sera unique, mais il n'existe pas toujours. Parfois, dans ce cas, on dit aussi que le schema M *co*représente le foncteur $\mathcal{F}$.

Dans le contexte des variétés abéliennes sur le corps $\mathbb{C}$ il existe des cas où un espace de modules fin existe, et dans ces cas là on peut aussi construire la famille universelle. Afin de construire cette famille, considérons maintenant le demi-espace de Siegel

$$\mathbb{H}_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C})|\ {}^t\tau = \tau,\ \ \mathrm{Im}\tau \ \text{ défini positif}\}$$

et le groupe modulaire de Siegel

$$\Gamma_g := Sp(2g,\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2g,\mathbb{Z})|\ {}^tM \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $n \neq 0$ un entier. Le *sous-groupe de congruence d'ordre n* $\Gamma_g(n) \subset \Gamma_g$ est défini comme le noyau de la réduction modulo n sur $Sp(2g,\mathbb{Z})$:

$$1 \longrightarrow \Gamma_g(n) \longrightarrow Sp(2g,\mathbb{Z}) \overset{mod\ n}{\longrightarrow} Sp(2g,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 1. \tag{2.10}$$

Il s'agit donc des matrices

$$\Gamma_g(n) := \{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g | M \equiv I_{2g} \bmod n\}.$$

Deux éléments τ et τ' de $\mathbb{H}_g$ définissent des vapp isomorphes si et seulement s'il existe $M \in \Gamma_g$ tel que

$$\tau' = M_\tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \tag{2.11}$$

de plus l'isomorphisme induit un isomorphisme de vapp avec une structure de niveau n si et seulement si $M \in \Gamma_g(n)$.

Nous considèrons ensuite le produit semi-direct $\mathcal{G} = Sp(2g,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^{2g}$, où $Sp(2g,\mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{Z}^{2g}$ par multiplication matricielle. Donc il existe une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g$ définie comme suit:

$$\mathcal{G} \ni \sigma := (M,\alpha) : (Z,z) \mapsto ((AZ+B)(CZ+D)^{-1},(CZ+D)^{-1}(z+Z\alpha_1+\alpha_2)),$$

où $M \in Sp(2g,\mathbb{Z})$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^g$.

Pour n'importe quel sous-groupe $\Gamma \subset Sp(2g,\mathbb{Z})$ à indice fini, le groupe $\mathcal{G}_\Gamma := \Gamma \ltimes \mathbb{Z}^{2g}$ agit également sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g$. nous rapellons qu'un groupe est dit sans torsion s'il n'a pas d'éléments d'ordre fini. Si Γ est sans torsion, alors le quotient

$$\Upsilon_\Gamma := \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g/\mathcal{G}_\Gamma$$

est lisse. En outre il est équipé avec une projection naturelle sur $X_\Gamma := \mathbb{H}_g/\Gamma$,

$$\Upsilon_\Gamma \longrightarrow X_\Gamma,$$

et ceci est une famille universelle. De plus, comme pour $n \geq 3$, $\Gamma_g(n)$ est sans torsion, nous avons un isomorphisme de variétés complexes entre l'espace de modules fin de vapp avec une structure de niveau n et $X_{\Gamma_g(n)}$, et

$$\Upsilon_{\Gamma_g(n)} \to X_{\Gamma_g(n)}$$

est la famille universelle. D'autre part, par le théorème de Baily-Borel [BB66], on sait que $X_{\Gamma_g(n)}$ est une variété algébrique quasi-projective. Quelques objets sont maintenant introduits pour mieux expliquer cette dernière affirmation.

Pour un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset \Gamma_g$, un entier r et un caractère χ du groupe Γ, nous définissons l'espace des formes modulaires:

$$[\Gamma,r,\chi] := \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}_g} : \ f(M_\tau) = \chi(M)det(C\tau+D)^r f(\tau) \ \ \forall M \in \Gamma\};$$

où M est décomposé en quatre blocs $g \times g$. On va écrire $[\Gamma,r]$ si le caractère est trivial. Ce type de formes modulaires donne lieu à une algèbre graduée

$$A(\Gamma) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} [\Gamma,r].$$

W. Baily et A. Borel ont prouvé [BB66] que le quotient $\mathbb{H}_g/\Gamma$, qui a priori n'est qu'une variété analytique, est une variété algébrique quasi-projective. En particulier $\mathbb{H}_g/\Gamma$ est un ouvert de Zariski de la variété projective $\mathbf{Proj}(A(\Gamma))$. La variété $\mathbf{Proj}(A(\Gamma))$ est une compactification de $\mathbb{H}_g/\Gamma$ et elle est appelée *compactification de Satake.*

Les variétés analytiques $\mathcal{A}_g := \mathbb{H}_g/\Gamma_g$ et $\mathcal{A}_g(3) := \mathbb{H}_g/\Gamma_g(3)$ paramètrent donc respectivement les classes d'isomorphisme de vapp et les classes d'isomorphisme de vapp avec une structure de niveau 3, et en particulier, comme $\Gamma_g(3)$ est sans torsion, le deuxième espace de modules est fin ([Deb99], Prop. 3.4). Elles ont également une structure naturelle de variétés algébriques quasi-projectives. $\overline{\mathbb{H}_g/\Gamma_g(3)}$.

Il existe un sous-groupe de $\Gamma_g(3)$, appelé $\Gamma_g(3{,}6)$, qui est défini de la manière suivante:

$$\Gamma_g(3{,}6) = \{M \in \Gamma_g(3) | (AB)_0 \equiv (CD)_0 \equiv 0 \ mod \ 6\} \subset \Gamma_g(3), \tag{2.12}$$

où $(X)_0$ indique les éléments sur la diagonale de la matrice X. Le sous-groupe $\Gamma_g(3{,}6)$ contient $\Gamma_g(6)$ en tant que sous-groupe et on va voir que, dans un certain sens, le quotient de $\mathbb{H}_g$ par ce groupe paramètre les variétés abéliennes avec une structure de niveau 3 et une theta caractéristique pair.

Plus en général nous pouvons définir un sous-groupe $\Gamma_g(n{,}2n) \subset \Gamma_g(n)$ de la manière suivante:

$$\Gamma_g(n{,}2n) = \{M \in \Gamma_g(n) | (AB)_0 \equiv (CD)_0 \equiv 0 \ mod \ 2n\}. \tag{2.13}$$

2.3.1 Structures thêta

De manière plus générale des espaces de modules de variétés abéliennes avec une structure de niveau n peuvent être définis. Dans ce contexte la définition suivante sera importante.

Définition 13 *Un vecteur de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$ est appelé une caractéristique demi-entière.*

En effet nous pouvons définir une action de Γ_g sur les caractéristiques: en écrivant

$$\Gamma_g \ni M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et en considérant un élément $m = (m',m'') \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$, la formule

$$M \cdot m = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (C^tD)_0 \\ (A^tB)_0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

définit une action de groupe. En effet, pour $M,M' \in \Gamma_g$ et $m,n \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$ on vérifie que:

1. $MM' \cdot m \equiv M \cdot (M' \cdot m) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$,
2. $Id_{2g} \cdot m = m$,
3. $m \equiv n \Rightarrow M \cdot m \equiv M \cdot n \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$

Tout cela provient d'une formule plus générale, connue comme formule de transformation des fonctions thêta ([Igu64], Section 2). En effet, une fois choisi une matrice $\Omega \in \mathbb{H}_g$, nous pouvons associer comme suit une fonction thêta holomorphe (sur la variété abélienne A_Ω associée à $\Omega \bmod \Gamma_g$) à chaque caractéristique demi-entière:

$$\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\mathbf{z}; \Omega) := \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i ((\mathbf{r} + \frac{1}{2}a) \cdot \Omega \cdot (\mathbf{r} + \frac{1}{2}a) + 2(\mathbf{z} + \frac{1}{2}b) \cdot (\mathbf{r} + \frac{1}{2}a))}. \tag{2.15}$$

De plus le diviseur de $\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est un diviseur thêta symétrique. Donc, par l'identification (1.5), nous pouvons définir (même si non canoniquement) des bijections entre l'ensemble dés caractéristiques demi-entières et $\vartheta(A)$. La formule de transformation des fonctions thêta décrit donc comme les fonctions thêta sur A_Ω changent lorsque Γ_g agit sur $\Omega \in \mathbb{H}_g$ et notamment la formule 2.14 décrit l'action sur les caractéristiques dès fonctions thêta avec caractéristique demi-entière. Dans notre cas on va se limiter aux thêta-constants, c'est à dire aux fonctions thêta évaluées à l'origine. Si $M \in \Gamma_g$ et $Z \in \mathbb{H}_g$, alors:

(2.16)
$$\theta \left[M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] (M \cdot Z, 0) = \kappa(M) exp(\pi i \phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M)) det(CZ+D)^{\frac{1}{2}} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (Z, 0),$$

où l'action de Γ_g sur $\mathbb{H}_g$ est celle de l'expression (2.11), $\kappa(M)$ est une racine huitième de l'unité et

$$\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M) = -({}^t a {}^t BDa + {}^t b {}^t ACb - 2 {}^t a {}^t BCb - {}^t (A)_0 B)(Da - Cb)).$$

Lemme 3 *([Igu64], Section 2)*
Soit $m = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$. *L'action de* Γ_g *sur* $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g}$ *définie par (2.14) a deux orbites distingués par l'invariant*

$$\mathbf{e}(m) = (-1)^{4a^t b} \in \{\pm 1\}.$$

On dira que m est une caractéristique pair (resp. impair) si $\mathbf{e}(m) = 1$ (resp. $\mathbf{e}(m) = -1$) et cet invariant coïncide, par l'identification (1.5), avec l'invariant ε défini sur les thêta caractéristiques dans la Section 1.3. Si nous considérons donc le sous-groupe principal de congruence $\Gamma_g(n)$ et son sous-groupe $\Gamma_g(n,2n)$, défini par l'équation (2.12), on observe que $\Gamma_g(n,2n)$ est égal au sous-groupe stabilisateur (par rapport à l'action 2.14) d'une caractéristique pair, notamment le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il existe une bijection entre l'espace de modules de variétés abéliennes de dimension g avec une structure thêta symétrique de niveau n et une thêta caractéristique pair et le quotient

$$\mathcal{A}_g(n,2n) := \mathbb{H}_g/\Gamma_g(n,2n).$$

Grâce à l'équation (2.16) les thêta-constants sont des formes modulaires par rapport à l'action de certains sous-groupes de Γ_g. Igusa dans [Igu64] et Mumford dans [Mum67a] ont prouvé que l'application

$$Th_n : \mathcal{A}_g(n,2n) \longrightarrow \mathbb{P}^{n^g-1};$$
$$Th_n(\tau) := \left\{ \theta \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} (n\tau,0) \right\}_{a \in (\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g}$$

définit un plongement de l'espace de modules, pour $n \geq 4$.

Nous considérons maintenant la suite (2.10) dans le cas $n = 2$, cela donne:

$$1 \longrightarrow \Gamma_g(2) \longrightarrow Sp(2g,\mathbb{Z}) \stackrel{mod\ 2}{\longrightarrow} Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

où la dernière flèche est la réduction *mod* 2. Ensuite nous remarquons que $\Gamma_g(n)$, si n est pair, s'injecte dans le noyau de la réduction *mod* 2 (c'est à dire $\Gamma_g(2)$). La réduction va donc se factoriser de la façon suivante:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_g(n) \arrow[rr, "mod\ 2"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ & \Gamma_g(2) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

De plus, dans le cas de niveau 2 nous avons la suite exacte suivante:

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g} \longrightarrow \Gamma_g(2,4) \longrightarrow \Gamma_g(2) \longrightarrow 1,$$

dont la signification est clarifiée par la proposition suivante.

Proposition 7 *([LB92],Lemma 6.6.5) Soit (A,H) une vapp de dimension g et L un fibré en droites sur A dans la classe d'équivalence algébrique de la polarisation H. Étant donnée une structure de niveau 2*

$$\phi : A[2] \stackrel{\sim}{\longrightarrow} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g},$$

les structures thêta de niveau 2 pour L qui induisent ϕ sont en correspondence bijective avec les points de $A[2]$.

Si le niveau n du sous-groupe de congruence $\Gamma_g(n)$ considéré est un entier impair, l'application *mod* 2 ne prendra pas la valeur Id_{2g} identiquement sur $\Gamma_g(n)$. Notamment on a la Proposition suivante.

Proposition 8 *Soit $n = 3$, alors on a la suite exacte suivante:*

$$1 \longrightarrow \Gamma_g(6) \longrightarrow \Gamma_g(3) \stackrel{mod\ 2}{\longrightarrow} Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

Démonstration: En effet la première fleche est évidente, tandis que la surjectivité de la deuxième est plus élaborée. Igusa, dans [Igu64] (section 1), donne la formule suivante:

$$[\Gamma_g : \Gamma_g(n)] = n^{g(2g+1)} \prod_{p|n} \prod_{1\leq k\leq g} (1 - p^{-2k}), \tag{2.17}$$

qui donne les indices suivants:

$$\begin{aligned}[\Gamma_g : \Gamma_g(3)] &= \#Sp(2g,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z});\\ [\Gamma_g : \Gamma_g(2)] &= \#Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z});\\ [\Gamma_g : \Gamma_g(6)] &= \#Sp(2g,\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Donc,

$$[\Gamma_g(3) : \Gamma_g(6)] = [\Gamma_g : \Gamma_g(6)]/[\Gamma_g : \Gamma_g(3)] = \#Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

et la surjectivité est prouvée.□

2.4 Le groupe arithmétique $\Gamma_2(3)^-$

Soit (A,H) une vapp. Dans la section 2.3.1 nous avons observé l'action de Γ_g sur les caractéristiques a deux orbites (Lemme 3) et que le groupe $\Gamma_g(3,6)$ est le sous-groupe de Γ_3 stabilisateur de la caractéristique pair $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 4 *Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ une caractéristique demi-entière et $\Theta_{(a,b)}$ le diviseur des zéros de la fonction thêta $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ de l'expression 2.15. Il existe une bijection $\beth$ entre les caractéristiques demi-entières et les thêta caractéristiques.*

$$\beth : (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{2g} \longrightarrow \vartheta(A),$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \kappa\Theta_{(a,b)}.$$

Par le lemme 3 on voit donc que $\Gamma_g(3{,}6)$ se trouve au milieu de la suite suivante:

$$1 \longrightarrow \Gamma_g(6) \longrightarrow \Gamma_g(3{,}6) \stackrel{mod\ 2}{\longrightarrow} O^+(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

où $O^+(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset Sp(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le sous-groupe stabilisateur d'une forme quadratique pair sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$. En effet en caractéristique 2 les groupes orthogonal et symplectique coïncident. Le groupe qui nous interesse pour la construction de notre espace de modules est un analogue impair de $\Gamma_2(3{,}6)$. En effet, si on fixe un forme quadratique impair $\tilde{q}$, nous pouvons définir de manière analogue un deuxième groupe $\Gamma_2(3)^-$, t.q. $\Gamma_2(6) \subset \Gamma_2(3)^- \subset \Gamma_2(3)$, par la suite exacte:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(6) \longrightarrow \Gamma_2(3)^- \stackrel{mod\ 2}{\longrightarrow} O^-(4,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1,$$

où $O^-(4,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le sous-groupe stabilisateur de $\tilde{q}$. Le choix d'une autre forme quadratique impair aurait comme stabilisateur un sous-groupe conjugué de $O^-(4,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
Nous développons maintenant une construction explicite du groupe arithmétique $\Gamma_2(3)^-$ en utilisant des résultats classiques sur les formes quadratiques sur des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels.

La source principale de ces résultats est l'article [GH04] de B. Gross et J. Harris. Soit V un espace vectoriel de dimension $2g$ sur $\mathbb{F}_2$ et

$$\langle\ ,\ \rangle : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

une forme symplectique non dégénérée. L'espace symplectique $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ est déterminé de manière unique par sa dimension $2g$ à isomorphisme près. Dans notre cas nous considérerons $V = \mathbb{F}_2^4$.
Nous noterons $Q(\mathbb{F}_2)$ l'ensemble de toutes les formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2^4$. L'ensemble $Q(\mathbb{F}_2)$ est un espace homogène pour $\mathbb{F}_2^4$: si $q \in Q(\mathbb{F}_2)$ et $v,u \in \mathbb{F}_2^4$ on définit la forme quadratique $q + v$ par la formule

$$[q+v](u) = q(u) + \langle v,u\rangle.$$

De manière analogue, si q' et q sont deux éléments de $Q(\mathbb{F}_2)$ il existe un unique vecteur $q + q' = v \in \mathbb{F}_2^4$ t.q.

$$\langle v,u\rangle = q(u) + q'(u).$$

Cela induit une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 5 à l'ensemble $W = Q(\mathbb{F}_2) \cup \mathbb{F}_2^4$. Dans la deuxième section de [GH04] on donne une bijection entre les deux $Sp(4,\mathbb{F}_2)$-torseurs des bases symplectiques de $\mathbb{F}_2^4$ et des ensembles de Aronhold. Si $g = 2$, par definition, un ensemble de Aronhold est un ensemble ordonné de cinq thêta-caractéristiques impairs et on a un isomorphisme

$$\Sigma_5 \cong O(4,\mathbb{F}_2)^-$$

donné par les permutations des cinq thêta caractéristiques.

Étant données cinq formes quadratiques impairs $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_5\}$, la base symplectique qui est leur associée est donnée par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} e_1 &= \vartheta_1 + \vartheta_2 \\ e_2 &= \vartheta_3 + \vartheta_4 \\ f_1 &= \vartheta_1 + \vartheta_5 \\ f_2 &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_5 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Une base de W est donnée par les ϑ_i (voir [GH04]). Sur cet espace vectoriel il existe une représentation naturelle

$$\rho : \Sigma_5 \longrightarrow GL(W)$$

de Σ_5 donnée par les matrices des permutations des éléments de la base. Soit donc

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice qui définit alors les transformations (2.18) en termes de bases symplectiques l'action de $\sigma \in \Sigma_5 \cong O(4,\mathbb{F}_2)^-$ est donnée par $M(\sigma) \in Sp(4,\mathbb{F}_2)$ qui vérifie l'égalité suivante:

$$M(\sigma) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \end{pmatrix} = A \cdot \rho(\sigma) \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \end{pmatrix}$$

On obtient donc une représentation

$$M : O(4,\mathbb{F}_2)^- \longrightarrow Sp(4,\mathbb{F}_2) \subset GL(\mathbb{F}_2^4)$$

qui nous donne directement le groupe arithmétique $\Gamma_2(3)^-$.

$$\Gamma_2(3)^- := \left\{ G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(4,\mathbb{Z}) | G \equiv I_{2g} \; mod \; 3, \; G \equiv M(\sigma) \; mod \; 2 \text{ pour } \sigma \in O(4,\mathbb{F}_2)^- \right\}$$

pour quelque $\sigma \in O(4,\mathbb{F}_2)^-$. On voit bien que l'indice de

$$\Gamma_2(6) = \left\{ G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(4,\mathbb{Z}) | G \equiv Id_4 \; mod \; 3, \; G \equiv Id_4 \; mod \; 2 \right\}$$

dans $\Gamma_2(3)^-$ est $120 = \sharp(\Sigma_5)$ et que, comme prévu, l'indice de $\Gamma_2(3)^-$ dans $\Gamma_2(3)$ est 6, le nombre de thêta caractéristiques impairs.

Définition 14 *$\mathcal{A}_2(3)^-$ est défini comme le quotient $\mathbb{H}_2/\Gamma_2(3)^-$.*

En effet il existe une bijection entre les points de $\mathcal{A}_2(3)^-$ et les triplets (A,L,θ), où A est une sapp, L un fibré en droites symétrique impair t.q. $h^0(A,L) = 1$ et θ est une structure thêta symétrique de niveau 3.

Nous avons donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A}_2(6) & & \\
 & \swarrow 120:1 & \downarrow 72:1 & 51840:1 \searrow & \\
\mathcal{A}_2(3)^- & & \mathcal{A}_2(3,6) & & \mathcal{A}_2(2) \\
 & h \searrow 6:1 & k \downarrow 10:1 & & \downarrow 720:1 \\
 & & \mathcal{A}_2(3) & \xrightarrow{51840:1} & \mathcal{A}_2
\end{array}$$

Les flèches h et k sont les morphismes d'oubli du fibré qui gardent seulement la structure de niveau 3 (qui, d'après le Corollaire 3, induit de façon unique la structure thêta symétrique).

Ce qui apparaît tout de suite est le fait que dans le cas du niveau 2 il existe un espace de modules $\mathcal{A}_2(2,4)$ qui paramètre les vapp avec une structure thêta de niveau 2 sans aucune donnée sur le fibré qui paramètre la polarisation, tandis que dans le cas du niveau 3 les espaces de modules considérés demandent plus de données sur ce fibré ainsi qu'une structure thêta symétrique.
Cela se traduit, au niveau de systèmes linéaires sur les variétés abéliennes comme suit. Tandis que, par le théorème du carré, les systèmes linéaires

$|L_\alpha^2|$ et $|L_\beta^2|$ sont linéairement équivalents, $\forall L_\alpha, L_\beta$ fibrés symétriques représentants la polarisation, cela n'est plus vrai ni pour les systèmes $|L_\alpha^3|$ et $|L_\beta^3|$, ni pour pour les sous-espaces propres par rapport à l'involution $\imath^\sharp$. Par consequent cela n'a pas de sens de parler de n'importe quelle structure thêta de niveau 3 sans expliciter aussi le fibré représentant la polarisation choisi sur la variété abélienne considérée. De plus, l'action de Γ_2 sur les fibrés symétriques n'est pas transitive est elle a deux orbites distinguées entre elles par la parité des thêta caractéristiques induites. Enfin, pour obtenir des modèles projectifs des espaces de modules, dans ce cas nous devons forcement choisir une structure thêta symétrique; en effet, comme nous avons observé dans la section 2.1, l'origine d'une surface abélienne est dans le lieu de base de $|L_\alpha^3|_+$ ou $|L_\alpha^3|_-$, selon la parité de L_α. Donc, si on se donne une surface abélienne avec une polarisation impair, pour en regarder l'image donnée par les thêta constants (suivies par l'isomorphisme projectif défini par une certaine structure thêta) dans un espace projectif, nous devons forcement choisir les 4 fonctions thêta pairs. Les autres s'annulent à l'origine. La même idée s'applique au cas où L_α est pair, mais les dimensions des espaces propres s'échangent.

2.5 La surface de Weddle

Soit (A,H) une variété abélienne de dimension 2 (une surface abélienne) avec une polarisation principale H. Soit Θ un diviseur thêta symétrique t.q. $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$ induit H et tel que la thêta caractéristique associée soit impair. L'espace $H^0(A,3\Theta)$ des fonctions thêta du troisième ordre a dimension 9. Si nous considérons la linéarisation normalisée, l'espace $H^0(A,3\Theta)$ se décomposera en deux espace propres (avec valeurs propres ± 1) $H^0(A,3\Theta)_+$ et $H^0(A,3\Theta)_-$, respectivement de dimension 4 et 5. L'application

$$\varphi_{3\Theta} : A \longrightarrow \mathbb{P}H^0(A,3\Theta)^*$$

est un plongement par le théorème de Lefschetz et l'intersection

$$\varphi_{3\Theta}(A) \cap \mathbb{P}H^0(A,3\Theta)_+^*$$

consiste en six points de 2-torsion, notamment les six point de S_+ (cf. Prop. 5). En effet les 16 points de 2-torsion sont les seuls points fixés par l'involution $\imath$ et par consequent

$$\{\varphi_{3\Theta^*}(A) \cap \mathbb{P}H^0(A,3\Theta)_-^*\} \cup \{\varphi_{3\Theta^*}(A) \cap \mathbb{P}H^0(A,3\Theta)_+^*\} = A[2].$$

Soit

$$\mathbb{P}H^0(A,3\Theta)_+^* := \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$$

et

$$W = \overline{\varphi_{3\Theta+}(A)} \subset \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$$

la clôture de l'image de l'application rationnelle $\varphi_{3\Theta}$. La surface W est appelée surface de Weddle et elle est une quartique avec six noeuds en S_+ et contenant 25 droites, dont 10 sont les diviseurs exceptionnels des points de 2-torsion de S_-. Le morphisme dans $\mathbb{P}^3 \cong \mathbb{P}H^0(A,2\Theta)^*$ donné par les fonctions thêta d'ordre 2 se factorise par le quotient $K := A/\pm Id$ et ce quotient se plonge dans $\mathbb{P}^3$ comme surface quartique avec 16 noeuds (les points de 2-torsion), ce qu'on appelle une surface de Kummer ([LB92], Théorème 4.8.1). Ces deux surfaces sont liées par une construction géométrique classique que nous développons.

Proposition 9 *Il existe une injection canonique*

$$Q : H^0(A,2\Theta)^* \hookrightarrow Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+ \tag{2.19}$$

dont l'image est l'espace de dimension 4 Γ *des formes quadratiques qui s'annulent sur* $S_+ \subset \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$.

Démonstration: Les points de $H^0(A,2\Theta)^*$ paramètrent aussi les hyperplans de $H^0(A,2\Theta)$, qui correspondent aux cubiques polaires de K. Ce système linéaire de cubiques est complètement caractérisé par son lieu de base, ce qui correspond par définition au lieu singulier de K: les 16 points de 2-torsion. Or, $Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+$ a dimension 10. Soit

$$\nu : Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+ \longrightarrow H^0(A,6\Theta)_+ \cong Sym^3 H^0(A,2\Theta)$$

l'application de restriction à la surface abélienne. Comme il n'existe pas de quadrique qui s'annule sur W, ν est injective. On connaît le lieu de base de $H^0(A,3\Theta)_+$: par le Lemme 5 il s'agit des 10 points de 2-torsion de S_-; donc même l'image de $Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+$ dans $Sym^3 H^0(A,2\Theta)$ est déterminée par son lieu de base: il s'agit de l'espace des cubiques qui passent par le 10 points de S_-. Le système des cubiques polaires est un sous-système de $Sym^3 H^0(A,2\Theta)$ et son image inverse dans $Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+$ est donné par le quadriques passantes par les 6 points de S_+.$\square$

Le fait que $\mathbb{P}H^0(A,2\Theta)^*$ soit (via Q) un système linéaire de dimension 3 de quadriques veut dire qu'on peut le décrire comme une matrice symétrique de formes linéaires en des coordonnées sur $\mathbb{P}H^0(A,2\Theta)^* \cong \mathbb{P}^3_{2\Theta^*}$. De plus cela définit une variété algébrique dans $\mathbb{P}^3_{2\Theta^*}$ dont l'équation est donnée par l'annulation du déterminant. Il s'agit d'une surface quartique (classiquement connue comme Symétroide) et pour un système linéaire de dimension 3 de quadriques général elle a 10 noeuds qui proviennent du fait que la variété déterminantielle universelle est singulière en codimension 2 et son lieu singuliér est de degré 10 [HT84]. Cette variété est définie comme une hypersurface quartique $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{P}^9 := \mathbb{P}Sym^2H^0(A,3\Theta)_+$ qui paramètre toutes les quadriques dans $\mathbb{P}^3$ avec corang non-nul (son complémentaire dans $\mathbb{P}^9$ paramètre le quadriques non-dégénérées). Le lieu singulier $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{D}_1$ paramètre le quadriques de corang au moins 2 [ACGH85]. On a ainsi le résultat classique suivant:

Théorème 4 *([Har95], Théorème 22.33)*
Soit $q \in \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 \in \mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(Sym^2H^0(A,3\Theta)_+)$ et $v \in \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$ son sommet; alors

$$T_q\mathcal{D}_1 = \{\textit{quadriques qui passent par } v\}.$$

Donc dans le cas en question la surface $\mathcal{D}_1 \cap \mathbb{P}\Gamma$ a dix noeuds qui correspondent à l'intersection $\mathcal{D}_2 \cap \mathbb{P}\Gamma$ plus six autres qui correspondent aux quadriques q de corang 1 t.q.

$$\mathbb{P}\Gamma \subset T_q\mathcal{D}_1.$$

De plus ces six quadriques de corang 1 ont comme noeud l'image d'un des 6 points de 2-torsion de S_+ dans $\mathbb{P}^3_{3\Theta+}$. Soit

$$Z := \mathcal{D}_1 \cap H^0(A,2\Theta)^* \subset Sym^2H^0(A,3\Theta)_+.$$

Elle est une surface quartique avec 16 noeuds. Nous prouverons que c'est l'image K de la surface abélienne dans $\mathbb{P}^3_{2\Theta^*}$.

Proposition 10 *Via l'injection Q, les deux surfaces de Kummer K et Z coïncident.*

Démonstration: La clef est l'isomorphisme entre $Sym^2H^0(A,3\Theta)_+$ et le système linéaire Ψ des cubiques passantes par S_-. En effet il existe une application rationnelle (dite de Steiner) définie par:

$$St : Z \dashrightarrow \mathbb{P}^3_{3\Theta+},$$
$$x \mapsto \mathbb{P}(ker(q(x))).$$

où $q(x)$ est la quadrique correspondante au point $x \in Z$. Le lieu régulier est $Z/\mathcal{D}_2$. Par construction, l'image de cette application est une variété algébrique. Soit

$$\gamma : \mathbb{P}Sym^2H^0(A,3\Theta)_+ \dashrightarrow \mathbb{P}Sym^2H^0(A,3\Theta)^*_+$$

l'application donnée par les cubiques polaires de $\mathcal{D}_1$. Si nous considérons $\mathcal{D}_1$ comme le lieu des matrices 4×4 symétriques de corang non-nul, il s'agit des

cubiques définies par les 10 mineurs d'ordre 3 de la matrice symétrique et elles définissent schématiquement $\mathcal{D}_2 \subset \mathbb{P}^9$.
Comme $Z = \Gamma \cap \mathcal{D}_1$ nous pouvons regarder la restriction à Z de γ et nous avons

$$\gamma(Z) = Ver_2(St(Z)) \subset \mathbb{P}Sym^2 H^0(A,3\Theta)^*_+,$$

où $Ver_2 : \mathbb{P}^3_{3\Theta+} \to \mathbb{P}^9$ est le morphisme quadratique de Veronese. En effet si

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{xy} = a_{yx},$$

est une matrice symétrique de corang 1 alors nous pouvons écrire

$$^t ker(M) \cdot ker(M) = Com(M) = \begin{pmatrix} Com_{11} & \cdots & Com_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Com_{n1} & \cdots & Com_{nn} \end{pmatrix};$$

en effet $rg(Com(M) = n - rg(M)$ et si M est symétrique, $Com(M)$ est symétrique aussi.
Or, l'intersection du lieu de base des cubiques polaires avec $\mathbb{P}^3_{2\Theta^*}$ correspond [HT84] à

$$\mathbb{P}^3_{2\Theta^*} \cap \mathcal{D}_2 := S_-. \tag{2.20}$$

Comme $St(Z) = Ver_2(\gamma(Z))$ et Ver_2 est un morphisme régulier, le lieu exceptionnel de St correspond à celui de $\gamma_{|\mathbb{P}^3_{2\Theta^*}}$, c'est à dire (2.20). Donc d'abord l'image de St aura 6 noeuds en S_+,images des six noeuds de Z qui ne font pas partie du lieu exceptionnel.
On introduit maintenant une notation particulière pour les points de deux torsion (par exemple voir [DO88]). En effet, les surfaces de Kummer sont caractérisées par ce qu'on appelle une *configuration* 16_6. Cela revient à dire qu'il existe 16 hyperplans spéciaux (*tropes*) qui sont partout tangents à la surface en une conique double, et chaque hyperplan contient 6 noeuds. Ces coniques sont les quotients par l'involution $\pm Id$ des 16 diviseurs thêta symétriques. Chaque noeud est contenu dans 6 hyperplans spéciaux (voir aussi [LB92], Paragraphe 10.2).
On note:

$$\begin{cases} \overline{(-)}, & \text{l'hyperplan qui correspond au diviseur thêta choisi;} \\ \overline{(i)}, & i = 1,\dots,6, \text{ les noeuds sur } \overline{(-)}; \\ \overline{(jk)}, & j,k \in \{1,\dots 6\} \text{ les autres 15 hyperplans;} \\ \overline{(xyz)}, & x,y,z \in \{1,\dots 6\} \text{ les autres 10 noeuds;} \end{cases}$$

où l'on identifie $\overline{(xyz)}$ et $\overline{(uvw)}$ deux ensembles complémentaires dans $\{1,\ldots,6\}$. La configuration d'incidence 16_6 est résumée dans les deux tableaux suivants ([Hud06], Chap. 2, Par. 9).

$$\begin{bmatrix} \frac{135}{246} & 2 & 4 & 6 \\ 1 & \frac{146}{235} & \frac{162}{345} & \frac{124}{356} \\ 3 & \frac{346}{125} & \frac{362}{145} & \frac{324}{156} \\ 5 & \frac{546}{123} & \frac{562}{134} & \frac{524}{136} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} - & 46 & 62 & 24 \\ 35 & 12 & 14 & 16 \\ 51 & 32 & 34 & 36 \\ 13 & 52 & 54 & 56 \end{bmatrix}$$

Le procédé est le suivant: on choisit un noeud p du premièr tableau et les éléments sur la même ligne et la même colonne que p dans le deuxième tableau sont les 6 hyperplans qui le contiennent. Inversement si on choisit un hyperplan h du deuxième tableau, les éléments qui sont sur la même ligne et la même colonne que h dans le premièr tableau représentent les 6 noeuds contenus dans h.

Si nous considérons la surface duale, la notation des noeuds et des hyperplans spéciaux s'échange, c'est à dire qu'on a $15+1$ noeuds et $6+10$ hyperplans comme dans le diagramme ci-dessus.

Soit $q_1 \in \mathbb{P}Sym^2H^0(A,3\Theta)_+$ la quadrique de corang 1 ayant un noeud p_1 en l'image de $\overline{(1)}$, nous remarquons qu'elle coupe sur W un diviseur composé par les 5 droites $\overline{p_1p_i}$, où p_i est l'image de $\overline{(i)}$ plus l'unique courbe rationnelle normale qui passe par les six p_i. Ces six composantes sont l'image sur W des coniques déterminées par les hyperplans spéciaux $\overline{(12)},\overline{(13)},\overline{(14)},\overline{(15)},\overline{(16)}$ et $\overline{(-)}$; l'union des coniques jacentes sur ces hyperplans est coupée par une cubique qui est la cubique polaire de K par rapport au point $\overline{(1)}$. Donc par la proposition 9 le noeud représenté sur S par la quadrique q_1 correspond au noeud $\overline{(1)}$ de K. En utilisant le même argument nous pouvons prouver le résultat analogue pour les autres quadriques. Nous avons donc deux surfaces de Kummer, $\varphi_{2\Theta^*}(A)$ et S, qui ont le lieu singulier en commun. Le lemme 2.19 de [GD94] dit que deux telles surfaces coïncident, ce qui entraîne l'énoncé.$\square$

Corollaire 5 *L'équation de la surface de Kummer $K = \varphi_{2\Theta^*}(A)$ est un déterminant d'une matrice de formes linéaires (symétroide).*

Définition 15 *Une surface qui paramètre le noyaux d'un système linéaire $\Omega := [Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4]$ de quadriques est appelée la surface jacobienne associée à Ω et son équation (quartique) peut être obtenue en posant:*

$$det \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial Q_i}{\partial x_j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = 0.$$

Donc l'application de Steiner est une application rationnelle définie sur le symétroide dont l'image est la surface jacobienne associée. Soit

$$\delta : K \longrightarrow \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$$

l'application définie par le système linéaire $|3\Theta|_+$.

Théorème 5 *Les applications rationnelles St et $\delta : K \dashrightarrow \mathbb{P}^3_{3\Theta+}$ sont les mêmes.*

*Démonstration:*On appelle W l'image de δ et W' celle de St. Dans la démonstration de la Prop. 10 nous avons vu que à la fois W et W' ont six noeuds en les mêmes six points (de S_+) dans $\mathbb{P}^3_{3\Theta+}$. Les dix quadriques de rang 2 qui passent par les 6 points sont des couples d'hyperplans, chacun passant par trois des six points. Il y en a $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}/2 = 10$. L'image de chaque noeud par St est donc la droite d'intersection des deux hyperplans; nous pouvons dire de plus: par exemple, comme la cubique polaire de K par rapport à $\overline{(123)} \sim \overline{(456)}$ contient les coniques sur $\overline{(12)}$,$\overline{(23)}$,$\overline{(31)}$,$\overline{(45)}$,$\overline{(56)}$ et $\overline{(46)}$ la quadrique doit s'annuler sur les droites qui forment les "triangles" (p_1,p_2,p_3) et (p_4,p_5,p_6): les deux triplets sont donc évidents et la droite d'intersection correspond à l'image de $\overline{(123)}$ par $|3\Theta|_+$. Enfin l'image de la conique sur $\overline{(-)}$ par St est l'unique courbe rationnelle normale (contenue en W)par les p_i comme $St_{|\overline{(-)}}$ est régulière.
Le fait que W' soit une quartique e qu'elle coïncide avec W sur le lieu décrit ci-dessus implique que $St(S) = W.\square$.

Pour une hypersurface E intègre dans $\mathbb{P}^n$, admettre une écriture déterminantielle équivaut à l'existence d'un faisceau particulier sur $\mathbb{P}^n$ dont le support soit égale a E.

Définition 16 *([Bea00], Section 1)*
Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$ et soit $S = k[X_0,\dots,X_n]$; alors $\mathcal{F}$ est dit arithmétiquement Cohen-Macaulay (ACM) si et seulement si le S-module $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(j))$ est Cohen-Macaulay.

De plus:

Théorème 6 *([Bea00], Théorème A)*
Soit $\mathcal{G}$ un faisceau ACM sur $\mathbb{P}^n$, de dimension n-1. Alors il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Inversement, soit $M : \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ *un morphisme injectif de fibrés vectoriels, alors le conoyau de* M *est ACM et son support est l'hypersurface déterminée par l'équation* $detM = 0$.

Dans le cas de la surface de Kummer le faisceau ACM est le faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ à support sur K qui vérifie la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes H^0(A,3\Theta)_+^* \xrightarrow{Q} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \otimes H^0(A,3\Theta)_+ \longrightarrow \imath_*\mathcal{F} \longrightarrow 0, \tag{2.21}$$

où $\imath : K \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ est l'inclusion et Q est l'injection de (2.19).

Pour comprendre $\mathcal{F}$ il vaut mieux travailler sur la désingularisée $\widetilde{K}$ de K, obtenue en l'éclatant en les 16 noeuds, avec la projection naturelle $\pi : \widetilde{K} \rightarrow K$. En passant aux sections globales dans la suite (2.21) on trouve que $H^0(K,\mathcal{F}) \cong H^0(A,3\Theta)_+$ donc

$$dimH^0(K,\mathcal{F}) = dimH^0(A,3\Theta)_+ = 4.$$

On va maintenant introduire un fibré en droites $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}(D)$ sur $\widetilde{K}$: en rappelant l'identification de la démonstration de la proposition 9 nous poserons:

$$2D \equiv 3H - \sum_{p \in S_-} E_p, \tag{2.22}$$

où H est le pull-back $\pi^*\mathcal{O}_K(1)$ et $E_z \cong \mathbb{P}^1$ est le diviseur exceptionnel au-dessus d'un point de 2-torsion z. En effet le lemme 3.16 de [GD94] assure que

$$H - \sum_{p \in S_+} E_p \in 2Pic(\widetilde{K}),$$

et dans la démonstration de la proposition 3.22 de [GD94] on montre que

$$4H - \sum_{p \in A[2]} E_p \in 2Pic(\widetilde{K}).$$

Cela entraîne que

$$(4H - \sum_{p \in A[2]} E_p) - (H - \sum_{p \in S_+} E_p) = 3H - \sum_{p \in S_-} E_p \in 2Pic(\widetilde{K}).$$

L'idée est de considérer le système linéaire sur $\widetilde{K}$ qui généralise $|3\Theta|_+$. En effet l'équation 2.22 correspond au fait que $Sym^2H^0(A,3\Theta)_+ \cong Sym^3H^0(A,2\Theta)^{S_-}$, où l'exposant indique que nous considérons le cubique qui passent par S_-.

Or, d'abord nous pouvons calculer l'auto-intersection d'un diviseur de $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}(D)$, en obtenant:

$$\begin{aligned} 4D^2 &= 9\cdot(H^2 - \sum_{p\in S_-} E_p^2) = \\ 9\cdot 4 - 20 &= 16, \end{aligned}$$

ce qui implique $D^2 = 4$. Ensuite, en utilisant les résultats de B. Saint-Donat

([SD74], formule (2.4.1)) et le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces nous trouvons aussi la dimension du système linéaire:

$$|D| = \frac{4}{2} + 1 = 3.$$

L'image de $\widetilde{K}$ dans $\mathbb{P}^3 = |D|^*$ est une surface quartique, qu'on sait déjà être la surface de Weddle, comme le pull back par π des diviseurs de $|3\Theta|_+$ est par construction égale à $H^0(\widetilde{K},\mathcal{O}_{\widetilde{K}}(D))$.
De plus, en suivant toujours [SD74], nous pouvons considérer les diviseurs exceptionnels E_{q_i}, où q_i est un point de S_+, et en regarder l'intersection avec D. Pour chaque q_i, nous avons:

$$E_{q_i}\cdot(3H - \sum_{p\in S_-} E_{p_i}) = 3E_{q_i}\cdot H - \sum_{p\in S_-} E_{q_i}\cdot E_{p_i} = 0.$$

Cela implique que le diviseur $E_{q_1}+\cdots+E_{q_6}$ sur $\widetilde{K}$ est ce que Saint-Donat appelle *cycle fondamental* ([SD74], section 4) et que $\widetilde{K}$ est isomorphe à l'éclaté de la surface de Weddle en les six noeuds. De plus le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{K} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ K \arrow[rr, dashed, "St"] & & W \end{tikzcd}$$

où ρ est le blow-down des six diviseurs exceptionnels au-dessus de S_+. Cela implique que la surface de Weddle est isomorphe à l'éclaté de la surface de Kummer en les dix noeuds de S_-.
Soit $D \subset \mathbb{P}^n$ un ensemble fini de points et π_D la projection ayant comme centre le sous-espace linéaire $\langle D\rangle$. Le diagramme suivant résume la filtration expliquée ci-dessus. Ici Ver_3 et Ver_2 sont respectivement les morphismes de

Veronese cubique et quadratique.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}^3_{2\Theta^*} \supset K & \overset{Ver_3}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(Sym^3 H^0(A,2\Theta)) & & = \mathbb{P}H^0(A,6\Theta)_+ \\
 & & \downarrow \pi_{S_-} & & \\
\mathbb{P}^3_{3\Theta^*_+} \supset W & \overset{Ver_2}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+) & & = \mathbb{P}(Sym^3 H^0(A,2\Theta)^{S_-} \\
 & & \downarrow \pi_{S_+} & & \\
\mathbb{P}^3_{2\Theta} \supset K & \overset{Gauss}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(Sym^2 H^0(A,3\Theta)^{S_+}_+) & & = \mathbb{P}(\mathcal{P}(K))
\end{array}
$$

où les égalités à droite doivent être entendues dans $H^0(A,6\Theta)_+$.

2.5.1 La surface sextique dans $\mathbb{P}^4$

Soit (A,L) une sapp et Θ un diviseur thêta pair qui représente la polarisation. Si nous considérons un fibré qui induit une forme quadratique pair sur les points de 2-torsion alors $dim H^0(A,3\Theta)_+ = 5$. Alors l'image de A dans $|3\Theta|^*_+ = \mathbb{P}^4_{3\Theta+}$ est une surface sextique [Hun96] (définie par une cubique et une quadrique) avec 10 noeuds en le 10 points de 2-torsion de S_+. Le lien que cette surface a avec la surface de Kummer est très semblable à celui de la surface de Weddle.

Proposition 11 *Soit (A,L) une sapp, K son image dans $|2\Theta)|^* = \mathbb{P}^3$ et G celle dans $\mathbb{P}^4_{3\Theta+}$. Alors*

$$Ver_2(G) = \pi_{S_-}(Ver_3(K)) \subset \mathbb{P}(Sym^3 H^0(A,2\Theta))^{S_-*}.$$

Démonstration: Cette fois le lieu de base $\mathbf{BL}(|3\Theta|^*_+)$ consiste en 6 points de 2-torsion de S_-, nous pouvons considérer les applications d'evaluation:

$$
\begin{array}{rcl}
ev_1 : Sym^2 H^0(A,3\Theta)_+ & \longrightarrow & H^0(A,6\Theta)_+; \\
ev_2 : Sym^3 H^0(A,2\Theta) & \longrightarrow & H^0(A,6\Theta)_+.
\end{array}
$$

Comme $dim(Sym^3 H^0(A,2\Theta))) = dim(H^0(A,6\Theta))_+) = 20$ et la surface de Kummer est une quartique, ev_2 est un isomorphisme. En outre $dim(Sym^2 H^0$ $(A,3\Theta))_+) = 15$ et $dim(ker(ev_1)) = 1$, donc nous pouvons identifier l'image de dimension 14 de ev_1 à l'espace (qu'on notera $Sym^3 H^0(A,2\Theta))^{S_-}$) des cubiques qui passent par S_-. Cela entraîne l'énoncé.$\square$

Proposition 12 *Soient K et G comme dans la Prop. 11, alors*

$$\pi_{S_+}(Ver_2(S)) = K^* \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathcal{P}(K)),$$

où $\mathcal{P}(K)$ est le système linéaire des cubiques polaires de K.

Démonstration: Nous introduisons une troisième application d'evaluation:

$$ev_3 : Sym^2 H^0(A,3\Theta))_+^{S_+} \longrightarrow H^0(A,6\Theta))_+;$$

le première espace a dimension $5 = 15 - \{10$ conditions linéaires$\}$, pourtant la quadrique qui coupe S passe forcement par les 10 pts de 2-torsion en question et donc $dim(Im(ev_3)) = 4$. En considérant toujours les points de base on voit que nous pouvons identifier $Im(ev_3)$ au système linéaire des cubiques sur $|2\Theta|^*$ qui passent par le 16 noeuds de la surface de Kummer: le système linéaire des cubique polaires. Cela termine la démonstration.□

Comme dans le cas de la surface de Weddle, la situation est encore plus claire une fois que nous considèrons ce qui se passe au niveau de $\widetilde{K}$, l'éclaté de K en les 16 noeuds. En effet, ici les diviseurs de $|3\Theta|_+$ se résolvent en le système linéaire complète $|F|$, définis par l'équation suivante:

$$2F \equiv 3H - \sum_{p \in S_-} E_p.$$

En effet, par le lemme 3.16 de [GD94] nous avons que

$$H - \sum_{p \in S_-} E_p \in 2Pic(\widetilde{K}),$$

donc, en ajoutant $2H$ nous avons que

$$3H - \sum_{p \in S_-} E_p \in 2Pic(\widetilde{K}).$$

Ensuite, on calcule l'auto-intersection et on obtient

$$4F^2 = 36 - 12 = 24$$

d'où $F^2 = 6$, l'image a donc degré 6. De plus ([SD74], formule (2.4.1))

$$dim|F| = 1 + \frac{1}{2}F^2 = 4$$

comme on s'attendait. De plus, pour tout diviseur exceptionnel E_q au-dessus d'un des 10 noeuds de S_+, nous avons

$$(3H - \sum_{p \in S_-} E_p) \cdot E_q = 0,$$

et donc ([SD74], section 4), de manière analogue au cas de la surface de Weddle,

$$\widetilde{K} \cong Bl_{10pts.}(S).$$

En résumant:

$$\begin{array}{llll}
\mathbb{P}^3_{2\Theta^*} \supset K & \xrightarrow{Ver_3} & \mathbb{P}(Sym^3 H^0(2\Theta)) & = \mathbb{P}H^0(6\Theta)_+ \\
 & & \downarrow \pi_{S_-} & \\
\mathbb{P}^4_{3\Theta^*_+} \supset S & \xrightarrow{Ver_2} & \mathbb{P}(Im(ev_2)) & = \mathbb{P}(Sym^3 H^0(2\Theta)^{S_-} \\
 & & \downarrow \pi_{S_+} & \\
\mathbb{P}^3_{2\Theta^*} \supset K & \xrightarrow{Gauss} & \mathbb{P}(Im(ev_3)) & = \mathbb{P}(\mathcal{P}(K))
\end{array}$$

2.6 L'espace de modules $\mathcal{A}_2(3)^-$

On s'intéresse maintenant à l'espace de modules $\mathcal{A}_2(3)^-$ des surface abéliennes principalement polarisées avec une structure thêta symétrique de niveau 3 et un fibré en droites qui induit une forme quadratique impair. Pour plusieurs raisons un élément de cet espace de modules peut être vu comme une surface de Weddle. Un tel élément est en effet un quatruplet (A,H,L,θ). A est une variété abélienne, H une polarisation principale sur A, L est un fibré en droites symétrique dans la classe d'équivalence algébrique de la polarisation qui induit une forme quadratique impair sur les points de $A[2]$ et θ est une structure de niveau 3. En effet nous avons vu que, étant fixé le fibré, une structure thêta de niveau 3 induit complètement une structure thêta symétrique.

Soit A une surface abélienne, H une polarisation principale, L un fibré symétrique et γ une structure thêta de niveau 3 pour L. Soit $\varphi_{L^3}(A) \subset \mathbb{P}H^0(A,L^3)^*$ l'image de A donnée par les fonctions thêta de 3^{me} ordre. La structure thêta donne une identification

$$\Phi_\gamma : \mathbb{P}H^0(A,L^3)^* \cong \mathbb{P}V^* := \mathbb{P}V_2(3)^* = \mathbb{P}^8$$

de manière que nous pouvons regarder l'image $\Phi_\gamma(\varphi_{L^3}(A)) \subset \mathbb{P}V$. Dorénavant on notera $\Phi_\gamma(\varphi_{L^3}(A))$ par A.

Le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_2(3)$ agit sur V par la représentation de Schrödinger. L'action sur les puissances symétriques S^nV est la suivante: soit $h \in \mathcal{H}_2(3)$, une base de S^nV est donné par les produits $X_{\sigma_1}X_{\sigma_2}\cdots X_{\sigma_n}$, sur lesquels $\mathcal{H}_2(3)$ agit diagonalement:

$$h \cdot X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_n} := h \cdot X_{\sigma_1} \cdots h \cdot X_{\sigma_n}.$$

Pour décomposer S^nV il est utile d'introduire les deux sous-groupes lagrangiens:

$$H_d = \{(t,x,x^*) : t = 1, x = 0\};$$
$$H_p = \{(t,x,x^*) : t = 1, x^* = 0\}.$$

Le centre $\mathbb{C}^*$ de $\mathcal{H}_2(3)$ et les deux sous-groupes H_d et H_p engendrent $\mathcal{H}_2(3)$. Le sous-groupe H_d agit sur V par des matrices *d*iagonales, tandis que H_p agit en *p*ermutant les éléments de la base par des matrices de permutation.

On s'intéresse en particulier à la décomposition en sous-représentations de S^2V.

Proposition 13 *[vdG87] L'espace S^2V est la somme directe de 5 copies d'une représentation irréductible de dimension 9 de $\mathcal{H}_2(3)$. Une base de S^2V comme $\mathcal{H}_2(3)$-module est donnée par une base d'éléments H_d-invariants. C'est à dire*

$$X_{00}^2,\ X_{01}X_{02},\ X_{11}X_{22},\ X_{12}X_{21},\ X_{10}X_{20}.$$

*Démonstration:*Il suffit de prouver le résultat pour le groupe de Heisenberg fini $H_2(3) \subset \mathcal{H}_2(3)$, composé par les éléments $x \in \mathcal{H}_2(3)$ t.q $x^3 = 1$ comme ils ont les mêmes representations [Mum66]. L'élément t du centre de $H_2(3)$ agit comme t^2, mais comme $t^3 = 1$ le centre agit donc par l'inverse de son caractère naturel. En suivant [Mum66] (Proposition 3) nous savons que toutes sous-representations irréductibles de S^2V sont isomorphes et ont dimension 9. D'autre part chaque sous-représentation est engendrée, en tant que $\mathcal{H}_2(3)$-module, par un élément H_d-invariant non-trivial, ce qui implique, par définition de H_d, que la somme des indices des coordonnées qui composent cet élément soit zero. □

Le théorème suivant à propos du plongement de la surface abélienne dans $\mathbb{P}^8$ est dû à Arthur Coble.

Proposition 14 *([Cob17])*
Il existe une unique surface cubique $\mathcal{H}_2(3)$-invariante dans $\mathbb{P}^8$ singulière le long de A, appelée cubique de Coble. Les polaires de cette cubique engendrent l'espace des quadriques qui contiennent A.

Cela donne donc explicitement le noyau de l'application d'évaluation

$$\mu : Sym^2(H^0(A,3\Theta)) \to H^0(A,6\Theta).$$

Le fait que la dimension du noyau est 9 était déjà connu, comme μ est surjective [Koi76] et les dimensions des deux espaces sont, respectivement, 45 et 36.

De plus étant donné une quadrique polaire nous pouvons en obtenir 8 autres qui complètent une base de $ker(\mu)$ en faisant agir H_p et en regardant toute l'orbite. Les quadriques polaires forment en effet une sous-représentation de Sym^2V.
Par la proposition 13 une de ces quadriques pourra s'écrire de la manière suivante:

$$Q_{00} := \alpha_0 X_{00}^2 + \alpha_1 X_{01}X_{02} + \alpha_2 X_{11}X_{22} + \alpha_3 X_{12}X_{21} + \alpha_4 X_{10}X_{20} \tag{2.23}$$

et les autres huit quadriques sont obtenues en permutant les coordonnées, mais en gardant les mêmes α_i.

$$\begin{array}{rcl}
Q_{01} & := & \alpha_0 X_{01}^2 + \alpha_1 X_{02}X_{00} + \alpha_2 X_{11}X_{21} + \alpha_3 X_{12}X_{20} + \alpha_4 X_{10}X_{22} \\
Q_{02} & := & \alpha_0 X_{02}^2 + \alpha_1 X_{00}X_{01} + \alpha_2 X_{12}X_{22} + \alpha_3 X_{10}X_{21} + \alpha_4 X_{11}X_{20} \\
Q_{10} & := & \alpha_0 X_{10}^2 + \alpha_1 X_{11}X_{12} + \alpha_2 X_{20}X_{00} + \alpha_3 X_{21}X_{02} + \alpha_4 X_{22}X_{01} \\
Q_{11} & := & \alpha_0 X_{11}^2 + \alpha_1 X_{12}X_{10} + \alpha_2 X_{21}X_{01} + \alpha_3 X_{22}X_{00} + \alpha_4 X_{20}X_{02} \\
Q_{20} & := & \alpha_0 X_{20}^2 + \alpha_1 X_{21}X_{22} + \alpha_2 X_{00}X_{10} + \alpha_3 X_{01}X_{12} + \alpha_4 X_{02}X_{11} \\
Q_{21} & := & \alpha_0 X_{21}^2 + \alpha_1 X_{22}X_{20} + \alpha_2 X_{01}X_{11} + \alpha_3 X_{02}X_{10} + \alpha_4 X_{00}X_{12} \\
Q_{12} & := & \alpha_0 X_{12}^2 + \alpha_1 X_{10}X_{12} + \alpha_2 X_{22}X_{02} + \alpha_3 X_{20}X_{01} + \alpha_4 X_{21}X_{00} \\
Q_{22} & := & \alpha_0 X_{22}^2 + \alpha_1 X_{20}X_{21} + \alpha_2 X_{02}X_{12} + \alpha_3 X_{00}X_{11} + \alpha_4 X_{01}X_{10}.
\end{array}$$

De plus, si nous considérons une structure thêta symétrique (voir section 2.2.1) alors nous pouvons prendre des bases canoniques pour les espaces propres de V par rapport à l'action de $\imath$.

$$\begin{array}{rclrcl}
Y_0 & := & X_{00}, & & & \\
Y_1 & := & \frac{1}{2}(X_{01}+X_{02}), & Z_1 & := & \frac{1}{2}(X_{01}-X_{02}), \\
Y_2 & := & \frac{1}{2}(X_{10}+X_{20}), & Z_2 & := & \frac{1}{2}(X_{10}-X_{20}), \\
Y_3 & := & \frac{1}{2}(X_{11}+X_{22}), & Z_3 & := & \frac{1}{2}(X_{11}-X_{22}), \\
Y_4 & := & \frac{1}{2}(X_{12}+X_{21}), & Z_4 & := & \frac{1}{2}(X_{12}-X_{21}).
\end{array}$$

Les Y_σ donnent des coordonnées pour V_+ tandis que les Z_σ pour V_-. On notera $\mathbb{P}^3_-$ l'espace projectivisé $\mathbb{P}V_-$ et $\mathbb{P}^4_+$ le projectivisé $\mathbb{P}V_+$. De plus, si L est pair (resp. impair) nous avons une identification de $|L^3|_+$ avec $\mathbb{P}^4_+$ (resp. $\mathbb{P}^3_-$). Nous avons au contraire une identification de $|L^3|_-$ avec $\mathbb{P}^3_-$ (resp. $\mathbb{P}^4_+$) si L est pair (resp. impair). Donc en rappelant la proposition 5, nous avons

$$A \cap \mathbb{P}^3_- = S_+ \text{ si L est impair, } S_- \text{ si L est pair,} \tag{2.24}$$

$$A \cap \mathbb{P}^4_+ = S_- \text{ si L est impair, } S_+ \text{ si L est pair.} \tag{2.25}$$

2.6.1 La restriction à $\mathbb{P}^4_+$

La restriction à $\mathbb{P}^4_+$ des quadriques (2.23) est donnée par un système des cinq quadriques $Q_i[\dots : Y_\sigma : \dots]$, pour $i = 1,\dots,5$. On écrira les Q_i sous forme d'une matrice $M_+[Y_i]$ ayant comme éléments des polynômes de degré 2 en les variables Y_i qui multiplient le vecteur des coefficients.

$$(2.26) \qquad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Y_0^2 & Y_1^2 & Y_2^2 & Y_3^2 & Y_4^2 \\ Y_1^2 & 2Y_0Y_1 & 2Y_3Y_4 & 2Y_2Y_4 & 2Y_2Y_3 \\ Y_2^2 & 2Y_3Y_4 & 2Y_0Y_2 & 2Y_1Y_4 & 2Y_1Y_3 \\ Y_3^2 & 2Y_2Y_4 & 2Y_1Y_4 & 2Y_0Y_3 & 2Y_1Y_2 \\ Y_4^2 & 2Y_2Y_3 & 2Y_1Y_3 & 2Y_1Y_2 & 2Y_1Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Si nous considérons maintenant les fonctions thêta Y_i comme des fonctions en $\tau \in \mathbb{H}_2$ en fixant $z = 0$ au deuxième argument nous obtenons l'application *thêta null*:

$$(2.27) \qquad \begin{array}{rcl} Th^+ : \mathcal{A}_2(3,6) & \longrightarrow & \mathbb{P}^4_+, \\ (A,L,\vartheta) & \mapsto & \Phi_\vartheta(\varphi_{L^3}(0)), \end{array}$$

où 0 est l'origine de la sapp, L un fibré en droites pair représentant la polarisation et Φ_ϑ est l'identification de $\mathbb{P}^4_+$ avec $\mathbb{P}H^0(A,L^3)^*_+$, donnée par la structure thêta symétrique ϑ. Cela induit une application

$$\mathbb{H}_2/\Gamma_2(3)^+ \longrightarrow \mathbb{P}^4_+,$$

et un isomorphisme birationnel entre $\mathcal{A}_2(3,6)$ et son image. Tout cela sera résumé dans la proposition suivante:

Proposition 15 *[AR96],[vdG87]*
L'application ϑ^+ définit un isomorphisme birationnel entre $\mathcal{A}_2(3)^+$ et l'hypersurface A_{10} de degré 10 donné par l'annulation du déterminant de la matrice de l'équation 2.26. Le polynôme de degré 10 obtenu est l'unique relation entre les thêta constants de troisième ordre et de niveau 3.

De plus, on vérifie (*cf.* [Bur90], [Bur92] et [Cob17]) que la matrice de (2.26) est la matrice Hessienne de l'unique quartique $B \subset \mathbb{P}^4_+$ invariant par l'action du groupe $\mathbb{P}Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\pm Id$ sur $\mathbb{P}^4_+$: la *quartique de Burkhardt*. L'action de $Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\pm Id$ vient de l'isomorphisme entre le groupe $C_{A(\mathcal{H}_g(n))}(D_{-1})$ des automorphismes de $\mathcal{H}(3)$ qui préservent une structure thêta symétrique et $Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ même. Cela par le lemme de Schur induit une action projective de $Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}^3_-$ et $\mathbb{P}^4_+$, qui se factorise par $Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\pm Id$.

L'équation de la quartique de Burkhardt est connue depuis longtemps; elle est définie par l'expression suivante:

$$\mathcal{B} := \{Y_0^4 - Y_0(Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3) + 3Y_1Y_2Y_3Y_4 = 0\}. \tag{2.28}$$

Remarque 3 *[vdG87] Nous avons*

$$Hess(\mathcal{B}) = M_+.$$

Donc l'hypersurface A_{10} est la Hessienne de $\mathcal{B}$.

D'ailleurs, en utilisant un argument d'algèbre linéaire facile, il existe aussi une variété algébrique qui paramètre les α_i et elle n'est rien d'autre que la variété *steinerienne* $St(\mathcal{B})$, c'est à dire la variété qui paramètre les noyaux des formes quadratiques paramètrées par A_{10}.

Soit $Sym^2V^{H_d}$ l'espace vectoriel des quadriques H_d-invariantes. Nous remarquons que $Sym^2V^{H_d}$ peut être identifié à V_+ de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccc} Sym^2V^{H_d} & \xrightarrow{\sim} & V_+; \\ \sum_\alpha a_\alpha X_\alpha X_{-\alpha} & \mapsto & \sum_\alpha a_\alpha Y_\alpha. \end{array} \tag{2.29}$$

Nous avons donc l'application steinerienne de degré 10

$$\begin{array}{rcl} St_+ : Hess(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathbb{P}Sym^2V^{H_p} \cong \mathbb{P}^4_+; \\ [\ldots : b_i : \ldots] & \mapsto & Ker(M_+[b_i]). \end{array}$$

En effet, soit $[\ldots : b_i : \ldots]$ le vecteur des coordonnées de $Th^+(A,L,\vartheta)$, alors $Ker(M_+[b_i])$ est le vecteur des coefficients r_i des quadriques de $\mathcal{I}_A(2)$. L'image de St_+ est la variété steinerienne de $\mathcal{B}$ et on la note $St(\mathcal{B})$. De plus, ce qui sera développé dans la section suivante, Hunt [Hun96] a montré que $St(\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}$, donc nous avons bien une application birationnelle de degré 10

$$St_+ : Hess(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}.$$

De plus, les coefficients r_i ne dépendent pas du fibré symétrique pair L dans le triplet $(A,L,\vartheta) \in \mathcal{A}_2(3,6)$. Cela veut dire que St_+ en tant que application rationnelle est birationnelle au morphisme d'oubli

$$f^+ : \mathcal{A}_2(3,6) \longrightarrow \mathcal{A}_2(3)$$

qui oublie le choix du fibré en droites. Cela prouve qu'il existe un isomorphisme birationnel $Q : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_2(3)$ et qu'on a le diagramme commutatif suivant.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_2(3,6) & \xrightarrow{Th^+} & Hess(\mathcal{B}) \subset \mathbb{P}^4 \\
f^+ \downarrow & & \downarrow St_+ \\
\mathcal{A}_2(3) & \xrightarrow{Q} & St_+(\mathcal{B}) = \mathcal{B}
\end{array}
$$

2.6.2 La restriction à $\mathbb{P}^3_-$

Si on restreint à $\mathbb{P}^3_-$ le système linéaire $|\mathcal{I}_A(2)|$ on obtient le système de cinq quadriques suivant, mis toujours sous forme matricielle:

(2.30)
$$
\begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \\ Q'_4 \\ Q'_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -Z_1^2 & -Z_2^2 & -Z_3^2 & -Z_4^2 \\ Z_1^2 & 0 & -2Z_3Z_4 & -2Z_2Z_4 & -2Z_2Z_3 \\ Z_2^2 & 2Z_3Z_4 & 0 & 2Z_1Z_4 & -2Z_3Z_1 \\ Z_3^2 & 2Z_2Z_4 & -2Z_1Z_4 & 0 & 2Z_1Z_2 \\ Z_4^2 & 2Z_3Z_2 & 2Z_1Z_3 & -2Z_1Z_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.
$$

On appelera $M_-[Z_i]$ la matrice anti-symétrique de l'équation 2.30. Le déterminant de $M_-[Z_i]$ est identiquement nul sur $\mathbb{P}^3_-$, comme elle est anti-symétrique et d'ordre impair. Donc là aussi nous pouvons définir une application de Steiner. Comme le noyau de $M_-[Z_i]$ est toujours le vecteur $(\dots,\alpha_i,\dots)$ des coefficients, nous avons $Im(St_+) = Im(St_-) = \mathcal{B}$.

$$
\begin{array}{rcl}
St_- : \mathbb{P}^3_- & \longrightarrow & \mathcal{B}; \\
[\dots : c_i : \dots] & \mapsto & Ker(M_-[c_i]).
\end{array}
$$

En effet la matrice $M_-[Z_i]$ a rang 4 pour $z = [\dots : Z_i : \dots] \in \mathbb{P}^3_-$ général. Donc sa comatrice a rang 1 et elle peut être écrite comme

$$
Ker(M_-[b_i]) \cdot Ker(M_-[b_i])^t.
$$

Cela implique que St_- est donnée par le système linéaire de quartiques obtenues comme pfaffiens des cinq sous-matrices 4×4 obtenues en effaceant la i-ème ligne et la i-ème colonne de la matrice de (2.30).
Cela donne lieu aux cinq expressions quartiques suivantes

(2.31)
$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_0 & = & 6Z_1Z_2Z_3Z_4, \\
\alpha_1 & = & -Z_1(Z_2^3 + Z_3^3 + Z_4^3), \\
\alpha_2 & = & Z_2(Z_1^3 + Z_3^3 + Z_4^3), \\
\alpha_3 & = & Z_3(Z_1^3 - Z_2^3 + Z_4^3), \\
\alpha_4 & = & Z_4(Z_1^3 + Z_2^3 - Z_3^3),
\end{array}
$$

qui ont 40 points de base [Cob17].

Proposition 16 *La "construction pfaffienne" définit une unirationalisation de $\mathcal{B}$ de degré 6*

$$\begin{array}{rcl} St_- : \mathbb{P}^3_- & \longrightarrow & \mathcal{B}, \\ [\ldots : Z_i : \ldots] & \mapsto & [\ldots : \alpha_i : \ldots], \end{array}$$

donnée par les quartiques du système 2.31.

De plus, les équations 2.31 permettent de prouver le théorème suivant.

Théorème 7 *[Hun96]*
La quartique de Burkhardt est auto-steinerienne, c'est à dire: $\mathcal{ST}(B) \cong B$.

Démonstration: L'image de St_- est a priori $\mathcal{ST}(\mathcal{B})$ et les six points de 2-torsion $A \cap \mathbb{P}^3_-$ par construction sont envoyés par St_- sur le même $\alpha := [\ldots : \alpha_i : \ldots] \in \mathcal{ST}(\mathcal{B})$, donc

$$St_- : \mathbb{P}^3_- \to \mathcal{ST}(B)$$

est une application de degré six. Les quartiques (2.31) ont 40 points de base, qui proviennent d'un arrangement défini par l'action de $G := Sp(4,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\pm Id$ (par les automorphismes de la structure theta symétrique) sur $\mathbb{P}^3_-$ et de plus St_- est équivariante par l'action de G. Cela implique que le degré de l'image est $\frac{1}{6}(64-40) = 4$ et que cette image est une hypersurface invariante de degré 4, donc par unicité la quartique de Burkhardt. $\square$

Donc nous avons aussi le corollaire suivant:

Corollaire 6 *[vdG87] Il existe un isomorphisme birégulier G-équivariant entre un ouvert de Zariski de $\mathcal{B}$ et un ouvert de Zariski de l'espace de modules de surfaces abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau 3.*

De plus nous connaîssonns explicitement l'ouvert de $\mathcal{A}_2(3)$ en question: il s'agit de l'ensemble des surfaces abéliennes irréductibles. En outre l'image du morphisme birégulier du Corollaire 6 est le complémentaire de la réunion de 40 planes 2-dimensionels contenus en $\mathcal{B}$. On notera V' l'ouvert de $\mathcal{A}_2(3)$, V celui de $\mathcal{B}$ et h le morphisme entre eux.

Lemme 5 *Par construction la fibre $St_-^{-1}(b)$ d'un point $b \in \mathcal{B}$ est égale à la réunion des six points (2.24) de la surface abélienne A_b dont b paramètre le coefficients de l'idéal de quadriques.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 8 *L'application thêta-null Th^- donnée par les fonctions thêta pairs induit un isomorphisme birationnel*

$$Th^- : \mathcal{A}_2(3)^- \longrightarrow \mathbb{P}^3_-.$$

Démonstration: Soit (A,L,ϑ) un élément de $\mathcal{A}_2(3)^-$. Nous rapellons que, lorsque L est impair, nous avons une identification $\Phi_\vartheta : \mathbb{P}^3_- \cong |L^3|^*_+$ ce qui permet d'écrire l'application thêta-null

$$\begin{array}{rcl} Th^- : \mathcal{A}_2(3)^- & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_-, \\ (A,L,\vartheta) & \mapsto & \Phi_\vartheta(\varphi_{L^3}(0)). \end{array}$$

Par définition $\mathcal{A}_2(3)^-$ est un quotient de $\mathbb{H}_2$ par le sous-groupe arithmétique de congruence $\Gamma_2(3)^-$ et donc, par le théorème de Baily-Borel [BB66], il s'agit d'une variété algébrique quasi-projective. nous considérons maintenant le sous-ensemble ouvert $U \subset \mathcal{A}_2(3)^-$ donné par les surfaces irréductibles. Nous remarquons aussi que, pour les surfaces dans notre espace de modules, $0 \in S_+$ et $\mathbf{BL}(|L^3|_+) = S_-$. Donc l'application thêta-null Th^- est définie partout et holomorphe sur U. Soit maintenant (A,L,φ) une sapp irréductible avec une structure de niveau 3 et soit

$$f^- : \mathcal{A}_2(3)^- \xrightarrow{6:1} \mathcal{A}_2(3)$$

le morphisme d'oubli du fibré en droites impair qui représente la polarisation. Le degré est 6 car la structure de niveau induit uniquement une structure thêta symétrique. Les six points de la fibre de f^- au-dessus de (A,L,φ) sont envoyés par Th^- sur les six points de S_+, c'est à dire l'intersection (2.24). Nous remarquons que ces six points de $\mathbb{P}^3_-$ constituent aussi la fibre de St^- au-dessus du point de $\mathcal{B}$ qui represente (A,L,φ). De plus, lorsque (A,L,φ) varie dans V', les six points couvrent tout $\mathbb{P}^3_-$, comme le déterminant de la matrice de l'équation 2.30 est zéro. Nous avons donc le diagramme d'applications rationnelles suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_2(3)^- & \xrightarrow{Th^-} & \mathbb{P}^3_- \\ f_- \downarrow & & \downarrow St_- \\ \mathcal{A}_2(3) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{B} \in \mathbb{P}^4_+ \end{array}$$

Les deux applications f_- et St_- ont degré 6 et l'application Q est génériquement bijective, donc Th^- est aussi une application génériquement bijective; étant donné qu'on travaille en caractéristique zéro cela implique l'assertion. $\square$

Corollaire 7 *L'espace de modules $\mathcal{A}_2(3)^-$ est rationnel.*

Remarque 4 *Soit $p \in \mathbb{P}^3_-$. Il est naturel de se demander s'il est possible de reconstruire le triplet $(A,L,\vartheta) \in \mathcal{A}_2(3)^-$ t.q. $Th^-(A,L,\vartheta) = p$. Les coordonnées de $St_-(p)$ dans $\mathbb{P}^4_+ \cong \mathbb{P}Sym^2V_2(3)^{H_p}$ sont les coefficients des neuf quadriques qui s'annulent sur $A \in \mathbb{P}^8 = \mathbb{P}V_2(3)^*$. Cela nous donne A. Nous remarquons ensuite que l'action de $\mathcal{H}_2(3)$ donne lieu à une inclusion*

$$\rho : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 \hookrightarrow PGL(V_3(2)). \tag{2.32}$$

En prenant les images de $0 \in A$ via les différentes transformations projectives données par ρ on obtient bien une structure de niveau 3 sur A. De plus, si nous considérons les six points $St^*_-(St_-(p))$, il existe une unique cubique gauche R_A qui passe par ces six points. Donc la variété abeliénne A peut être vue comme la variété Jacobienne de la courbe X_A obtenue comme rêvetement de $R_A \cong \mathbb{P}^1$ ramifié en $St_-^{-1}(St_-(p))$. Or p est un point de Weierstrass de X_A, ce qui est équivalent à un thêta caractéristique impair.

Remarque 5 *R.Salvati Manni et H.Freitag ([FSM04], Section 6) ont montré que la composition $St_- \circ Th_-$ donne cinq fonctions $B_1,\ldots,B_5$ sur $\mathbb{H}_2$ qui sont des formes modulaires par rapport à $\Gamma_2(3)$, en donnant ainsi une autre démonstration du fait que $\mathcal{B}$ est birationnelle à la compactification de Satake de $\mathcal{A}_2(3)$. Nous conjecturons que les quatre composantes de Th_- soient des formes modulaires par rapport à $\Gamma_2(3)^-$.*

La quartique de Burkhardt est une hypersurface singulière avec 45 points doubles ordinaires, ce qui caractérise B parmi les quartiques dans $\mathbb{P}^4$, comme 45 est le nombre maximal de noeuds qu'une telle variété peut avoir (borne de Varchenko). Pour un point $p \in B$ général, la section hyperplane tangente $\mathbf{T}_pB \cap B$ est une quartique nodale avec un unique noeud au point de tangence et $St_-^{-1}(\mathbf{T}_pB \cap B)$ est une quartique du système (2.31) avec six noeuds aux images inverses de p, les 6 points de 2-torsion $A \cap \mathbb{P}^3_-$.

Le système linéaire de quadriques obtenu de l'équation 2.30 a dimension 4 comme la matrice a déterminant identiquement zéro. De plus, nous pouvons prouver par des calculs explicites le théorème suivant.

Théorème 9 *[Cob17] La surface $St_-^{-1}(\mathbf{T}_pB \cap B)$ est la surface de Weddle obtenue comme surface jacobienne du système linéaire de quadriques obtenu de l'équation* 2.30.

Chapitre 3

La surface de Weddle et les classes d'extensions invariantes sur une courbe de genre 2

Soit C une courbe lisse de genre g. On note $H^0(\omega)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur C. Le groupe d'homologie $H_1(C,\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de rang $2g$. L'application injective

$$\begin{array}{rcl} \rho : H_1(C,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\omega)^* \\ \gamma & \mapsto & \int_\gamma \end{array}$$

nous permet de considérer $H_1(C,\mathbb{Z})$ comme un réseau de $H^0(\omega)^*$. La variété jacobienne de C, définie par

$$JC := H^0(\omega)^*/\rho(H_1(C,\mathbb{Z}),$$

est un tore complexe qui admet une polarisation principale. De plus JC paramètre les fibrés en droites de degré 0 sur C. Soit en outre $Pic^d(C)$ la variété de Picard (isomorphe à JC) qui paramètre les fibrés en droites de degré d sur C, évidemment $JC = Pic^0(C)$. La variété $Pic^{g-1}(C)$ contient canoniquement le diviseur theta défini ensemblistement par

$$\Theta := \{L \in Pic^{g-1} | h^0(C,L) > 0\}.$$

En tant que diviseur, Θ est symétrique par rapport à l'involution

$$\epsilon : \xi \mapsto \omega \otimes \xi^{-1}$$

sur $Pic^{g-1}(C)$ et sa classe d'équivalence algébrique définit une polarisation principale sur le tore complexe $Pic^{g-1}(C)$. Dans cette classe d'équivalence il existe 2^{2g} diviseurs symétriques, qui sont les translatés de Θ par les points de 2-torsion de JC. Si par contre on translate Θ par une thêta caractéristique, i.e. un fibré F t.q. $F^{\otimes 2} = \omega$, on obtient un diviseur symétrique (cette fois par rapport à l'involution $\pm Id$) sur JC. Ce diviseur sera noté Θ_0. Soient maintenant Θ_α et Θ_β deux translatés de Θ par deux points $\alpha,\beta \in JC[2]$, alors par le théorème du carré les deux diviseurs $2\Theta_\alpha$ et $2\Theta_\beta$ sont linéairement équivalents. Nous avons un résultat analogue en translatant Θ par deux thêta caractéristiques différentes.

On note $K^0 \cong JC/\pm Id$ la surface de Kummer obtenue comme image de la jacobienne dans l'espace projectif $|2\Theta_0|^*$ et $K^1 \cong Pic^1(C)/\epsilon$ celle obtenue comme image de $Pic^1(C)$ dans $|2\Theta|^*$.

L'espace projectif dual $|2\Theta|^*$ peut être canoniquement identifié à $|2\Theta_0|$. En effet il existe un isomorphisme canonique d_w, appelé dualité de Wirtinger [Mum74],

$$d_w : |2\Theta_0| \xrightarrow{\cong} |2\Theta|^*.$$

L'isomorphisme d_w est caractérisé par la propriété que, pour $L \in Pic^1(C)$, nous avons

$$d_w(\Theta_L + \Theta_{\omega\otimes L}) = \{D \in |2\Theta| : L \in D\},$$

avec $\Theta_L = \{\xi \in JC : h^0(\xi \otimes L) > 0\}$, le translaté de Θ par L.

Avant de se réduire à l'étude des fibrés vectoriels de rang 2, nous exposons quelques résultats utiles à propos du cas de rang général. Soit E un fibré vectoriel de rang r sur C. On définit son *déterminant* comme le fibré en droites

$$det(E) = \bigwedge^r E.$$

C'est un fibré en droites dont le degré sera appelé *le degré du fibré vectoriel E* et il sera noté $deg(E)$. On définit la notion de *pente* de E comme le nombre

$$\mu(E) = \frac{deg(E)}{r}.$$

Un fibré vectoriel est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré propre, on a l'inégalité

$$\mu(F) \leq \mu(E) \qquad (resp.\ \mu(F) < \mu(E)).$$

Nous introduirons une relation d'équivalence due à C.S. Seshadri [Ses67]. Tout fibré vectoriel semi-stable E admet une filtration de Jordan-Hölder strictement croissante

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{k-1} \subset E_k = E,$$

telle que chaque quotient E_i/E_{i-1} est stable, pour $i = 1, \ldots, k$. Nous appelons

$$gr(E) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i/E_{i-1}$$

le *fibré gradué associé* à E. Donc, deux fibrés vectoriels semi-stables E et E' sont S-équivalents si $gr(E) \cong gr(E')$. En particulier, deux fibrés stables E et E' sont S-équivalents si et seulement si ils sont isomorphes. Or, si nous fixons un fibré en droites L (dans notre cas il s'agira de $\mathcal{O}$) on notera $\mathcal{SU}_C(r,L)$ *l'espace de modules grossier des classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables sur C de rang r et déterminant fixé L.* En particulier on notera $\mathcal{SU}_C(r)$ lorsque $L = \mathcal{O}$. Dans [Ses67] Seshadri introduit l'espace de modules $\mathcal{U}_C(r,d)$ des classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables sur C de rang r et degré d. Il prouve qu'il s'agit d'une variété projective normale et irréductible de dimension

$$dim \mathcal{U}_C(r,d) = r^2(g-1) + 1,$$

où g est toujours le genre de la courbe C. De plus $\mathcal{U}_C(r,d)$ est une fibration sur $Pic^d(C)$:

$$det : \mathcal{U}_C(r,d) \longrightarrow Pic^d(C).$$

La fibre au-dessus d'un point L de $Pic^d(C)$ est exactement $\mathcal{SU}_C(r,L)$. On voit donc que

$$dim(\mathcal{SU}_C(r,L)) = (r^2-1)(g-1).$$

$\mathcal{SU}_C(r)$ est donc une variété projective irréductible, dont le lieu singulier consiste exactement en les points non-stables, sauf si $r = 2$, $g = 2$. Dans ce cas $\mathcal{SU}_C(2) \cong \mathbb{P}^3$ est lisse. On définit une application rationnelle

$$\theta : \mathcal{SU}_C(r) \dashrightarrow |r\Theta| \tag{3.1}$$

telle que $\theta(E)$ est le diviseur de support

$$\{L \in Pic^g | h^0(C, E \otimes L) \neq 0\}.$$

Pour certaines valeurs de r et g il existe des éléments E dans $\mathcal{SU}_C(r)$ tels que $\theta(E) = Pic^{g-1}(C)$. M. Raynaud [Ray82] a donné des exemples de tels fibrés vectoriels et des conditions sous lesquelles $\theta(E)$ définit un diviseur dans $Pic^{g-1}(C)$. En particulier les résultats de Raynaud montrent que l'application θ est bien définie pour $r = 2$ en genre quelconque et pour $r = 3$ et $g = 2$.

Lorsque $r = 2$ le système linéaire $|2\Theta|$ est particulièrement intéressant car il contient la variété de Kummer K^0, i.e. le quotient de la jacobienne JC par l'involution $a \mapsto -a$. Donc l'application

$$\begin{array}{ccc} JC & \longrightarrow & |2\Theta| \\ a & \mapsto & \Theta_a + \Theta_{-a} \end{array}$$

factorise par le plongement $\kappa : K^0 \hookrightarrow |2\Theta|$. Le lieu non-stable de $\mathcal{SU}_C(2)$ est formé des fibrés vectoriels de la forme $M \oplus M^{-1}$, avec $M \in JC$ et s'identifie à K^0. Pour $g \geq 3$ ces fibrés forment le lieu singulier de $\mathcal{SU}_C(2)$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} K^0 \arrow[d] \arrow[dr, "\kappa"] & \\ \mathcal{SU}_C(2) \arrow[r, "\theta"] & {|2\Theta|} \end{tikzcd}$$

On résume dans le théorème suivant les résultats connus sur l'application θ pour les fibrés de rang 2.

Théorème 10

a) *Pour g=2, θ est un isomorphisme de $\mathcal{SU}_C(2)$ avec $|2\Theta| \simeq \mathbb{P}^3$ ([NR69],théorème 7.2)*

b) *Pour $g \geq 3$ et C hyperelliptique, θ est fini de degré 2 sur une sous-variété de $|2\Theta|$ qui est décrite explicitement dans [DR77]*

c) *Pour $g \geq 3$ et C non-hyperelliptique, θ est un plongement [vGI01].*

Dans le reste de ce chapitre C sera une courbe lisse de genre 2 et

$$\lambda : C \to C$$

l'involution hyperelliptique sur C, i.e. $\lambda^2 = Id$ et $C/\lambda \cong \mathbb{P}^1$. Dans ce cas l'application d'Abel-Jacobi

$$\begin{array}{cccc} (3.2) & AJ : C & \longrightarrow & Pic^1(C), \\ & p & \mapsto & \mathcal{O}_C(p). \end{array}$$

définit un isomorphisme entre C et $\Theta \subset Pic^1(C)$. De plus, en faisant le quotient de C par l'involution λ on obtient un rêvetement de $\mathbb{P}^1$ ramifié en six points. Les six points de C fixés par λ sont appelés les *points de Weierstrass* et ils sont envoyés par AJ sur les six thêta caractéristiques impairs contenues dans $Pic^1(C)$. D'autre part le lieu fixe de l'involution ϵ est la réunion des 16 thêta caractéristiques et nous avons

$$\epsilon_{|\Theta \cong C} = \lambda : C \longrightarrow C.$$

Soit $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$ le fibré en droites défini par le diviseur Θ. Comme Θ est un diviseur symétrique, quitte à choisir une linéarisation de ϵ nous avons une action

$$\epsilon^\sharp : H^0(Pic^1(C),\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)) \longrightarrow H^0(Pic^1(C),\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)),$$

et de manière plus générale sur tous les espaces de sections globales des fibrés $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(n\Theta)$. En particulier nous avons deux choix: selon le choix de la linéarisation l'unique section θ de $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$ sera invariante où anti-invariante. Nous choisirons la linéarisation

$$\nu : \epsilon^*\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$$

par rapport à laquelle $\theta \in H^0(Pic^1(C),\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta))_-$. Par la formule du point fixe de Atiyah-Bott-Lefschetz cela entraîne que ν induit l'identité sur la fibre de $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$ au-dessus de chaque thêta-caractéristique impair et $-Id$ sur la fibre au-dessus de chaque thêta-caractéristique pair. Toujours par la formule de Atiyah-Bott-Lefschetz nous trouvons que ce choix implique que

$$h^0(Pic^1(C),3\Theta)_+ - h^0(Pic^1(C),3\Theta)_- = \frac{6-10}{4} = -1.$$

Ce qui implique, comme $h^0(Pic^1(C),3\Theta) = 9$, que

$$h^0(Pic^1(C),3\Theta)_- = 5,$$
$$h^0(Pic^1(C),3\Theta)_+ = 4.$$

Remarque 6 *Soit $\kappa \in Pic^1(C)$ une thêta caractéristique impair et $\Theta_0 \cong t_\kappa^*\Theta$ le diviseur thêta symétrique sur JC translaté de Θ par κ. Alors notre linéarisation ν induit l'isomorphisme normalisé*

$$\mathcal{O}_{JC}(\Theta_0) \xrightarrow{t_\kappa^*\nu} t_\kappa^*\lambda^*\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta) \cong i^*\mathcal{O}_{JC}(\Theta_0)$$

sur $\mathcal{O}_{JacC}(\Theta_0)$. La forme quadratique induite donc par ν sur $JacC[2]$ est impair. La Proposition 5 dit donc que, pour tout n entier positif, le lieu de base de $H^0(JacC,n\Theta_0)_+$ (resp. $H^0(JC,n\Theta_0)_-$) est le sous-ensemble S_- (resp. S_+) de $JacC[2]$ où κ prends la valeur $+1$ (resp. -1). Nous translatons donc ces lieux de base par κ et nous obtenons, par la formule 1.4, les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbf{BL}(|n\Theta|_+) &= \{ \text{ thêta caractéristiques pairs,} \} \\ \mathbf{BL}(|n\Theta|_-) &= \{ \text{ thêta caractéristiques impairs} \}. \end{aligned}$$

3.1 Classes d'extensions du fibré canonique

Soit ω le fibré canonique sur C. Nous introduisons l'espace projectif de dimension 4

$$\mathbb{P}^4_\omega := \mathbb{P}Ext^1(\omega,\omega^{-1}) = |\omega^3|^*.$$

Un point $e \in \mathbb{P}^4_\omega$ correspond à une classe d'isomorphisme

$$0 \longrightarrow \omega^{-1} \longrightarrow E_e \longrightarrow \omega \longrightarrow 0, \qquad (e).$$

On note φ l'application rationnelle classifiant

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^4_\omega & \dashrightarrow & |2\Theta| \\ e & \mapsto & \text{classe de S-équivalence de } E_e. \end{array}$$

L'idée d'utiliser les classes d'extensions pour étudier des fibrés vectoriels a été utilisée par Grothendieck pour prouver que tout fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ est la somme directe de fibrés en droites. Atiyah [Ati57] a utilisé les extensions pour étudier les fibrés vectoriels sur une courbe elliptique et Newstead [New67] les a utilisées pour analyser l'espace de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang 2 sur une courbe de genre 2.

Un des théorèmes principaux de [Ber92] (Théorème 2) est le suivant.

Théorème 11 *Soit $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de la courbe $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$, alors φ induit par image inverse une identification naturelle*

$$H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1)) \cong H^0(\mathbb{P}^4_\omega,\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}(2)).$$

Cela entraîne que l'application classifiante φ est l'application rationnelle donnée par le système linéaire complet des quadriques contenues dans l'idéal de $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$. De plus nous avons plus d'informations sur le lieu des extensions semistables, comme le lemme suivant explique.

Lemme 6 *[Ber92] Soit $e \in \mathbb{P}^4_\omega$ une classe d'extension et Sec(C) la variété des sécantes de $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$, alors le fibré vectoriel E_e n'est pas semistable si et seulement si $e \in C$ et il n'est pas stable si et seulement si $e \in Sec(C)$.*

Remarque 7 *Nous pouvons dire même plus. En effet, étant donnés deux points $x,y \in C$, les droites sécantes $\overline{xy}$ et $\overline{\lambda(x)\lambda(y)}$ sont la fibre de φ au-dessus de la classe de S- équivalence de $\omega(-x-y)\oplus\omega^{-1}(x+y) \cong \omega^{-1}(\lambda(x)+\lambda(y)) \oplus \omega(-\lambda(x) - \lambda(y))$.*

Le Lemme précédent implique directement le Corollaire suivant.

Corollaire 8 *L'image de la variété des sécantes $Sec(C)$ par l'application classifiante φ est la surface de Kummer $K^0 \subset |2\Theta|$*

Démonstration: Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : Sym^2C & \longrightarrow & K^0, \\ x+y & \mapsto & \omega(-x-y) \end{array}$$

est surjective donc chaque couple de sécantes $\overline{xy}$ et $\overline{\lambda(x)\lambda(y)}$ est envoyé sur le point $\omega^{-1}(\lambda(x)+\lambda(y)) \oplus \omega(-\lambda(x)-\lambda(y))$ de la surface K^0.□

3.1.1 Extensions invariantes

L'involution hyperelliptique λ agit naturellement sur les fibrés en droites sur C; nous serons particulièrement intéressés à l'action sur ω^3 et sur son espace de sections globales $H^0(C,\omega^3)$. Le théorème de Riemann-Roch et la dualité de Serre donnent

$$h^0(C,\omega^3) = h^0(C,\omega^3) - h^0(C,\omega^{-3} \otimes \omega) = 6+1-2 = 5.$$

Soit $\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ l'application hyperelliptique. Il existe une linéarisation canonique pour l'action de λ sur ω qui vient du fait que $\omega = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. En effet nous avons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\lambda} & C \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{Id} & \mathbb{P}^1 \end{array} \tag{3.3}$$

Ce qui fournit un isomorphisme

$$\delta : \lambda^*\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \lambda^*\omega \xrightarrow{\sim} \omega = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Comme $\omega = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, l'involution δ agit trivialement sur les fibres au-dessus des points de Weierstrass. Cela veut dire que

$$Tr(\lambda(w_i) : L_{w_i} \longrightarrow L_{w_i}) = 1,$$

pour tout point de Weierstrass w_i. En outre nous avons $d\lambda(w_i) = -1$, ce qui entraîne que, par la formule du point fixe de Atiyah-Bott-Lefschetz ([GH78], page 421),

$$h^0(C,\omega^3)_+ - h^0(C,\omega^3)_- = \sum_{w_i} \frac{Tr(\lambda(w_i))}{det(Id - d\lambda_{w_i})} = \frac{6}{2} = 3.$$

Comme $h^0(C,\omega^3)_+ + h^0(C,\omega^3)_- = 5$, cela implique $h^0(C,\omega^3)_+ = 4$ et $h^0(C,\omega^3)_- = 1$. De plus on voit que l'unique diviseur de $H^0(C,\omega^3)_-$ est $w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6$.

D'autre part λ agit sur les classes d'extensions représentées par les points de $\mathbb{P}^4_\omega$ par la formule suivante:

$$E_{\lambda(e)} = \lambda^* E_e.$$

Cela veut dire qu'à un point invariant de $\mathbb{P}^4_\omega$ correspond une classe d'extension dont le fibré associé est invariant. Nous noterons donc

$$\mathbb{P}^3_{\omega+} := \mathbb{P}H^0(C,\omega^3)^*_+$$

le sous-espace de $\mathbb{P}^4_\omega$ dont les éléments représentent les classes d'extensions invariantes. Nous serons particulièrement intéressés au sous-ensemble fermé de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ qui paramètre les fibrés non-stables. Celui-ci est la variété

$$W' := Sec(C) \cap \mathbb{P}^3_{\omega+}.$$

En effet W' n'est pas une intersection générale de $Sec(C)$, comme le Lemme suivant l'explique.

Lemme 7 *L'hypersurface $W' \subset \mathbb{P}^3_{\omega+}$ est une surface quartique. L'hyperplan $\mathbb{P}^3_{\omega+} \subset \mathbb{P}^4_\omega$ est partout tangent à $Sec(C)$.*

Démonstration: Le degré de $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$ est égal à 6. Nous avons

$$dim(Sec(C)) = 2dim(C) + 1 = 3,$$

donc la variété des sécantes $Sec(C)$ est une hypersurface dans $\mathbb{P}^4_\omega$. Afin de calculer le degré de $Sec(C)$, nous considérons la projection

$$\psi : \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

ayant comme centre une droite générale contenue dans $\mathbb{P}^4_\omega$; alors $deg(Sec(C))$ est donné par le nombre de noeuds de $\psi(C) \subset \mathbb{P}^2$.
Comme C ne coupe pas une droite générale dans $\mathbb{P}^4_\omega$, $\psi(C)$ est une sextique plane et donc son genre arithmétique est $\frac{(6-1)(6-2)}{2} = 10$. Cela implique, par la formule du genre, comme on sait que son genre géométrique est 2, que $\psi(C)$ a 8 noeuds, d'où $deg(Sec(C)) = 8$. Or nous devons calculer le nombre d'intersections d'un $\mathbb{P}^1$ général contenu dans $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ avec W'. On suppose que la droite coupe en un point z la sécante $\overline{pq}$, avec $p,q \in C$. Le théorème de Riemann-Roch nous donne dans ce cas

$$h^0(C,\omega^3(-p-q-\lambda(p)-\lambda(q))) = 2,$$

ce qui veut dire que $p,q,\lambda(p)$ et $\lambda(q)$ sont contenus dans un $\mathbb{P}^2$. D'après cela les sécantes $\overline{pq}$ et $\overline{\lambda(p)\lambda(q)}$ se coupent en un point de ce $\mathbb{P}^2$ qui ne peut être que z. Donc $deg(W') \leq \frac{8}{2} = 4$. De plus, par Riemann-Roch, $p,q,\lambda(p)$ et $\lambda(q)$ sont les uniques points de C t.q. $h^0(C,\omega^3(-p-q-\lambda(p)-\lambda(q))) = 2$. Cela implique qu'il n'existe pas d'autre sécante $\overline{hk}$, différente de $\overline{pq}$ et $\overline{\lambda(p)\lambda(q)}$, qui passe par z. Donc $deg(W') = 4$ et $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ est partout tangent à $Sec(C)$.□

Par la suite on notera

$$\mathcal{W} := \{w_1, \ldots, w_6\}$$

l'ensemble des six points de Weierstrass. Nous remarquons que

$$C \cap \mathbb{P}^3_{\omega+} = \mathcal{W} \text{ et } C \subset Sing(Sec(C)), \tag{3.4}$$

donc W' est une surface quartique contenue dans $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ qui est singulière en $\mathcal{W}$ et qui contient les $\binom{6}{2} = 15$ droites qui passent par les couples de points de $\mathcal{W}$.

De plus, une partition de $\mathcal{W}$ en deux sous-ensembles de cardinal 3 définit un couple de $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3_{\omega+}$ distincts, chacun engendré par trois des six points de Weierstrass. Nous avons $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$ partitions de $\mathcal{W}$ en deux sous-ensembles de 3 points. À chaque partition nous pouvons associer le $\mathbb{P}^1$ obtenu comme intersection des deux $\mathbb{P}^2$. On note $\mathbb{P}^2_{123}$ le plan projectif qui contient w_1,w_2,w_3 et $\mathbb{P}^2_{456}$ celui qui contient w_4,w_5,w_6. De plus on notera $\mathbb{P}^1_{123} = \mathbb{P}^1_{456}$ la droite obtenue comme intersection de $\mathbb{P}^2_{123} \cap \mathbb{P}^2_{456}$.

Proposition 17 *La surface W' contient les 10 droites $\mathbb{P}^1_{ijk}$, pour tout ensemble*

$$\{i,j,k\} \subset \mathcal{W}$$

de cardinal 3.

Démonstration: Nous prouverons la Proposition pour $\mathbb{P}^1_{123}$, comme pour les autres droites la démonstration est la même. Par dualité un hyperplan $\mathbb{P}^2$ de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ peut être vu comme un diviseur de $|\omega^3|_+$. En suivant cette idée, $\mathbb{P}^2_{123}$ est associé au diviseur $D_{123} := 2w_1 + 2w_2 + 2w_3$ et $\mathbb{P}^2_{456}$ est associé au diviseur $D_{456} := 2w_4 + 2w_5 + 2w_6$. En suivant le même principe, $\mathbb{P}^1_{123}$ est associé au pinceau engendré par D_{123} et D_{456}. Soit

$$\rho : \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

la projection de centre $\mathbb{P}^1_{123}$. Si la restriction de ρ à C induit une application de degré plus grande que 1, alors $\mathbb{P}^1_{123} \subset W'$. Nous noterons en outre κ la thêta caractéristique $\omega^{-1}(w_1 + w_2 + w_3)$. L'annulateur de $\mathbb{P}^1_{123}$ dans $|\omega^3|$ est le sous-système linéaire

$$Sym^2(H^0(C,\omega\kappa)) = \langle D_{123}, D_{456}, \sum_{i=1}^{6} w_i\rangle \subset H^0(\omega^3).$$

D'autre part, d'après la première égalité de l'équation 3.4 on trouve que $\mathbb{P}^1_{123} \cap C = \emptyset$. Cela entraîne que, une fois restreint à C, ρ est un morphisme. Soit $Y \subset \mathbb{P}Sym^2(H^0(C,\omega\kappa))^*$ l'image de C. Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \alpha\downarrow \quad \searrow\rho & \\ \mathbb{P}^1 = & |\omega\kappa|^* \quad \hookrightarrow & Y \subset \mathbb{P}Sym^2(H^0(C,\omega\kappa))^* \end{array}$$

où la flèche verticale α est l'application de degré 3 définie par le système linéaire $|\omega\kappa|$. Cela implique que le morphisme ρ est de degré 3 et Y une conique plane. Il nous reste à prouver que nous ne sommes pas dans le cas particulier où toutes les sécantes de C coupent $\mathbb{P}^1_{123}$ en un seul point. Nous supposons qu'un tel point $x \in \mathbb{P}^1_{123}$ existe et nous projetons avec centre x. Soit π_x cette projection et Z l'image de C par π_x. Alors Z est une courbe non dégénérée contenue dans $\mathbb{P}^3$ et $deg(Z) \cdot deg(\pi_x) = 6$; de plus, comme nous supposons que toutes les sécantes passent par x, $deg(\pi_x) \geq 2$. Donc le seul cas à vérifier est $deg(Z) = 3$ et $deg(\pi_x) = 2$, mais alors par le Lemme de Castelnuovo Z est une cubique gauche; c'est à dire, la projection π_x est la composition

$$C \xrightarrow{2:1} Z \hookrightarrow \mathbb{P}Sym^3 H^0(C,\omega)^*$$

de l'application canonique avec le $3^{ème}$ morphisme de Veronese. Cela implique que le $\mathbb{P}^3$ qui contient Z est isomorphe à $\mathbb{P}Sym^3 H^0(C,\omega)^* \cong \mathbb{P}^3_{\omega+}$, mais cela est absurde, comme $x \in \mathbb{P}^3_{\omega+}$. Cela veut dire qu'au moins une droite sécante C coupe $\mathbb{P}^1_{123}$ en chaque point, c'est à dire $\mathbb{P}^1_{123} \subset W'$.$\square$

Nous considérons maintenant la surface de Picard $Pic^1(C)$ et son diviseur Θ de Riemann. En considérant le fait que Θ est en effet une sous-variété de $Pic^1(C)$, nous avons la suite exacte classique suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Pic^1(C)}(2\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{Pic^1(C)}(3\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(3\Theta) \longrightarrow 0.$$

De plus, la formule d'adjonction donne $\mathcal{O}(\Theta)_{|C\cong\Theta} = \omega_C$. Cela entraîne, comme $h^1(Pic^1(C),2\Theta) = 0$, la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow H^0(Pic^1(C),2\Theta) \longrightarrow H^0(Pic^1(C),3\Theta) \xrightarrow{res_{|\Theta}} H^0(C,\omega^3) \longrightarrow 0. \tag{3.5}$$

En effet nous avons une application de restriction surjective

$$res_{|\Theta} : H^0(Pic^1(C),3\Theta) \longrightarrow H^0(C,\omega^3).$$

Or l'application de Abel-Jacobi 3.2 plonge C dans $Pic^1(C)$ comme le diviseur thêta et les images des points de Weierstrass sont les 6 thêta caractéristiques impairs. De plus nous remarquons que

$$\tau_{|\Theta\cong C} = \lambda : C \longrightarrow C.$$

De plus nous avons choisi des linéarisations sur C et $Pic^1(C)$ qui sont compatibles, dans le sens que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \tau^*\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta) & \stackrel{\nu}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta) \\ \downarrow^{res_\Theta} & & \downarrow^{res_\Theta} \\ \lambda^*\omega & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & \omega \end{array}$$

Cela veut dire que les morphismes de restriction respectent la décomposition en espaces propres de $H^0(Pic^1(C),3\Theta)$ et $H^0(C,\omega^3)$. En outre, comme toutes sections de $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(2\Theta)$ sont invariantes et (à cause du choix de la polarisation) l'unique section de $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$ est anti-invariante, l'image de $H^0(Pic^1(C),2\Theta)$ dans $H^0(Pic^1(C),3\Theta)$ est contenue dans le sous-espace anti-invariant. Ceci nous donne la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H^0(Pic^1(C),2\Theta) \longrightarrow H^0(Pic^1(C),3\Theta)_- \longrightarrow H^0(C,\omega^3)_- \longrightarrow 0.$$

Il existe donc un isomorphisme:

$$M : H^0(Pic^1,3\Theta)^*_+ \stackrel{\sim}{\longrightarrow} H^0(C,\omega^3)^*_+. \tag{3.6}$$

Remarque 8 *En tant que modèle birationnel de K^1, la surface W contient un ensemble intéressant de courbes rationnelles. En effet elle a six points doubles en les thêta caractéristiques impairs et l'image du diviseur $\Theta/\lambda = \mathbb{P}^1 \subset K^1$ est l'unique cubique gauche qui passe par ces six noeuds. Les autres 15 sections hyperplanes de K^1 obtenues comme $t_a^*\Theta$ pour $a \in JC[2]$ sont envoyées sur les 15 droites qui passent par deux noeuds. Les dix thêta caractéristiques sont éclatées et les diviseurs exceptionnels sont les dix droites obtenues en intersectant deux plans dans $|3\Theta|^*_+$ qui contiennent trois noeuds.*

D'autre part, nous avons le lemme suivant:

Lemme 8 *Soient F et F' deux surfaces quartiques irreductibles. Si F et F' ont 25 droites en commun, alors $F \cong F'$.*

Démonstration: Deux surfaces quartiques dans $\mathbb{P}^3$ coïncident ou, si $dim(F \cap F') = 1$, se coupent en une courbe de degré 16. Mais une telle courbe ne peut pas contenir les 25 droites que F et F' ont en commun, donc les deux surfaces coïncident.$\square$

Théorème 12 *Soit C une courbe lisse de genre 2. Le lieu des classes d'extensions de ω par ω^{-1} strictement semi-stables et λ-invariantes est la surface de Weddle $W \subset \mathbb{P}H^0(Pic^1(C),3\Theta)^*_+$ image de $Pic^1(C)$. Les six noeuds de W représentent les extensions non semi-stables.*

Démonstration: L'identification

$$\mathbb{P}(M) : |3\Theta|^*_+ \longrightarrow |\omega^3|^*_+$$

envoie les images des thêta caractéristiques impairs de $Pic^1(C)$ sur les images des points de Weierstrass de C. Nous avons donc deux surfaces quartiques W et W' qui ont 25 droites en commun: les 15 droites par les couples de points de $\mathcal{W}$ plus les 10 qui apparaissent comme intersection des deux $\mathbb{P}^2$ qui contiennent chacun trois points de $\mathcal{W}$. Cela entraîne, par le Lemme 8 et par l'identification $\mathbb{P}(M)$, que

$$W \cong W'.$$

Ceci implique l'énoncé.$\square$

3.1.2 Un diagramme commutatif

Dans cette section nous prouverons que W' et W ne coïncident pas seulement mais elles font partie d'un diagramme commutatif, qui comprend aussi les surfaces de Kummer K^0 et K^1 et l'application de dualité entre elles. D'abord nous étudierons l'application suivante:

$$\begin{array}{rcl} S : Sym^2C & \dashrightarrow & W' = Sec(C) \cap \mathbb{P}^3_{\omega+}, \\ x+y & \mapsto & \overline{xy} \cap \mathbb{P}^3_{\omega+}. \end{array}$$

S est l'application rationnelle qui envoie un couple (non ordonné) de points x,y de C sur l'intersection de la sécante $\overline{xy}$ avec $\mathbb{P}^3_{\omega+}$.

Lemme 9 *S se factorise à travers Sym^2C/λ et l'application induite est génériquement bijective.*

Démonstration: Dans la démonstration du Lemme 7 nous avons vu que deux sécantes $\overline{xy}$ et $\overline{pq}$ coupent $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ au même point si et seulement si $x = \lambda(p)$ et $y = \lambda(q)$. Cela implique directement l'assertion. Comme les droites $\overline{w_iw_j}$, w_i,$w_j \in \mathcal{W}$, sont les uniques sécantes contenues dans $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ le lieu exceptionnel de l'application S est donné par les produits symétriques des points de $\mathcal{W}$.$\square$

Nous appellerons $S_\lambda : Sym^2C/\lambda \dashrightarrow W'$ l'application induite. De plus nous avons aussi un morphisme de Sym^2C à K^0, défini de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \varepsilon : Sym^2C &\longrightarrow K^0, \\ x+y &\mapsto \omega(-x-y). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous remarquons que l'application ε se factorise par Sym^2C/λ comme

$$(\omega(-x-y))^{-1} \equiv \omega(-\lambda(x)-\lambda(y)).$$

Par analogie au cas de S, on note

$$\varepsilon_\lambda : Sym^2C/\lambda \to K^0$$

l'application induite. Nous remarquons en outre que l'inverse birationnel de ε_λ, $\varepsilon_\lambda^{-1} : K^0 \dashrightarrow Sym^2C/\lambda$, est l'éclatement de K^0 au point correspondant à $\mathcal{O}$. Cela nous permet de formuler la Proposition suivante.

Proposition 18 *L'application composée $N = \varphi \circ S_\lambda \circ \varepsilon_\lambda^{-1} : K^0 \dashrightarrow K^0$ est l'identité sur un ouvert de Zariski.*

Démonstration: Soit U l'ouvert de Zariski de K^0 complémentaire aux 16 diviseurs Thêta symétriques. Nous prouverons que $M_{|U} = Id_{|U}$. Soient $x,y \in C$ et $\omega(-x-y) \equiv \omega(-\lambda(x)-\lambda(y))$ un point de U. D'après la Remarque 7 on voit que $N(\omega(-x-y))$ est la classe de S-équivalence du fibré $\omega(-x-y) \oplus \omega(-\lambda(x)-\lambda(y))$.$\square$

Nous donnons maintenant un analogue de la proposition 9 pour $Pic^1(C)$ et le fibré en droites $\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(\Theta)$.

Proposition 19 *Soit Θ le diviseur thêta de Riemann sur $Pic^1(C)$. Il existe une injection canonique*

$$Q_\Theta : H^0(Pic^1(C),2\Theta) \hookrightarrow Sym^2H^0(Pic^1(C),3\Theta)_+$$

dont l'image est l'espace des quadriques sur $|3\Theta|_+^*$ qui passent par les six thêta caractéristiques impairs.

Remarque 9 *La démonstration de la proposition 19 est analogue à celle de la Proposition 9. D'autre part, l'image de l'évaluation de*

$$Q_\Theta(H^0(Pic^1(C),2\Theta)) \subset Sym^2H^0(Pic^1(C),3\Theta)_+$$

dans $H^0(Pic^1(C),6\Theta)_+ \cong Sym^3H^0(Pic^1(C),2\Theta)$ est le sous-espace de dimension 4 des cubiques polaires de K^1.

De plus nous avons le lemme suivant.

Lemme 10 *L'application linéaire de restriction*

$$res : H^0(\mathbb{P}^4_\omega, \mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}(2)) \to H^0(\mathbb{P}^3_{\omega+}, \mathcal{O}(2))$$

est injective et son image est l'espace des quadriques sur $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ *contenues dans l'idéal de* $\mathcal{W}$.

Démonstration: Une quadrique dans le noyau de res est la réunion de $\mathbb{P}^3_{\omega+} \subset \mathbb{P}^4_\omega$ et un autre hyperplan, mais $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$ n'est contenu dans aucun hyperplan, donc l'application est injective. La deuxième assertion vient du fait que $C \cap \mathbb{P}^3_{\omega+} = \mathcal{W}$.$\Box$

Nous sommes donc prêts pour énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 13 *Soit*

$$\mathcal{D} : K^1 \dashrightarrow K^0$$

l'application birationnelle de dualité et

$$\chi : K^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3_{\omega+}$$

l'application birationnelle donnée par le système linéaire $|3\Theta|_+$, *alors* $\chi = S \circ \varepsilon_\lambda^{-1} \circ \mathcal{D}$ *en tant qu'applications rationnelles, i.e. elles coïncident sur un ouvert. Donc le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccccc} Sym^2C/\lambda & \xrightarrow{S_\lambda} & Sec(C) \cap \mathbb{P}^3_{\omega+} = W & \xrightarrow{\varphi} & K^0 \subset |2\Theta| \\ \varepsilon_\lambda \downarrow & & \uparrow \chi & \nearrow \mathcal{D} & \\ K^0 & \xleftarrow{\mathcal{D}} & K^1 & & \end{array}$$

Démonstration: D'après le Théorème 12, χ et $S \circ \varepsilon_\lambda^{-1} \circ \mathcal{D}$ ont la même image dans $\mathbb{P}^3_{\omega+} = |3\Theta|_+$, c'est à dire la surface de Weddle W. Ensuite nous remarquons que, d'après Lemma 10, la composition de χ avec la restriction de φ à $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ donne l'application de dualité sur K^1. En effet nous obtenons la même application rationnelle (au moins sur un ouvert) en composant $\mathcal{D}$ et N. Comme toutes les applications que nous considérons sont génériquement bijectives et comme nous travaillons en caractéristique zéro, cela implique l'assertion.$\Box$

3.2 Un fibré en coniques

L'application classifiante φ définit aussi un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^3 \cong |2\Theta|$. En effet, soit $p \in \mathbb{P}^3$ un point général, alors la fibre $\varphi^{-1}(p)$ consiste en l'intersection de trois quadriques

$$Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 =: G.$$

Si $dimG = 1$ alors G est une courbe de degré 8. Comme $C \subset G$ et le degré de C est 6, la courbe résiduelle G/C est une conique.

Dans la suite nous utiliserons la notation suivante:

$$\begin{array}{rcl} V & := & H^0(C,\omega); \\ G & := & H^0(Pic^1(C),\mathcal{O}_{Pic^1(C)}(2\Theta)). \end{array}$$

Remarque 10 *Nous avons l'égalité*

$$H^0(C,\omega^3)_+ = Sym^3V.$$

Considérons maintenant le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^4_\omega$ engendré par les points d'un diviseur $D \in |\omega^2|$. D'abord, comme $D \in |\omega^2|$ nous pouvons donc l'écrire sous la forme $D = a + b + \lambda(a) + \lambda(b)$ pour $a,b \in C$. Ensuite, l'annulateur de ce sous-espace est $H^0(C,\omega^3(-a - b - \lambda(a) - \lambda(b)))$, qui est de dimension 2. Donc l'enveloppe linéaire $\langle D\rangle$ est un $\mathbb{P}^2$, notée $\mathbb{P}^2_{ab}$.

Proposition 20 *[LN83] Soient $c,d \in C$ et $e \in \mathbb{P}^4_\omega$ une extension*

$$0 \longrightarrow \omega^{-1} \xrightarrow{i_e} E_e \xrightarrow{\pi_e} \omega \longrightarrow 0.$$

Alors $e \in \mathbb{P}^2_{cd}$ si et seulement si il existe une section $\beta \in H^0(C,Hom(\omega^{-1},E))$ t.q.

$$\text{Zéros}(\pi_e \circ \beta) = c + d + \lambda(c) + \lambda(d).$$

Proposition 21 *Soit*

$$|\omega^3|^* = \mathbb{P}^4_\omega \overset{\varphi}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^3 = |2\Theta|$$

l'application classifiante. Alors la clôture de $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ est le cône S au-dessus d'une cubique gauche $X \subset \mathbb{P}^3_{\omega+}$.

Démonstration: Le sommet de S est le point $x = \mathbb{P}H^0(C,\omega^3)^*_- \in \mathbb{P}^4_\omega$, projectivisé de l'espace propre anti-invariant, donc toute droite contenue dans S est une sécante de C qui est invariante sous l'involution de $\mathbb{P}^4_\omega$. Une telle sécante est de la forme $\overline{p\lambda(p)}$. L'image d'une telle droite par φ est l'origine, donc $S \subset \varphi^{-1}(\mathcal{O})$. Pour prouver l'autre inclusion nous remarquons d'abord qu'un fibré vectoriel dans la classe de S-équivalence de l'origine est au milieu de la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

Le fibré trivial est donc un sous-fibré de E.
Considérons le morphisme ς, composé de

$$\varsigma : \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow \omega.$$

Alors $\delta \in H^0(C,\omega) = Hom(\mathcal{O}_C,\omega)$ et nous obtenons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{O} \arrow[d] \arrow[dr, "\varsigma"] & & \\
0 \arrow[r] & \omega^{-1} \arrow[r] & E \arrow[r] & \omega \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ς appartient donc à $H^0(C,\omega)$ et son diviseur des zéros est du type $a + \imath(a)$, pour $a \in C$. D'après la Proposition 20, cela entraîne que les classes d'extension dans l'image inverse $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ sont contenues dans une droite sécante invariante, donc $\varphi^{-1}(\mathcal{O}) \subset S$.□

En effet nous verrons qu'on a un fibré en coniques sur $|2\Theta|/\mathcal{O}$. Dans un premier temps nous décrirons la situation en-dehors de l'origine.

Soit $E \in \mathcal{SU}_C(2)$, on définit C_E comme la clôture $\overline{\varphi^{-1}(E)}$ de la fibre de E.

Théorème 14 *Soit E un fibré stable, alors $dimC_E = 1$ et C_E est une conique lisse.*

Soit E un fibré stable et e une classe d'équivalence d'extensions qui vérifie la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow \omega^{-1} \longrightarrow E_e \cong E \longrightarrow \omega \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

Pour un fibré E générale C_E a dimension 1. Pour une courbe de genre 2 le théorème de Riemann-Roch donne $\chi(E\omega) = 4+2(-1) = 2$, de plus, par dualité de Serre, nous avons $h^1(E\omega) = h^0(E^*)$ et $h^0(E^*) = h^0(Hom(E,\mathcal{O}_C)) = 0$ parce que E est stable.

Nous définissons l'application

$$\begin{array}{rcl} j : \varphi^{-1}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}H^0(C,E\omega) = \mathbb{P}^1, \\ e & \mapsto & j(e), \end{array}$$

qui envoie la classe d'extension $e \in C_E$ sur le point de $\mathbb{P}H^0(C,E\omega)$ correspondant à la première application de la suite exacte 3.8. Elle a degré 1 et elle n'est pas définie sur $C_E \cap C$.

Nous remarquons ensuite que la projection de centre $\mathcal{O}$ peut être décrite de la manière suivante.

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathcal{SU}_C(2) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 = |\omega^2|, \\ E & \mapsto & D(E), \end{array}$$

où

$$Supp(D(E)) = \{p \in C | h^0(E \otimes \mathcal{O}_C(p)) \neq 0\}.$$

En effet la projection de centre $\mathcal{O}$ n'est que la restriction à C, plongée dans $Pic^1(C)$ par l'application d'Abel-Jacobi de l'équation 3.2, de l'application θ de l'équation 3.1. Nous considérons maintenant l'application

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge^2 H^0(E\omega) & \longrightarrow & H^0(\omega^2), \\ s \wedge t & \mapsto & Zéros(s \wedge t). \end{array}$$

Soit $p \in C$, si $p \in$Zéros$(s \wedge t)$ alors il existe une section non nulle $s_p \in H^0(C,E\omega(-p))$. Donc $h^0(C,E\omega(-p)) \neq 0$. De plus, en faisant agir l'involution hyperelliptique λ et en rappelant qu'il s'agit d'extensions invariantes nous avons que $h^0(C,E\omega(-p)) = h^0(C,E \otimes \mathcal{O}_C(p)) \neq 0$ donc le diviseur des zéros de $s \wedge t$ est égale à $D(E)$. Or $D(E)$ a degré 4 et pour chaque $p \in D(E)$ il existe une section s_p. Nous remarquons donc que le morphisme j est surjectif sur l'ouvert $\mathbb{P}H^0(C,E\omega)/\{s_p | p \in D(E)\}$ donc il est dominant.
Pour finir la démonstration trois lemmes techniques sont necessaires.

Lemme 11 *L'image de* $\varphi_{|\mathbb{P}^2_{ab}} : \mathbb{P}^2_{ab} \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ *est la fibre de* Δ *au-dessus de* $D \in |\omega^2|$*, c'est-à-dire la droite qui passe par* $\mathcal{O} := [\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C]$ *et le point correspondant à* D *dans* $|\omega^2|$*.*

Démonstration: D'abord, $D = C \cap \mathbb{P}^2_{ab}$, parce que $H^0(C,\omega^3(-a-b-\lambda(a)-\lambda(b)-c)) = H^0(C,\omega - c) = 1$ pour tout $c \in C$. Donc la restriction

$$\varphi_{|\mathbb{P}^2_{ab}} : \mathbb{P}^2_{ab} \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

est donné par les quadriques passantes par le diviseur D. L'espace des quadriques sur $\mathbb{P}^2$ a dimension 5 et nous imposons 4 conditions linéaires independantes. Donc $\varphi_{|\mathbb{P}^2_{ab}}$ envoie $\mathbb{P}^2_{ab}$ sur un $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$.
Soit e une extension et E_e son image dans $\mathcal{SU}_C(2)$. Or, par la Proposition 20, le fait qu'une extension e appartient à $\mathbb{P}^2_{ab}$ est équivalente au fait qu'il existe une section $\alpha \in H^0(C,Hom(\omega^{-1},E))$ t.q., en suivant la notation du diagramme suivant, nous avons Zéros$(\pi_e \circ \alpha) = D(E_e) = D$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \omega^{-1} & & & & \\ & & & & \alpha \downarrow & \searrow & & & \\ 0 & \to & \omega^{-1} & \overset{i_e}{\to} & E_e & \overset{\pi_e}{\to} & \omega & \to 0. \end{array}$$

Donc α et i_e sont deux sections independentes de $E\omega$ et Zéros$(i_e \wedge \alpha) = D(E)$.
$\square$

Lemme 12 *Soit $E \in \mathcal{SU}_C(2)$, alors nous avons l'égalité*

$$C_E \cap C = D(E).$$

Démonstration: Soit $\mathbb{P}^2_{cd}$, pour $c,d \in C$ le plan t.q. $D(E) \subset \mathbb{P}^2_{cd}$. Par le Lemme 11 la fibre C_E est une conique contenue dans $\mathbb{P}^2_{cd}$ et passant par les 4 points de $D(E)$. Comme $D(E) = C \cap \mathbb{P}^2_{cd}$ nous avons l'égalité de l'énoncé.$\square$

Lemme 13 *Soit $E \in \mathcal{SU}_C(2)$ stable, alors nous avons une décomposition*

$$H^0(C,E\omega) = H^0(C,E\omega)_+ \oplus H^0(C,E\omega)_-$$

de $H^0(C,E\omega)$ en deux espaces propres de dimension 1.

Démonstration: Nous utiliserons la formule de Atiyah-Bott-Lefschetz, donc une linéarisation doit être fixé

$$\nu : \lambda^* E \overset{\sim}{\longrightarrow} E$$

pour E et voir comment elle agit au-dessus des points de $\mathcal{W}$. Le fibré E est une extension

$$0 \longrightarrow \omega^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow \omega \longrightarrow 0$$

donc une linéarisation pour E est définie une fois qu'on fixe des linéarisations pour ω e ω^{-1}. Nous avons déjà fixé l'involution $\delta : \lambda^*\omega \longrightarrow \omega$ qui agit trivialement sur les fibres au-dessus des points de $\mathcal{W}$. Pour le fibré ω^{-1} nous avons deux choix: soit la linéarisation qui agit comme l'identité sur le fibre au-dessus des points de $\mathcal{W}$, soit son inverse. Soit $x \in \mathcal{W}$, alors nous pouvons décomposer

$$E_x = \omega_x \oplus \omega_x^{-1}. \tag{3.9}$$

Si on choisit la linéarisation pour ω^{-1} qui agit comme l'identité sur les fibres au-dessus de $\mathcal{W}$ alors, par le lemme de Kempf, le fibré E est le tiré en arrière d'un fibré vectoriel F sur $\mathbb{P}^1$ défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Mais l'unique fibré sur $\mathbb{P}^1$ qui vérifie la suite (3.10) est $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ et il n'est pas semi-stable. Donc le fait que sur ω nous avons choisi δ implique que sur ω^{-1} nous devons forcement choisir la linéarisation

$$\tilde{\delta} : \lambda^* \omega^{-1} \xrightarrow{\sim} \omega^{-1}$$

qui induit $-Id$ sur les fibres au-dessus des points de $\mathcal{W}$. Nous rappelons que $dim H^0(C,E\omega) = 2$. Grâce à la décomposition (3.9) la trace de la linéarisation $\delta \oplus \tilde{\delta}$ est nulle. Donc par la formule de Atiyah-Bott-Lefschetz nous avons

$$h^0(C,E\omega)_+ - h^0(C,E\omega)_- = 0,$$

c'est-à-dire

$$h^0(C,E\omega)_+ = h^0(C,E\omega)_- = 1.$$

□

Suite de la dém. du Thm 14:
D'aprés les Lemmes 11 et 12 nous pouvons étendre le morphisme j à la clôture $C_E = \overline{\varphi^{-1}(E)}$. On envoie chaque point $p \in D(E)$ sur la section s_p qui s'annule en p. On note ce morphisme

$$\tilde{j} : C_E \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

La conique C_E est soit lisse, soit la réunion de deux droites disjointes, soit une droite double. Le morphisme $\tilde{j}$ est surjective sur $\mathbb{P}^1$ et de degré 1. Alors il existe un morphisme $\daleth$ t.q. $\tilde{j} \circ \daleth = Id_{\mathbb{P}^1}$, donc nous avons un isomorphisme entre $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}H^0(E\omega)$ et une composante de C_E. Le morphisme $\daleth$ est équivariant pour l'action de λ et par le Lemme 13 l'espace $H^0(C,E\omega)$ a deux espaces propres. Donc la composante image de $\daleth$ doit couper $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ en deux points, ce qui implique que C_E est une conique lisse. □

Théorème 15 *Soit E un fibré strictement semi-stable, alors C_E est singulière. Si $E \cong L \oplus L^{-1}$ pour $L \in JC[2]/\mathcal{O}$ alors C_E est une droite double.*

Dèmonstration: Si par contre E est strictement semi-stable on sait, par le lemme 6 et la remarque 7 que la fibre consiste en deux droites donc soit elle est une conique de rang 2, soit elle est une conique de rang 1. De plus les fibre au-dessus des points de $JC[2]/\mathcal{O}_C$ sont les droites doubles $\overline{w_i w_j}$, pour w_i, w_j deux différents point de Weierstrass. Celles-là sont toutes les couples λ-invariantes donc ces 15 points de 2-torsion sont le lieu de rang 1. $\square$

Par la suite, on appelera souvent $\mathbb{P}^2_\omega$ le système linéaire $|\omega^2|$.

Nous définissons maintenant définir un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang 3 sur $\mathbb{P}^2_\omega$. L'application rationnelle

$$\Delta : \mathcal{SU}_C(2) \to \mathbb{P}^2_\omega$$

est surjective donc chaque point de $\mathbb{P}^2_\omega$ peut être représenté par un diviseur $\Delta(E)$ pour un fibré E semi-stable sur C. Définissons d'abord la fibre $\mathcal{A}_E$ au-dessus de $\Delta(E)$: nous avons $\mathcal{A}_E \subset H^0(C,\omega^3)^*_+$ et ensuite elle vérifie la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow H^0(C,\omega) \stackrel{+\Delta(E)}{\longrightarrow} H^0(C,\omega^3)_+ \longrightarrow \mathcal{A}^*_E \longrightarrow 0. \tag{3.11}$$

En effet nous pouvons généraliser la suite 3.11 en une suite exacte (en effet une version globale de celle ci-dessus) de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^2_\omega$. Afin de faire cela on définit un nouveau fibré vectoriel $\mathcal{G}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$.
D'abord nous remarquons qu'on a un morphisme naturel de fibrés vectoriels

$$\nu : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1) \longrightarrow H^0(C,\omega^2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}$$

qui envoie la fibre au-dessus d'un point sur la droite associée dans $H^0(C,\omega^2)$. Nous allons tensoriser par $H^0(C,\omega)$ le morphisme ν: nous obtenons le morphisme

$$Id_{H^0(C,\omega)} \otimes \nu =: \nu' : H^0(C,\omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1) \longrightarrow H^0(C,\omega) \otimes H^0(C,\omega^2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}.$$

De plus nous avons aussi un morphisme de multiplication

$$\mu : H^0(C,\omega) \otimes H^0(C,\omega^2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \longrightarrow H^0(C,\omega^3)_+ \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}.$$

Nous définissons

$$\mathcal{G} := H^0(C,\omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)$$

et le morphisme injectif

$$\alpha := \mu \circ \nu' : \mathcal{G} \longrightarrow H^0(C,\omega^3)_+ \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}.$$

En effet $\mathcal{G}$ est un sous-fibré de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \otimes H^0(C,\omega^3)_+$: la fibre au-dessus de chaque $\Delta \in \mathbb{P}^2_\omega$ est donnée par les diviseurs de $H^0(C,\omega^3)_+$ de la forme $\Delta(E) + \delta$, avec $\delta \in H^0(C,\omega)$. On définit

$$\mathcal{A}^* := coker(\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow H^0(C,\omega^3)_+ \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega})$$

et nous avons donc la suite exacte sur $\mathbb{P}^2_\omega$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \otimes H^0(C,\omega^3)_+ \longrightarrow \mathcal{A}^* \longrightarrow 0. \tag{3.12}$$

Définition 17 *Nous définissons le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}^2_\omega$ par*

$$\mathcal{E} := \mathcal{A} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}.$$

Nous sommes dans la situation suivante.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\mathcal{E} & \hookrightarrow & |\omega^3|^* \times \mathbb{P}^2_\omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}\mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathbb{P}Sym^3V^* \times \mathbb{P}^2_\omega \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^2_\omega \end{array}$$

Soit $y \in \mathbb{P}^2_\omega$. Alors nous pouvons associer à y un diviseur $a + b$ de degré 2 sur X, avec a,b deux points de X. La fibre $\mathbb{P}\mathcal{A}_y$ est égale à la sécante $\overline{ab}$ à $X \subset \mathbb{P}Sym^3V^*$ et $\mathbb{P}\mathcal{E}_y$ est le plan $< \overline{ab},x > \subset |\omega^3|^*$.
Soit

$$pr_x : \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow \mathbb{P}^3_{\omega+}$$

la projection de centre x.

Proposition 22 *Nous avons un diagramme commutatif d'applications rationnelles*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^4_\omega & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & |\mathcal{I}_C(2)|^* = \mathbb{P}^3 \\ \downarrow pr_x & & \downarrow \Delta \\ \mathbb{P}^3_{\omega+} & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_\omega \cong |\mathcal{I}_X(2)|^*, \end{array}$$

où ϕ peut être définie comme suit. Soit X la cubique gauche, image dans $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}V$. Étant donné un $t \in \mathbb{P}^3 \setminus X$, soit l_t l'unique sécante à X passant par t. L'application ϕ associe à t le pinceau $\mathbb{P}^1 \subset |\mathcal{I}_X(2)|$ de quadriques s'annulant sur la reunion $X \cup l_t$.

Démonstration: D'abord on montre qu'il existe une unique sécante l à X qui passe par t. En projetant X avec centre t nous remarquons qu'on obtient une cubique plane, qui est forcement nodale par la formule du genre, ce qui implique qu'il existe une unique sécante par t. De plus la projection pr_x induit un isomorphisme

$$pr_x^*|\mathcal{I}_X(2)| \cong |I_S(2)|.$$

Comme $\varphi^{-1}(\mathcal{O}) = S$ (Prop. 21) et Δ est la projection de centre $\mathcal{O}$, le diagramme commute. □

Remarque 11 *Une autre manière de définir ϕ est, comme $\mathbb{P}^2_\omega \cong \mathbb{P}Sym^2H^0(C,\omega)$, de la définir comme l'application qui à $t \in \mathbb{P}^3_{\omega+} \setminus X$ associe le couple de points de X découpé par l'unique sécante l_t à X passant par t.*

Soit $Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$ l'éclaté de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ le long de la cubique gauche et

$$\mu : Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\omega+}$$

la projection sur $\mathbb{P}^3_{\omega+}$. Comme X est découpé schématiquement par les trois quadriques de $\mathcal{I}_X(2)$ il existe un morphisme $\tilde{\phi}$ qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+} \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\ X \subset \mathbb{P}^3_{\omega+} \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathbb{P}^2_\omega \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\tilde{\phi}$ définit donc une fibration en droites projectives sur $\mathbb{P}^2_\omega$. De plus le diviseur exceptionnel $E \subset Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$ est le projectivisé $\mathbb{P}(N_{X|\mathbb{P}^3_{\omega+}})$ du fibré normal de X dans $\mathbb{P}^3_{\omega+}$.

Lemme 14 *Nous avons un isomorphisme*

$$N_{X|\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5).$$

Démonstration: Soit

$$\begin{array}{rcl} i : X & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\omega+}; \\ [u : v] & \mapsto & [u^3 : u^2v : vu^2 : v^3]; \end{array}$$

le plongement de Veronese. Nous avons la suite exacte suivante.

$$0 \longrightarrow T_X \longrightarrow i^*T_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \longrightarrow N_{X|\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0. \tag{3.13}$$

Comme $X \cong \mathbb{P}^1$ nous avons $T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Ensuite on applique i^* à la suite d'Euler et on obtient

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 4} \xrightarrow{h} i^*T_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \longrightarrow 0.$$

Soit l une section locale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ et u,v les coordonnées sur $\mathbb{P}^1$, alors le morphisme k s'écrit

$$\begin{array}{rcl} k : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 4}; \\ l & \mapsto & (u^3l, u^2vl, uv^2l, v^3l). \end{array}$$

Nous appelons X,Y,Z,T les coordonnées sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 4}$. De plus le morphisme h est donné par les équations de la droite image de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 4}$. Nous avons donc

$$\begin{array}{rcl} h : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 4} & \longrightarrow & i^*T_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}; \\ (X,Y,Z,T) & \mapsto & (vX - uY, vY - uZ, vZ - uT). \end{array}$$

Donc nous avons $i^*T_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)^{\oplus 3}$. La suite (3.13) peut s'écrire

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \cong T_X \xrightarrow{di} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)^{\oplus 3} \cong i^*T_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \longrightarrow N_{X|\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0,$$

où di est la différentielle de i. Sur l'ouvert affine $\{v \neq 0\}$ le morphisme di est donné par les équations suivantes

$$\begin{array}{rcl} di : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)^{\oplus 3}; \\ l & \mapsto & (3lu^2, 2luv, lv). \end{array}$$

Soient (C,D,F) les coordonnées sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)^{\oplus 3}$, alors les équations de la droite image de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)^{\oplus 3}$ sont

$$(vA - uB, vB - uC);$$

ceci implique que $N_{X|\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5)$.$\square$

Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5)$, nous avons

$$\mathbb{P}(N_{X|\mathbb{P}^3}) \cong X \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

On notera

$$\sigma : \mathbb{P}\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega$$

la projection du fibré projectif et E le diviseur exceptionnel dans $Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$.

Proposition 23 *Il existe un isomorphisme au-dessus de* $\mathbb{P}^2_\omega$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+} \\ \sigma\searrow & & \swarrow\tilde{\phi} \\ & \mathbb{P}^2_\omega & \end{array}$$

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{P}^2_\omega$, $a+b$ le diviseur sur X associé à x et $t \in \mathbb{P}\mathcal{A}_x$. Nous rapellons que $\mathcal{A}$ est un sous-fibré

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \otimes H^0(\omega^3)^*_+$$

et donc la projectivisation donne une inclusion

$$k : \mathbb{P}\mathcal{A} \quad\hookrightarrow\quad \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^3_{\omega+}.$$

De plus nous avons

$$k(\mathbb{P}\mathcal{A}_x) = \overline{ab} \subset \mathbb{P}^3_{\omega+}.$$

Nous considérerons $\mathbb{P}\mathcal{A}$ comme une sous-variété de $\mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^3_{\omega+}$. Si $t \in \mathbb{P}^3_{\omega+} \setminus X$ alors $\overline{ab}$ est l'unique sécante à X passante par t.
Nous définissons un morphisme

$$\varpi := \tilde{\phi} \times \mu : Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+} \quad\longrightarrow\quad \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^3_{\omega+}.$$

Le morphisme ϖ admet un inverse birationnel sur $\mathbb{P}\mathcal{A}$

$$\varpi^{-1} : \mathbb{P}\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^3_{\omega+} \dashrightarrow Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$$

défini comme suit. Nous définissons ϖ^{-1} sur l'ouvert de $\mathbb{P}\mathcal{A}$ donné par les $x \in \mathbb{P}^2_\omega$ t.q. $a \neq b$ et les $t \in \{\mathbb{P}\mathcal{A}_x \setminus X\}$. Nous envoyons $(x,t) \in \mathbb{P}\mathcal{A}$ sur $\mu^{-1}(t) \in Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$. Alors par le théorème principal de Zariski le morphisme ϖ induit un isomorphisme entre $Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$ et $\mathbb{P}\mathcal{A}$. $\square$

Soit maintenant

$$\beta : \mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O}) \dashrightarrow \mathbb{P}\mathcal{A}$$

la projection naturelle et η l'application composée

$$\eta : \mathbb{P}\mathcal{E} \overset{\beta}{\dashrightarrow} \mathbb{P}\mathcal{A} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2_\omega.$$

Soit $\varphi : \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow |2\Theta|$ l'application classifiante. Comme elle est donnée par les quadriques contenues dans l'idéal de $C \subset \mathbb{P}^4_\omega$, il existe un morphisme

$$\overline{\varphi} : Bl_C\mathbb{P}^4_\omega \longrightarrow |2\Theta|$$

qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} Bl_C\mathbb{P}^4_\omega \arrow[d] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ \mathbb{P}^4_\omega \arrow[r, dashed, "\varphi"] & {|2\Theta|} \end{tikzcd}$$

Nous noterons $\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$ l'éclaté de $|2\Theta| = \mathbb{P}^3$ au point $\mathcal{O}$ et pr_0 le morphisme qui résout la projection Δ de centre $\mathcal{O}$ et qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \arrow[d] \arrow[dr, "pr_0"] & \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\Delta"] & \mathbb{P}^2_\omega \end{tikzcd}$$

Le morphisme

$$pr_0 : \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega$$

définit une fibration en droites projectives sur $\mathbb{P}^2_\omega$ donc $\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{P}M$ pour un fibré vectoriel M de rang 2. On appelle $F = \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathcal{O}}\mathbb{P}^3 \cong \mathbb{P}^2_\omega$ le diviseur exceptionnel dans $\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$ au-dessus de l'origine. Le fibré vectoriel M n'est défini qu'à un fibré en droites L près, parce que, en tant que variétés $\mathbb{P}M$ et $\mathbb{P}(M \otimes L)$ sont isomorphes. Pour fixer M on le choisira de manière que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}M}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(F).$$

Lemme 15 *Nous avons l'égalité*

$$M = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1).$$

Démonstration: Nous avons $M^* = pr_{0*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(F)$ et nous considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(F) \longrightarrow \mathcal{O}_F(F) \longrightarrow 0. \tag{3.14}$$

En appliquant pr_{0*} à la suite exacte (3.14) nous obtenons

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \longrightarrow M^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1) \longrightarrow 0.$$

Donc M^* détermine une classe d'extension (e) dans $Ext^1(\mathcal{O}(-1),\mathcal{O})$, et

$$Ext^1(\mathcal{O}(-1),\mathcal{O}) = H^1(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(1)) = \{0\}$$

donc M^* est forcément l'extension triviale, c'est-à-dire

$$M^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1).$$

□

Par la proposition 21, nous avons $\overline{\varphi^{-1}(\mathcal{O})} = S$ donc il existe aussi un morphisme

$$\tilde{\varphi} : Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \longrightarrow \mathbb{P}^3_\mathcal{O}$$

qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\
Bl_C\mathbb{P}^4_\omega \arrow[d] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \mathbb{P}^3_\mathcal{O} \arrow[d] \\
\mathbb{P}^4_\omega \arrow[r, dashed, "\varphi"] & |2\Theta|
\end{tikzcd}$$

Nous noterons ϱ l'application composée

$$\varrho : Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{P}^3_\mathcal{O} \xrightarrow{pr_0} \mathbb{P}^2_\omega$$

et π la projection

$$\pi : Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \longrightarrow \mathbb{P}^4_\omega.$$

Proposition 24 *Soit $S \subset \mathbb{P}^4_\omega$ le cône au-dessus de la cubique gauche X de la proposition 21. Il existe alors un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{P}^2_\omega$*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}\mathcal{E} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\eta"'] & & Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \arrow[dl, "\varrho"] \\
& \mathbb{P}^2_\omega. &
\end{tikzcd}$$

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{P}^2_\omega$, $a+b$ le diviseur sur X associé à x et $s \in \mathbb{P}\mathcal{E}_x$. Nous rappelons que $\mathcal{E}$ est un sous-fibré

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}} \otimes H^0(\omega^3)^*$$

donc la projectivisation donne donc une inclusion

$$j : \mathbb{P}\mathcal{E} \quad \hookrightarrow \quad \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^4_\omega.$$

De plus

$$j(\mathbb{P}\mathcal{E}_x) = x \times \langle a + b + \lambda(a) + \lambda(b) \rangle \subset \mathbb{P}^4_\omega$$

.
Nous considérerons souvent $\mathbb{P}\mathcal{E}$ comme une sous-variété de $\mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^4_\omega$. Nous remarquons aussi que

$$j(\mathbb{P}\mathcal{E}_x) \cap \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^3_{\omega+} = k(\mathbb{P}\mathcal{A}_x) = x \times \overline{ab}.$$

Nous définissons un morphisme

$$\varpi' := (\varrho,\pi) : Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^4_\omega.$$

Le morphisme ϖ' admet un inverse birationnel sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$

$$\varpi'^{-1} : \mathbb{P}\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^2_\omega \times \mathbb{P}^4_\omega \dashrightarrow Bl_S\mathbb{P}^4_\omega$$

défini comme suit. Nous définissons ϖ'^{-1} sur l'ouvert de $\mathbb{P}\mathcal{E}$ donné par les $x \in \mathbb{P}^2_\omega$ t.q. $a \neq b$ et les $s \in \{\mathbb{P}\mathcal{E}_x \setminus S\}$. On envoie (x,s) sur $\pi^{-1}(s) \in Bl_S\mathbb{P}^4_\omega$. Alors par le théorème principal de Zariski ϖ' induit un isomorphisme entre $Bl_S\mathbb{P}^4_\omega$ et $\mathbb{P}\mathcal{E}$.$\square$

Nous rapellons qu'on a noté E le diviseur exceptionnel de $Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+}$.

Théorème 16 *La restriction*

$$\tilde{\phi}_{|E} : E \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega$$

est un morphisme de degré 2 ramifié le long de la conique image de X par le morphisme Ver_2.

Démonstration: Nous rapellons que $E \cong X \times \mathbb{P}^1$. Alors $\tilde{\phi}_{|E}$ est donnée par la différentielle de φ et nous avons

$$\tilde{\phi}_{|\{a\}\times\mathbb{P}^1} = \mathbb{P}(N_{X|\mathbb{P}^3,a}) \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega.$$

Soient a et b deux points de X, alors nous avons

$$\tilde{\phi}(\overline{ab} - \{a,b\}) = a + b \in |\omega^2|.$$

Soit donc $v_b \in \mathrm{T}_a\mathbb{P}^3$ le vecteur tangent porté par la droite $\overline{ab}$. Alors, comme la droite $\overline{ab}$ est contractée, nous avons

$$\tilde{\phi}(v_b) = a + b \in |\omega^2|.$$

De plus, tout vecteur normal $v \in \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}(N_{X|\mathbb{P}^3,a})$ est de la forme v_b pour un point $b \in X$. Cela entraîne

$$\tilde{\phi}(\{a\} \times \mathbb{P}^1) = D_a := \{a + b | b \in X\}.$$

La droite $D_a \subset \mathbb{P}^2_\omega$ est la droite tangente au point $2a \in \mathbb{P}^2_\omega$ à la conique dans $\mathbb{P}^2_\omega$ obtenue comme image de l'application de Veronese

$$\begin{array}{rrcl} (3.15) \qquad & Ver_2 : X & \longrightarrow & |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|^* = \mathbb{P}^2_\omega; \\ (3.16) \qquad & p & \mapsto & 2p. \end{array}$$

Soit maintenant $a+b$ le diviseur sur X associé à $x \in \mathbb{P}^2$, alors l'image inverse $\tilde{\phi}^{-1}(x)$ dans $X \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}(N_{X|\mathbb{P}^3})$ est composée de deux points $\{(a,\alpha),(b,\beta)\}$ si x n'appartient pas à la conique. Nous remarquons aussi que dans le cas où x est un point de la conique l'image inverse est un seul point. Cela définit un rêvetment de degré 2 ramifié le long de la conique.$\square$

On notera $\tilde{E}$ le diviseur exceptionnel dans $Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \cong \mathbb{P}\mathcal{E}$. Nous avons

$$\tilde{E} \cong \overline{\beta^{-1}(E)}.$$

Proposition 25 *La restriction*

$$\tilde{\varphi}_{|\tilde{E}} : \tilde{E} \longrightarrow E \xrightarrow{2:1} F \cong \mathbb{P}^2_\omega$$

définit un fibré en coniques.

Démonstration: La situation est la suivante.

$$\begin{array}{llll}
\tilde{E} \subset & \mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O}) = Bl_S\mathbb{P}^4_\omega & & \\
 & \quad\downarrow \beta & \searrow \tilde{\varphi} & \\
E \subset & \quad \mathbb{P}\mathcal{A} = Bl_X\mathbb{P}^3_{\omega+} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \\
 & \quad \sigma \downarrow & & \\
 & \quad \mathbb{P}^2_\omega & &
\end{array}$$

Considérons maintenant l'application composée

$$\eta := \sigma \circ \beta : \mathbb{P}\tilde{E} \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

La fibre de $\tilde{E}$ au-dessus d'un point $x \in \mathbb{P}^2$ est une conique de rang 2 si $x \notin Ver_2(\mathbb{P}^1)$ et une droite double si $x \in Ver_2(\mathbb{P}^1)$.$\square$

La Proposition 25 et le Théorème 15 impliquent donc le théorème suivant.

Théorème 17 *Le morphisme*

$$\tilde{\varphi} : Bl_S(\mathbb{P}^4) \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$$

est un fibré en coniques dont le lieu discriminant est l'éclaté de la surface de Kummer K^0 en $\mathcal{O}$.

Remarque 12 *Nous remarquons que la conique $Ver_2(\mathbb{P}^1)$ est le cône tangent à la surface de Kummer à l'origine.*

Remarque 13 *Nous rapellons que $Pic(\mathbb{P}\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^2$, notamment*

$$Pic(\mathbb{P}\mathcal{A}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(1)\mathbb{Z} \times \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1)\mathbb{Z}.$$

Nous rapellons que l'application

$$\begin{array}{rcl}
\mu : \mathbb{P}\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\omega+} = \mathbb{P}Sym^3V; \\
\mathbb{P}\mathcal{A}_x & \mapsto & \overline{ab};
\end{array}$$

qui envoie la fibre au-dessus de x sur la sécante $\overline{ab}$ à X est la projection de l'éclatement de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ le long de X, donc $\mu^{-1}(X) = E$.

Lemme 16 *Nous avons*

$$\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(1).$$

Démonstration: Nous voulons déterminer deux entiers $l,k \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(l) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k).$$

Comme l'application μ est la projection de l'éclatement de $\mathbb{P}^3_{\omega+}$ le long de X, nous avons $l = 1$. Il nous reste à déterminer k. Nous avons

$$H^0(\mathbb{P}^3_{\omega+},\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1)) = H^0(\mathbb{P}^3_{\omega+},\mu_*\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1)),$$

et par la formule de projection cela est égal à $H^0(\mathbb{P}^3_{\omega+},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1) \otimes \mu_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}})$. Comme les fibres de μ sont connexes alors

$$\mu_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}.$$

Donc

$$H^0(\mathbb{P}\mathcal{A},\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1)) = H^0(\mathbb{P}^3_{\omega+},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\omega+}}(1)) = Sym^3V.$$

En prenant la cohomologie dans la suite exacte (3.12) on obtient un isomorphisme

$$H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*) \cong Sym^3V.$$

Pour déterminer k on calcule $H^0(\mathbb{P}\mathcal{A},\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(1) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k))$. Par la formule de projection on obtient

$$H^0(\mathbb{P}\mathcal{A},\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(1) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k)) = H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k)). \tag{3.17}$$

En tensorisant la suite exacte (3.12) par le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k)$ et en prenant la cohomologie nous remarquons que l'égalité

$$H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(k)) = Sym^3V$$

est vraie seulement pour $k = 0$.□

Nous calculons maintenant la classe du diviseur exceptionnel E dans le groupe de Picard de $\mathbb{P}\mathcal{A}$.

Théorème 18 *Nous avons un isomorphisme dans* $Pic(\mathbb{P}\mathcal{A})$

$$\mathcal{O}(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(2) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1).$$

Démonstration: Nous nous occupons d'abord du premier facteur. Nous avons vu que la restriction

$$\tilde{\phi} : E \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega$$

définit un morphisme de degré 2 ramifié le long d'une conique lisse (Thm. 16). Donc si $x \in \mathbb{P}^2_\omega$ alors l'intersection $E_x = \tilde{E} \cap \mathbb{P}\mathcal{A}_x$ est composée de deux points. Cela implique que

$$\mathcal{O}(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(2) \otimes \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(m),$$

pour un entier $m \in \mathbb{Z}$. Nous avons les égalités suivantes.

$$H^0(\mathbb{P}\mathcal{A},\mathcal{O}(1)) = H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(1)) = H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*).$$

Soient maintenant $a,b \in X$ et $x \in \mathbb{P}^2_\omega$ le point correspondant au diviseur $a+b$. Considérons maintenant une quadrique lisse $Q \subset |\mathcal{I}_X(2)|$. Nous avons donc

$$\mu^{-1}(Q) = E + R_Q \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(2)|,$$

où l'on note $R_Q \subset \mathbb{P}\mathcal{A}$ le diviseur résiduel. Soient en outre $a,b \in X$ deux points. Alors, soit $\overline{ab} \subset Q$, soit $\overline{ab} \cap Q = \{a,b\}$.
Nous définissons

$$\mathcal{C}_Q := \{a+b = x \in \mathbb{P}^2 | \overline{ab} \subset Q\}$$

et $R_Q = \sigma^{-1}(C_Q)$.
Il est bien connu que, comme Q est lisse, alors $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par le plongement de Segre et que $X \subset Q$ peut être vu comme le lieu des zéros d'un polynôme bihomogène de degré (1,2).
C'est à dire

$$\begin{array}{rcl} X = \mathbb{P}^1 & \hookrightarrow & Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1; \\ [u:v] & \mapsto & ([u^2,v^2],[u,v]). \end{array}$$

Cela veut dire que, étant fixé un $p \in \mathbb{P}^1$ et en faisant varier $t \in \mathbb{P}^1$,les droites du réglage $\{t\} \times p$ coupent X en deux points. Les droites de l'autre réglage coupent X en un seul point. Soit

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1; \\ [u:v] & \mapsto & [u^2 : v^2]. \end{array}$$

Alors nous avons une inclusion linéaire

$$H^0(X,\mathcal{O}(1)) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(X,\mathcal{O}(2))$$

et la droite $\mathbb{P}(\alpha^*(H^0(X,\mathcal{O}(1))))$ est $\mathcal{C}_Q$. Cela entraîne que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(R) = \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1).$$

et donc

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{A}}(2) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1).$$

□

Le morphisme $\tilde{\varphi}$ fait donc commuter le diagramme suivant de fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^2$.

$$\begin{tikzcd}
Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \cong \mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}) \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\varrho"'] & & \mathbb{P}[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1)] = \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \arrow[dl, "pr_0"] \\
& \mathbb{P}^2_\omega &
\end{tikzcd}$$

L'image inverse par $\tilde{\varphi}$ induit un homomorphisme

$$\tilde{\varphi}* : Pic(\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}) \longrightarrow Pic(\mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega})) \tag{3.18}$$

Ces deux groupes de Picard sont isomorphes à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Proposition 26 *L'homomorphisme de l'équation (3.18) est donné par*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (a,b) & \mapsto & (2a,b-a). \end{array}$$

Démonstration: D'abord nous avons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} Pic(\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}) &= \mathbb{Z}\mathcal{O}(1) \times \mathbb{Z}pr_0^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1); \\ Pic(\mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O})) &= \mathbb{Z}\mathcal{O}(1) \times \mathbb{Z}\eta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(1). \end{aligned}$$

Ensuite, comme $pr_0 \circ \tilde{\varphi} = \eta$, nous avons

$$\tilde{\varphi}(0,b) = (0,b).$$

Nous avons fixé $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(F)$, donc nous avons

$$\tilde{\varphi}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1) = \tilde{\varphi}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(\tilde{\varphi}^{-1}(F)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(\beta^{-1}(E)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(2) \otimes \eta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1).$$

Cela entraîne que

$$(a,0) \mapsto (2a, -a).$$

□

Donc nous avons l'égalité

$$\tilde{\varphi}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(2) \otimes \eta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1). \tag{3.19}$$

Ensuite $\tilde{\varphi}$ induit un morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1) \longrightarrow \tilde{\varphi}_* \tilde{\varphi}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1). \tag{3.20}$$

En appliquant pr_{0*} au morphisme (3.20) et en rappelant l'égalité (3.19), nous obtenons un morphisme de faisceaux sur $\mathbb{P}^2_\omega$

$$\tilde{\varphi}^* : pr_{0*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}}(1) = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) = M^* \longrightarrow \eta_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(2) \otimes \eta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)).$$

Par la formule de projection,

$$\eta_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(2) \otimes \eta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)) \cong Sym^2(\mathcal{A}^* \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1).$$

Remarque 14 *Nous avons vu que $\mathbb{P}M^*$ définit un fibré en droites projectives sur $\mathbb{P}^2_\omega$. Soit $y \in \mathbb{P}^2_\omega$ et c,d les points de X t.q. y est le diviseur $c + d$ sur X. Alors $\mathbb{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{O})_y$ est le plan projectif engendré par les deux couples de points de X dont les images dans $\mathbb{P}V$ sont c et d. La fibre $\mathbb{P}M^*_y$ est donc le pinceau de coniques dans $\mathbb{P}\mathcal{E}_y$ qui passent par ces quatre points.*

Lemme 17 *Nous avons*

$$dimH^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{A}^*(-1)) = 0;$$
$$dimH^1(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{A}^*(-1)) = 0.$$

Dèmonstration: Il suffit de tensoriser la suite (3.12) avec le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)$ et on obtient

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1) \otimes Sym^3 V \longrightarrow \mathcal{A}^*(-1) \longrightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie nous obtenons

$$h^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-1)) = h^1(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-2)) = 0,$$

d'où la première égalité. Ensuite, nous avons

$$h^1(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(-1)) = 0$$

et par dualité

$$H^2(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(-2)) \cong H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(-1)$$

donc $h^2(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(-2)) = 0$. Ce qui entraîne la deuxième égalité de l'énoncé.□

Lemme 18 *Nous avons*

$$dim H^0(\mathbb{P}^2_\omega,Sym^2\mathcal{A}^*) = 10.$$

Démonstration: En tensorisant la suite exacte (3.12) avec $\mathcal{A}^*$ nous obtenons la suite suivante.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(-1)\otimes V \longrightarrow \mathcal{A}^*\otimes Sym^3V \longrightarrow \mathcal{A}^{*2} \longrightarrow 0.$$

Cela implique que

$$H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^{*2}) \cong H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*)\otimes Sym^3V) = Sym^3V\otimes Sym^3V,$$

donc $h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^{*2}) = 16$. Ensuite nous remarquons que

$$h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^{*2}) = h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\wedge^2\mathcal{A}^*)\oplus h^0(\mathbb{P}^2_\omega,Sym^2\mathcal{A}^*).$$

En prenant les puissances extérieures maximales de la suite exacte (3.12) on obtient que $\bigwedge^2\mathcal{A}^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(2)$ et donc $h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\bigwedge^2\mathcal{A}^*) = h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{O}(2)) = 6$. Cela implique l'énoncé.□

Lemme 19 *Nous avons*

$$dim H^0(\mathbb{P}^2_\omega,Sym^2A^*(-1)) = 1.$$

Démonstration: Nous tensorisons la suite exacte (3.12) avec le fibré $\mathcal{A}^*(-1)$ et on obtient la suite suivante.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(-2)\otimes V \longrightarrow \mathcal{A}^*(-1)\otimes Sym^3V \longrightarrow \mathcal{A}^{*2}(-1) \longrightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie nous avons que

$$h^1(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*(-1))\otimes Sym^3V = h^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*(-1))\otimes Sym^3V = 0$$

par le Lemme 17, donc

$$H^0(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^{*2}(-1)) \cong H^1(\mathbb{P}^2_\omega,\mathcal{A}^*(-2))\otimes V. \tag{3.21}$$

Nous tensorisons la suite exacte (3.12) avec le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-2)$ en obtenant

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-2) \otimes Sym^3 V \longrightarrow \mathcal{A}^*(-2) \longrightarrow 0.$$

Ensuite nous remarquons que $h^1(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-2) = 0$ et $h^2(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-3)) = 1$. De plus, par dualité $h^2(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-2)) = h^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-1)) = 0$, donc

$$h^1(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{A}^*(-2)) = dim(H^2(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(-3)) \otimes V) = 2.$$

L'égalité (3.21) implique que $h^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{A}^{*2}(-1) = 4$. Le fibré $\mathcal{A}^{2*}(-1)$ se décompose en somme directe de $Sym^2 \mathcal{A}^*(-1)$ et $\bigwedge^2 \mathcal{A}^*(-1)$. Comme

$$dim H^0(\mathbb{P}^2_\omega, \bigwedge^2 \mathcal{A}^*(-1)) = dim H^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{O}(1)) = 3$$

nous avons que

$$dim H^0(\mathbb{P}^2_\omega, Sym^2 \mathcal{A}^*(-1)) = 4 - 3 = 1.$$

□

Corollaire 9 *Nous avons*

$$dim \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1), Sym^2(\mathcal{A}^* \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)) = 16.$$

Démonstration: On notera

$$B := \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1), Sym^2(\mathcal{A}^* \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1)).$$

Nous avons

$$B = H^0(\mathbb{P}^2_\omega, Sym^2 \mathcal{A}^* \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega} \oplus \mathcal{A}^* \oplus Sym^2 \mathcal{A}^*(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\omega}(-1) \oplus \mathcal{A}^*(-1)).$$

Donc

$$dim B = 10 + 1 + 4 + 1 = 16.$$

□

Remarque 15 *Le plan projectif $\mathbb{P}^2_\omega = \mathbb{P} Sym^2 V$ ne dépend pas de la courbe C, comme V peut être un espace vectoriel abstrait quelconque. Donc, comme il est défini par la suite exacte* 3.12*, même $\mathcal{A}$ ne dépend pas de la courbe.*

Nous pouvons donc associer à chaque courbe C de genre 2 un fibré en coniques, notamment celui défini par la section

$$\tilde{\varphi}_C \in \mathbb{P} B.$$

Le lieu discriminant est l'éclaté de la surface de Kummer K^0 associé à C. Ainsi nous obtenons une application de modules

$$\begin{aligned} \Xi : \{\text{courbes lisses de genre } 2\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{15} = \mathbb{P}B; \\ C &\mapsto \tilde{\varphi}_C. \end{aligned}$$

Lemme 20 *Soit Y une variété projective lisse et*

$$f : G \longrightarrow Y$$

un fibré en coniques, alors il existe un fibré vectoriel F de rang 3 sur Y, un fibré en droites L et une section $q \in H^0(Y, Sym^2 H \otimes L^k)$ pour un entier k, t.q. G s'identifie au schéma des zéros de q dans le fibré projectif $\mathbb{P}F$.

Démonstration: La démonstration suit celle de la proposition 1.2 de [Bea77]. L'assertion est équivalente à l'existence d'un fibré en droites N sur G induisant sur chaque fibre G_s le faisceau $\mathcal{O}_{G_s}(1)$ des sections hyperplanes. En effet on aura $H = f_*N$. Si nous considérons le faisceau des différentielles de degré maximum ω_G alors par adjonction nous avons $\omega_{G|G_s} \cong \omega_{G_s}$ et $\omega_{G_s} \cong \mathcal{O}_{G_s}(-1)$. Nous posons donc $N = \omega_G^{-1}$.$\square$

Proposition 27 *Soit*

$$\tilde{\varphi} : Bl_S\mathbb{P}^4_\omega \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$$

le fibré en coniques du Thèorème 17. Alors $Bl_S\mathbb{P}^4_\omega$ est un diviseur dans l'espace total du fibré $\mathbb{P}(pr_0^*\mathcal{E})$ sur $\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$.

Démonstration: Soit $y \in \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}}$, alors nous avons

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}_{pr_0(y)}).$$

Donc le fibré de rang 3 associé à $\tilde{\varphi}$ est $pr_0^*\mathcal{E}$.$\square$

De plus $Bl_S\mathbb{P}^4_\omega = \mathbb{P}\mathcal{E}$. Par conséquence nous avons un diagramme comme le suivant.

$$\begin{tikzcd}
Bl_s\mathbb{P}^4_\omega \arrow[dr, "Z"] \arrow[drr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ddr, "Id"'] & & \\
& \mathbb{P}(pr_0^*\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{P}^3_{\mathcal{O}} \arrow[d, "pr_0"] \\
& \mathbb{P}\mathcal{E} \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{P}^2_\omega
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme Z est l'inclusion de $Bl_S\mathbb{P}^4_\omega$ dans $\mathbb{P}(pr_0^*\mathcal{E})$ induite par la propriété universelle du produit fibré.

Il reste encore à clarifier et à répondre à certains questions, notamment:

– Le fibré $\mathcal{A}$ est-il (semi-)stable?

- Décrire l'image dans $\mathbb{P}^{15}$ de l'application Ξ.
- Décrire l'image de la projection de l'image de Ξ sur des sous-espaces de $\mathbb{P}^{15}$.

Bibliographie

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.

[AR96] Allan Adler and S. Ramanan, *Moduli of abelian varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1644, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Art57] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York-London, 1957.

[Ati57] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 414–452.

[BB66] W. L. Baily, Jr. and A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 442–528.

[Bea77] Arnaud Beauville, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 3, 309–391.

[Bea91] ———, *Fibrés de rang deux sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta. II*, Bull. Soc. Math. France **119** (1991), no. 3, 259–291.

[Bea00] A. Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Mathematical journal **48** (2000), 39–64.

[Ber92] A. Bertram, *Moduli of rank-2 vector bundles, theta divisors, and the geometry of curves in projective space*, J. Differential Geom. **35** (1992), no. 2, 429–469.

[Bur90] H. Burkhardt, *Untersuchungen aus dem gebiet der hyperelliptischen modulfunktionen, ii*, Math. Ann. **38** (1890), 161–224.

[Bur92] H. Burkhardt, *Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen. I*, Math. Ann. **41** (1892), no. 3, 313–343.

[Cob17] A. B. Coble, *Point sets and allied Cremona groups , iii*, Trans.AMS **18** (1917), 331–372.

[Deb99] Olivier Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1999.

[DO88] Igor Dolgachev and David Ortland, *Point sets in projective spaces and theta functions*, Astérisque (1988), no. 165, 210 pp. (1989).

[DR77] U. V. Desale and S. Ramanan, *Classification of vector bundles of rank* 2 *on hyperelliptic curves*, Invent. Math. **38** (1976/77), no. 2, 161–185.

[FSM04] Eberhard Freitag and Riccardo Salvati Manni, *The Burkhardt group and modular forms. II*, Transform. Groups **9** (2004), no. 3, 237–256.

[GD94] Maria Gonzalez-Dorrego, *(16,6) configurations and geometry of kummer surfaces in*, Memoirs of the American Mathemaical Society **107** (1994), no. 512, 1–109.

[GH78] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.

[GH04] B. H. Gross and J. Harris, *On some geometric constructions related to theta characteristics*, Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, pp. 279–311.

[Har95] J. Harris, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1995, A first course.

[HT84] J. Harris and L. W. Tu, *On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties*, Topology **23** (1984), no. 1, 71–84.

[Hud06] R.W.H.T. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge University Press, 1906.

[Hun96] B. Hunt, *The geometry of some special arithmetic quotients*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1637, Springer, Berlin, 1996.

[Igu64] J.-I. Igusa, *On the graded ring of theta-constants. I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 219–246.

[Koi76] S. Koizumi, *Theta relations and projective normality of abelian varieties*, Amer. Journ. Math **98** (1976), 865–889.

[LB92] Herbert Lange and Christina Birkenhake, *Complex abelian varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[LN83] H. Lange and M. S. Narasimhan, *Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves*, Math. Ann. **266** (1983), no. 1, 55–72.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Mum66] D. Mumford, *On the equations defining abelian varieties. I*, Invent. Math. **1** (1966), 287–354.

[Mum67a] ———, *On the equations defining abelian varieties. II*, Invent. Math. **3** (1967), 75–135.

[Mum67b] ———, *On the equations defining abelian varieties. III*, Invent. Math. **3** (1967), 215–244.

[Mum74] ———, *Prym varieties. I*, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 1974, pp. 325–350.

[New67] P. E. Newstead, *Topological properties of some spaces of stable bundles*, Topology **6** (1967), 241–262.

[NR69] M. S. Narasimhan and S. Ramanan, *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 14–51.

[Ray82] Michel Raynaud, *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), no. 1, 103–125.

[SD74] B. Saint-Donat, *Projective models of $K-3$ surfaces*, Amer. J. Math. **96** (1974), 602–639.

[Ses67] C. S. Seshadri, *Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **85** (1967), 303–336.

[vdG87] G. van der Geer, *Note on abelian schemes of level three*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 401–408.

[vGI01] B. van Geemen and E. Izadi, *The tangent space to the moduli space of vector bundles on a curve and the singular locus of the theta divisor of the Jacobian*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 1, 133–177.