Cellules de Calogero-Moser : le cas lisse (travail en commun avec R. Rouquier)

Cédric Bonnafé

CNRS - I3M (UMR 5149) - Université de Montpellier 2

Chevaleret - Janvier 2013

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

But de l'exposé. — *Généraliser la théorie de Kazhdan-Lusztig*

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

But de l'exposé. — *Généraliser la théorie de Kazhdan-Lusztig*

Point négatif. — Cette généralisation est conjecturale...

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

But de l'exposé. — *Généraliser la théorie de Kazhdan-Lusztig*

Point négatif. — Cette généralisation est conjecturale...

Point positif. — Cette généralisation est conjecturale (!)...

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

But de l'exposé. — *Généraliser la théorie de Kazhdan-Lusztig*

Point négatif. — Cette généralisation est conjecturale...

Point positif. — Cette généralisation est conjecturale (!)... et se base sur la théorie des algèbres de Cherednik

Spetses (Broué-Malle-Michel, 1993-...)

Principe. — Faire avec les groupes de réflexions de complexes tout ce que l'on fait avec les groupes de Weyl/Coxeter

Objectif. — Reconstruire autant que possible la théorie des représentations des groupes réductifs finis en partant simplement de la donnée (V, W)

But de l'exposé. — *Généraliser la théorie de Kazhdan-Lusztig*

Point négatif. — Cette généralisation est conjecturale...

Point positif. — Cette généralisation est conjecturale (!)... et se base sur la théorie des algèbres de Cherednik ($\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ nouvelle interprétation des cellules de Kazhdan-Lusztig)

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \to \mathbb{N}$ longueur

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \longrightarrow \mathbb{N}$ longueur
- On fixe $c : \text{Réf}(W) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \longrightarrow \mathbb{N}$ longueur
- On fixe $c : \text{Réf}(W) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués
- On note $\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}] = \bigoplus_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\, q^r$

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \to \mathbb{N}$ longueur
- On fixe $c : \text{Réf}(W) \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués
- On note $\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}] = \bigoplus_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\ q^r$
- $\mathscr{H}_c = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ T_w$, $\quad \mathscr{H}_c^{>0} = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}_{>0}}]\ T_w$ avec

$$\begin{cases} T_x T_y = T_{xy} & \text{si } \ell(xy) = \ell(x) + \ell(y) \\ (T_s - q^{c_s})(T_s + q^{-c_s}) = 0 & \text{si } s \in S \end{cases}$$

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \to \mathbb{N}$ longueur
- On fixe $c : \text{Réf}(W) \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués
- On note $\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}] = \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{C}\, q^r$
- $\mathscr{H}_c = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ T_w, \quad \mathscr{H}_c^{>0} = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}_{>0}}]\ T_w$ avec

$$\begin{cases} T_x T_y = T_{xy} & \text{si } \ell(xy) = \ell(x) + \ell(y) \\ (T_s - q^{c_s})(T_s + q^{-c_s}) = 0 & \text{si } s \in S \end{cases}$$

- Involution anti-linéaire : $\overline{q^r} = q^{-r}$ et $\overline{T}_w = T_{w^{-1}}^{-1}$

Résumé de la théorie de Kazhdan-Lusztig

On suppose pour l'instant que W est un groupe de Coxeter

- On choisit un ensemble de réflexions simples S, $\ell : W \to \mathbb{N}$ longueur
- On fixe $c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués
- On note $\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}] = \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{C}\ q^r$
- $\mathscr{H}_c = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ T_w, \quad \mathscr{H}_c^{>0} = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}_{>0}}]\ T_w$ avec

$$\begin{cases} T_x T_y = T_{xy} & \text{si } \ell(xy) = \ell(x) + \ell(y) \\ (T_s - q^{c_s})(T_s + q^{-c_s}) = 0 & \text{si } s \in S \end{cases}$$

- Involution anti-linéaire : $\overline{q^r} = q^{-r} \quad$ et $\quad \overline{T}_w = T_{w^{-1}}^{-1}$

Kazhdan-Lusztig (1979), Lusztig (1983)

Il existe un unique $C_w \in \mathscr{H}_c$ tel que $\begin{cases} \overline{C}_w = C_w \\ C_w \equiv T_w \mod \mathscr{H}_c^{>0} \end{cases}$.

Cellules de Kazhdan-Lusztig

Cellules de Kazhdan-Lusztig

- $\leqslant_L$ plus petit préordre tel que, pour tout $x \in W$, $\bigoplus_{w \leqslant_L x} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w$ soit un *idéal à gauche*

Cellules de Kazhdan-Lusztig

- $\leqslant_L$ plus petit préordre tel que, pour tout $x \in W$, $\bigoplus_{w \leqslant_L x} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w$ soit un *idéal à gauche*
- $x \sim_L y$ si et seulement si $x \leqslant_L y$ et $y \leqslant_L x$.

Cellules de Kazhdan-Lusztig

- $\leqslant_L$ plus petit préordre tel que, pour tout $x \in W$, $\bigoplus_{w \leqslant_L x} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w$ soit un *idéal à gauche*
- $x \sim_L y$ si et seulement si $x \leqslant_L y$ et $y \leqslant_L x$.

Définition

On appelle *c*-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche toute classe d'équivalence pour $\sim_L$ (l'ensemble de ces cellules est noté ${}^{\mathsf{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$).

Cellules de Kazhdan-Lusztig

- $\leqslant_L$ plus petit préordre tel que, pour tout $x \in W$, $\bigoplus_{w \leqslant_L x} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w$ soit un *idéal à gauche*
- $x \sim_L y$ si et seulement si $x \leqslant_L y$ et $y \leqslant_L x$.

Définition

On appelle *c*-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche toute classe d'équivalence pour $\sim_L$ (l'ensemble de ces cellules est noté ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$).

- On définit de même $\leqslant_R$, $\sim_R$, ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_R^c(W)$, $\leqslant_{LR}$, $\sim_{LR}$, ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_{LR}^c(W)$...
- On parle de *c*-cellules de Kazhdan-Lusztig à droite ou de *c*-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatère.

Définition (Familles)

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, on note $\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W apparaissant dans le $(\mathbb{C}W, \mathbb{C}W)$-bimodule

$$\left(\frac{\displaystyle\bigoplus_{w \leqslant_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\displaystyle\bigoplus_{w <_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w} \right)_{q^r \mapsto 1}.$$

Définition (Familles)

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, on note $\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W apparaissant dans le $(\mathbb{C}W, \mathbb{C}W)$-bimodule

$$\left(\frac{\displaystyle\bigoplus_{w \leqslant_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\displaystyle\bigoplus_{w <_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w} \right)_{q^r \mapsto 1}.$$

On dit que $\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$ est une(la) c-famille de Kazhdan-Lusztig (associée à Γ).

Définition (Familles)

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, on note $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W apparaissant dans le $(\mathbb{C}W, \mathbb{C}W)$-bimodule $\left(\dfrac{\bigoplus_{w \leqslant_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w <_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w} \right)_{q^r \mapsto 1}$. On dit que $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)$ est une(la) c-famille de Kazhdan-Lusztig (associée à Γ).

Définition (Caractères c-cellulaires)

Si C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche, on note $[C]_{\mathsf{KL}}$ le caractère du $\mathbb{C}W$-module $\left(\dfrac{\bigoplus_{w \leqslant_{L} C} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w <_{L} C} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w} \right)_{q^r \mapsto 1}$.

Définition (Familles)

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, on note $\mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W apparaissant dans le $(\mathbb{C}W,\mathbb{C}W)$-bimodule $\left(\dfrac{\bigoplus_{w\leqslant_{LR}\Gamma}\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w<_{LR}\Gamma}\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}\right)_{q^r\mapsto 1}$. On dit que $\mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma}(W)$ est une(la) c-famille de Kazhdan-Lusztig (associée à Γ).

Définition (Caractères c-cellulaires)

Si C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche, on note $[C]_{\mathsf{KL}}$ le caractère du $\mathbb{C}W$-module $\left(\dfrac{\bigoplus_{w\leqslant_{L}C}\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w<_{L}C}\mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}\right)_{q^r\mapsto 1}$. On dit que $[C]_{\mathsf{KL}}$ est un(le) KL-caractère c-cellulaire (associé à C).

Théorème (Cellules bilatères et familles)

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W).$

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathsf{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

(L1) $\sum_{C} [C]_{\mathsf{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$.

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

(L1) $\sum_{C} [C]_{\mathsf{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$.

(L2) $|C| = \dim [C]_{\mathsf{KL}}$.

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

(L1) $\sum_{C} [C]_{\mathsf{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$.

(L2) $|C| = \dim [C]_{\mathsf{KL}}$.

(L3) $w_0 C$, $C w_0$ sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche et $[w_0 C]_{\mathsf{KL}} = [C w_0]_{\mathsf{KL}} = [C]_{\mathsf{KL}} \cdot \varepsilon$

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{w_0\Gamma}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma w_0}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathsf{KL}}_{\Gamma}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathsf{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

(L1) $\displaystyle\sum_{C} [C]_{\mathsf{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$.

(L2) $|C| = \dim [C]_{\mathsf{KL}}$.

(L3) $w_0 C$, $C w_0$ sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche et $[w_0 C]_{\mathsf{KL}} = [C w_0]_{\mathsf{KL}} = [C]_{\mathsf{KL}} \cdot \varepsilon$

(L4) Fait qualitatif. L'application $C \mapsto [C]_{\mathsf{KL}}$ est loin d'être injective.

Deux remarques, un cas particulier

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Définition (Cellules lisses)

On dit que Γ est lisse si $|\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)| = 1$.

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Définition (Cellules lisses)

On dit que Γ est lisse si $|\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)| = 1$.

Théorème ?

Si Γ est lisse et si $C \subset \Gamma$, alors $[C]_{\mathsf{KL}} \in \mathrm{Irr}(W)$.

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Définition (Cellules lisses)

On dit que Γ est lisse si $|\operatorname{Irr}_{\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W)| = 1$.

Théorème ?

Si Γ est lisse et si $C \subset \Gamma$, alors $[C]_{\mathsf{KL}} \in \operatorname{Irr}(W)$.

Exemples - (1) Dans $\mathfrak{S}_n$, toutes les cellules sont lisses.

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Définition (Cellules lisses)

On dit que Γ est lisse si $|\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)| = 1$.

Théorème ?

Si Γ est lisse et si $C \subset \Gamma$, alors $[C]_{\mathsf{KL}} \in \mathrm{Irr}(W)$.

Exemples - (1) Dans $\mathfrak{S}_n$, toutes les cellules sont lisses.

(2) Dans E_8, il y a 46 cellules bilatères, dont 23 lisses.

Cellules de Kazhdan-Lusztig

Donnée

$c : \mathrm{Réf}(W) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $c_s = c_t$ si s et t sont W-conjugués.

- $\leqslant_L$ plus petit préordre tel que, pour tout $x \in W$, $\bigoplus_{w \leqslant_L x} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w$ soit un *idéal à gauche*
- $x \sim_L y$ si et seulement si $x \leqslant_L y$ et $y \leqslant_L x$.

Définition

On appelle *c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche* toute classe d'équivalence pour $\sim_L$ (l'ensemble de ces cellules est noté ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$).

- On définit de même $\leqslant_R$, $\sim_R$, ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_R^c(W)$, $\leqslant_{LR}$, $\sim_{LR}$, ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_{LR}^c(W)$...
- On parle de *c-cellules de Kazhdan-Lusztig à droite* ou de *c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatère*.

Définition (Familles)

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, on note $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W apparaissant dans le $(\mathbb{C}W,\mathbb{C}W)$-bimodule $\left(\dfrac{\bigoplus_{w \leqslant_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w <_{LR} \Gamma} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}\right)_{q^r \mapsto 1}$. On dit que $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)$ est une(la) c-famille de Kazhdan-Lusztig (associée à Γ).

Définition (Caractères c-cellulaires)

Si C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche, on note $[C]_{\mathsf{KL}}$ le caractère du $\mathbb{C}W$-module $\left(\dfrac{\bigoplus_{w \leqslant_{L} C} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}{\bigoplus_{w <_{L} C} \mathbb{C}[q^{\mathbb{R}}]\ C_w}\right)_{q^r \mapsto 1}$. On dit que $[C]_{\mathsf{KL}}$ est un(le) KL-caractère c-cellulaire (associé à C).

Théorème (Cellules bilatères et familles)

(LR1) $\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma} \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)$.

(LR2) $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)} \chi(1)^2$.

(LR3) $w_0\Gamma$, Γw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères et $\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathsf{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W) \cdot \varepsilon$ (et donc $w_0\Gamma = \Gamma w_0$).

(LR4?) La fonction $\chi \mapsto \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \chi(s)$ est constante sur les familles.

Théorème (Cellules à gauche et caractères cellulaires)

(L1) $\sum_C [C]_{\mathsf{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$.

(L2) $|C| = \dim [C]_{\mathsf{KL}}$.

(L3) $w_0 C$, Cw_0 sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche et $[w_0 C]_{\mathsf{KL}} = [Cw_0]_{\mathsf{KL}} = [C]_{\mathsf{KL}} \cdot \varepsilon$

(L4) Fait qualitatif. L'application $C \mapsto [C]_{\mathsf{KL}}$ est loin d'être injective.

Deux remarques, un cas particulier

(1) La partition en cellules dépend fortement du choix de S.

(2) En revanche, l'ensemble des familles et l'ensemble des caractères cellulaires n'en dépendent pas !

Définition (Cellules lisses)

On dit que Γ est lisse si $|\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathsf{KL}}(W)| = 1$.

Théorème ?

Si Γ est lisse et si $C \subset \Gamma$, alors $[C]_{\mathsf{KL}} \in \mathrm{Irr}(W)$.

Exemples - (1) Dans $\mathfrak{S}_n$, toutes les cellules sont lisses.

(2) Dans E_8, il y a 46 cellules bilatères, dont 23 lisses.